



数列的极限

数列是个特殊的函数

由特殊到一般

数列极限是我们极限思想的起源

由简单到复杂

数列极限是相对简单的而且直观的

由具体到抽象

数列的定义

数列极限的定义

收敛数列的性质



数列的定义

定义 如果按照某一法则，对每个正整数 n ，对应着一个确定的实数 x_n ，这些实数 x_n 按照下标 n 从小到大排列得到的一个序列

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

就叫做**数列**，简记为 $\{x_n\}$ 。

(sequence)

数列中的每一个数叫做**数列的项**，第 n 项 x_n 称之为数列的**一般项**或**通项**。

比如, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$, 一般项为 $\frac{1}{n}$,

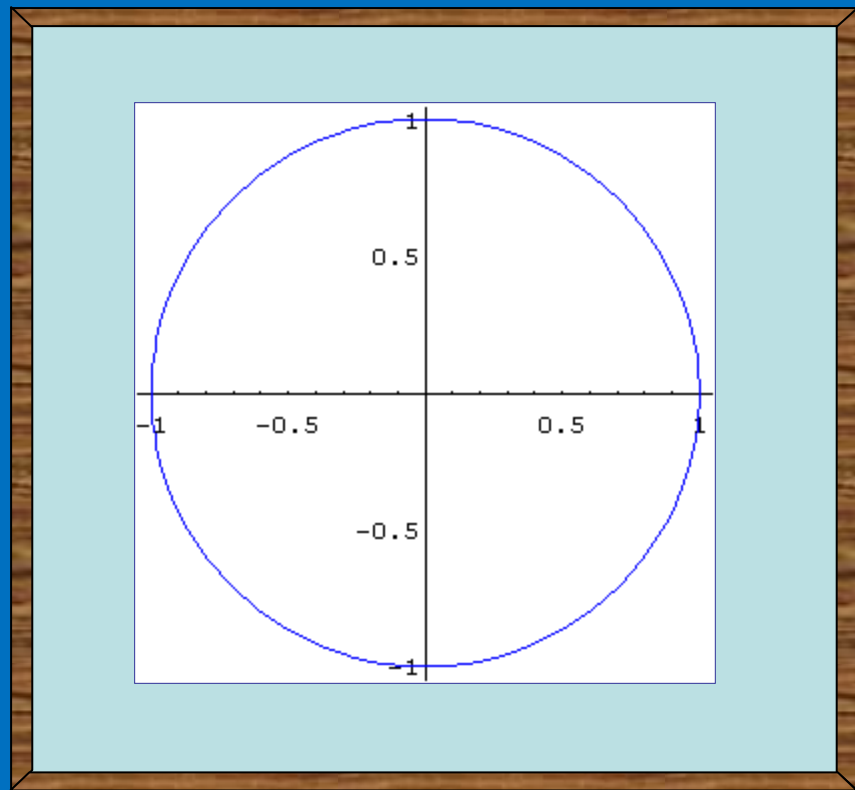
$2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{n + (-1)^{n+1}}{n}, \dots$, 一般项为 $\frac{n + (-1)^{n+1}}{n}$,

注 $x_n = f(n), n \in \mathbf{N}_+$



数列极限的定义

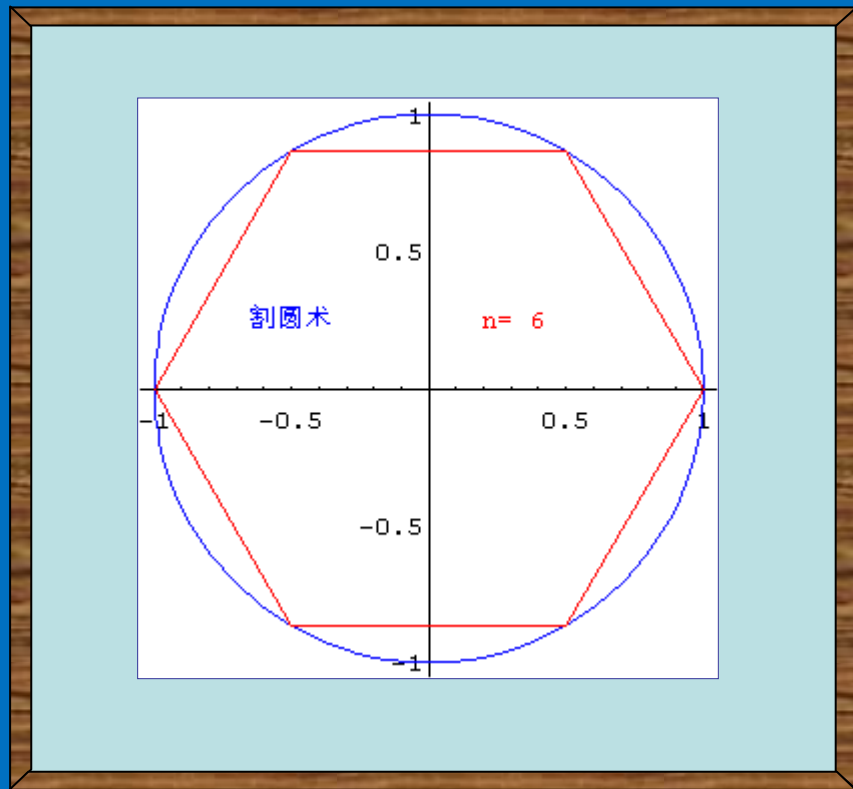
我国古代数学家刘徽利用圆内接正多边形
来推算圆面积的方法
——割圆术



我国古代数学家刘徽利用圆内接正多边形 来推算圆面积的方法

——割圆术

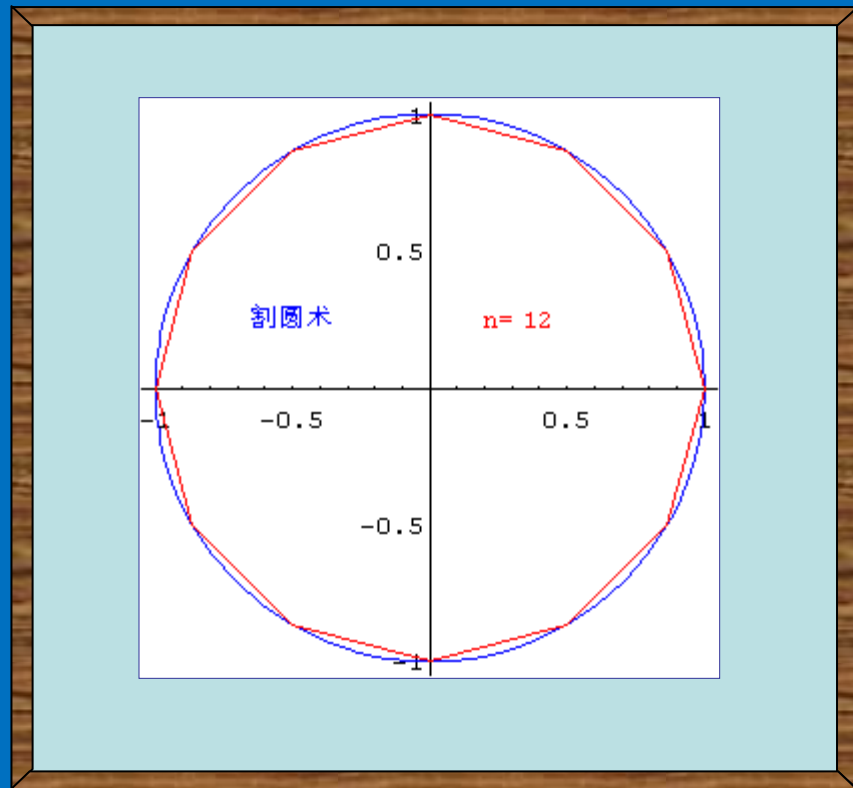
A_1



我国古代数学家刘徽利用圆内接正多边形 来推算圆面积的方法

——割圆术

A_2

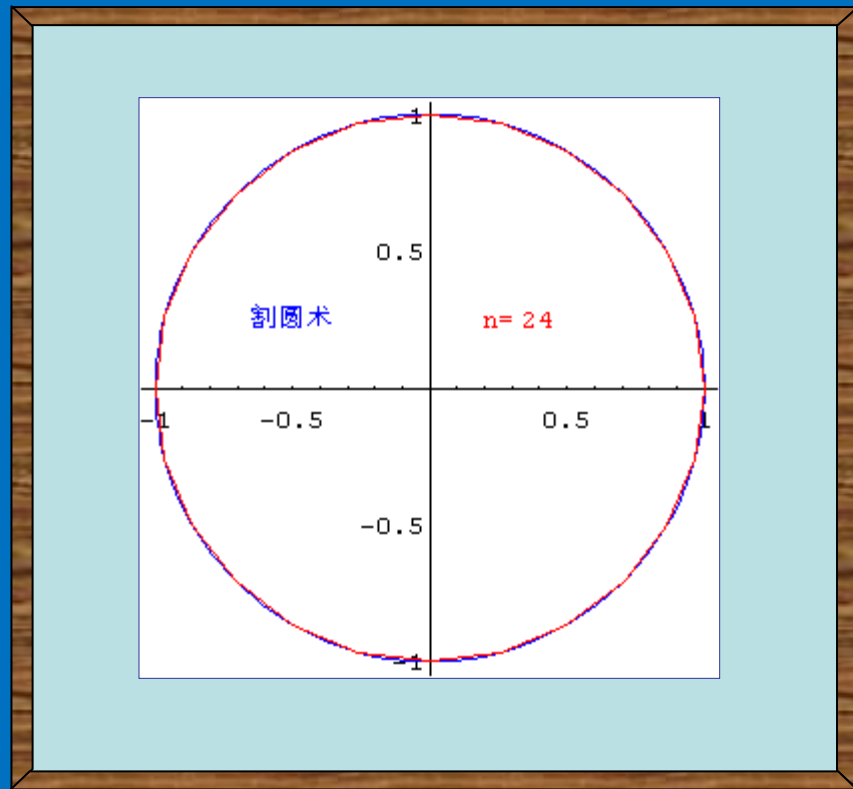


我国古代数学家刘徽利用圆内接正多边形 来推算圆面积的方法

——割圆术

当 n 越大, A_n $\{A_n\}$
就越“接近”圆的面积.

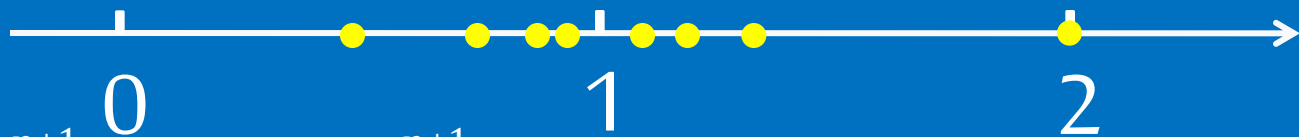
A_3



当 $n \rightarrow \infty$ 时, A_n 也无限接近于某一确定的数值,
这个数值称为数列 $\{A_n\}$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限.

例如, 数列 $\left\{ \frac{n + (-1)^{n+1}}{n} \right\} : 2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{n + (-1)^{n+1}}{n}, \dots$

其极限为1



$$x_n = \frac{n + (-1)^{n+1}}{n} = 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad \text{与1如何接近?}$$

$$|x_n - 1| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n}$$

要求 $|x_n - 1| = \frac{1}{n} < \frac{1}{100}$, 只要 $n > 100$,

则从第100项以后的一切项均满足 $|x_n - 1| < \frac{1}{100}$.

要求 $|x_n - 1| = \frac{1}{n} < \frac{1}{10000}$, 只要 $n > 10000$,

则从第10000项以后的一切项均满足 $|x_n - 1| < \frac{1}{10000}$.

字母 ε : 任意给定的小正数

要求 $|x_n - 1| = \frac{1}{n} < \varepsilon$, 只要 $n > \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$, 则从第 $\left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$ 项

以后的一切项均满足 $|x_n - 1| < \varepsilon$.

对任意给定的正数 ε , 总存在着一个正整数 N

(比如取 $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$) , 当 $n > N$ 时,

不等式 $|x_n - 1| < \varepsilon$ 均成立.

定义 设 $\{x_n\}$ 为一数列，如果存在常数 a ，对于任意给定的正数 ε ，总存在着一个正整数 N ，使得对于 $n > N$ 时的一切 n ，不等式 $|x_n - a| < \varepsilon$ 均成立，则称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的**极限**，或者称数列 $\{x_n\}$ **收敛于** a ，
(limit)

记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ，或 $x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$

如果上述 a 不存在，则称数列 $\{x_n\}$ **没有极限**，或者说数列 $\{x_n\}$ 是**发散的**，也说 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ **不存在**。

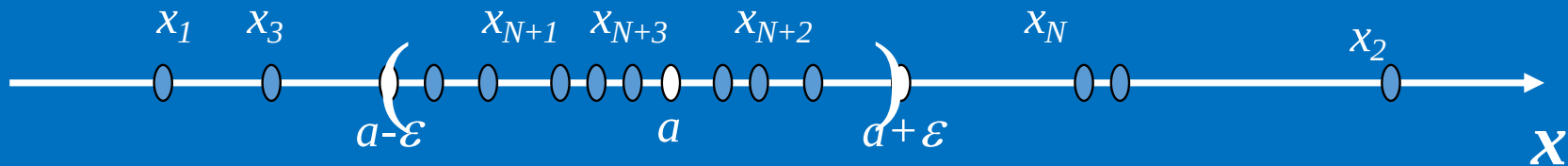
- 注 1. 定义中 ε 的“任意给定”性极其重要；
2. N 与 ε 有关，它由 ε 的给定而确定；
3. $\forall$ 表示“任意给定”， $\exists$ 表示“存在”；

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \text{ 当 } n > N \text{ 时, 恒有 } |x_n - a| < \varepsilon$$

4. “数列 $\{x_n\}$ 的极限为 a ” 的几何解释:

当 $n > N$ 时, x_n 的点均落在 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ 内, 至多有有限个 (至多只有 N 个) 是落在 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ 外的.



例 证明数列 $\{x_n\} = \left\{ \frac{n + (-1)^{n+1}}{n} \right\}$ 的极限为 1.

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 要使 $|x_n - 1| = \frac{1}{n} < \varepsilon$, 只要 $n > \frac{1}{\varepsilon}$,

取 $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$, 则当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - 1| < \varepsilon$.

故数列 $\{x_n\} = \left\{ \frac{n + (-1)^{n+1}}{n} \right\}$ 的极限为 1.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$.

例 设 $|q| < 1$ ，证明等比数列 $1, q, q^2, \dots, q^{n-1}, \dots$ 的极限为 0.

证明 $\forall \varepsilon > 0$ ，不妨设 $\varepsilon < 1$ ，

要使 $|x_n - 0| = |q^{n-1} - 0| = |q|^{n-1} < \varepsilon$ ， $(n-1)\ln|q| < \ln\varepsilon$ ，

故 $n > 1 + \frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$ ，取 $N = \left\lceil 1 + \frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|} \right\rceil$ ，则当 $n > N$ 时，

恒有 $|x_n - 0| = |q^{n-1} - 0| < \varepsilon$ ，故此等比数列的极限为 0.



收敛数列的性质

定理 1 (极限的唯一性) 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 那么它的极限唯一.

例 证明数列 $\{x_n\} = \{(-1)^n\}$ 是发散的.

证明



如果此数列收敛, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$.

令 $\varepsilon = \frac{1}{4}$, $\exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, $|x_n - a| < \frac{1}{4}$.

例 证明数列 $\{x_n\} = \{(-1)^n\}$ 是发散的.

证明

即当 $n > N$ 时, x_n 都在开区间 $\left(a - \frac{1}{4}, a + \frac{1}{4}\right)$ 内,
这是不可能的, 这是因为 x_n 一直重复取 1 和 -1 两数.
而这两个数不可能同时属于长度为 $\frac{1}{2}$ 的开区间
 $\left(a - \frac{1}{4}, a + \frac{1}{4}\right)$ 内, 因此此数列发散.

定义 数列 $\{x_n\}$ **有界**是指如果存在 $M > 0$, 使得一切的 x_n 满足 $|x_n| \leq M$. 如果这样的正数 M 不存在, 就说数列 $\{x_n\}$ 是**无界**的.

比如, 数列 $\{(-1)^n\}$ 是有界的: $|(-1)^n| \leq 1$.

数列 $\{n^2\}$ 是无界的: 因为当 n 无限增大时, n^2 可以大于任何给定的正数.

定理 2 (收敛数列的有界性) 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则数列 $\{x_n\}$ 一定有界.

注 1. 推论: 如果数列无界, 则其一定发散;

比如数列 $\{n^2\}$ 是无界的, 因而它是发散的.

2. 如果数列有界, 则其未必收敛;

例如数列 $\{(-1)^n\}$ 有界, 但这数列是发散的.

定理 3 (收敛数列的保号性)

如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 且 $a > 0$ (或 $a < 0$) ,
则存在正整数 $N > 0$, 当 $n > N$ 时,
均有 $x_n > 0$ (或 $x_n < 0$) .

推论 如果数列 $\{x_n\}$ 从某项起, $x_n \geq 0$ (或 $x_n \leq 0$)

且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $a \geq 0$ (或 $a \leq 0$) .

定义 在数列 $\{x_n\}$ 中任意抽取无限多项并保持这些项在原数列 $\{x_n\}$ 中的先后次序，由此得到的一个新数列称为 $\{x_n\}$ 的**子数列**（或**子列**），记作 $\{x_{n_k}\}$ 。这里 x_{n_k} 在数列 $\{x_{n_k}\}$ 中是第 k 项，在原数列 $\{x_n\}$ 中是第 n_k 项。

定理 4 (收敛数列与其子数列间的关系)

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a ,

则它的任一子数列也收敛, 且其极限也为 a .

推论 若数列 $\{x_n\}$ 的某个子列发散或某两个子列收敛于两个不同的极限, 则该数列 $\{x_n\}$ 必发散.