



无穷小的比较

无穷小比较的定义

等价无穷小的性质



无穷小比较的定义

比如：当 $x \rightarrow 0$ 时， x 、 $\sin x$ 、 x^3 均为无穷小，

但 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x} = 0$ ， $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^3} = \infty$ 及 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 。

$x^3 = x \cdot x \cdot x$ 比 x 的次数高，因此当 $x \rightarrow 0$ 时，

x^3 趋于零的速度比 x “快”，

x 趋于零的速度比 x^3 “慢”，

而 $\sin x$ 与 x 趋于零的速度“差不多”。

定义 设 α , β 是同一自变量变化过程中的无穷小,
且 $\alpha \neq 0$, $\lim \frac{\beta}{\alpha}$ 表示这一变换过程中的极限.

如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 则称 β 是比 α **高阶的无穷小**,
记作 $\beta = o(\alpha)$;

如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$, 则称 β 是比 α **低阶的无穷小**.

如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$, 则称 β 与 α 是同阶无穷小;

如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, 则称 β 与 α 是等价无穷小,

记作 $\alpha \sim \beta$;

如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0$, $k > 0$, 则称 β 是关于 α 的 k 阶无穷小.

比如：由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x} = 0$ 知当 $x \rightarrow 0$ 时 $x^3 = o(x)$ ；

由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 知当 $x \rightarrow 0$ 时 $\sin x \sim x$.

又比如：

当 $x \rightarrow 0$ 时， $\sin x \sim x$ ， $\tan x \sim x$ ， $\arcsin x \sim x$ ，

$$\arctan x \sim x, \quad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}.$$

说明 此例中五个等价无穷小中的 x 可用其他字母表示，比如 u ，此结论仍成立.

特别地，若 $u = u(x) \rightarrow 0$ 且 $u(x) \neq 0$ ，此结论仍成立，
比如当 $x \rightarrow 0$ 时， $\sin x^2 \sim x^2$ ；当 $x \rightarrow \infty$ 时， $\tan \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$.

例 证明当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x$.

解 令 $t = \sqrt[n]{1+x} - 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{\frac{1}{n}x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\frac{1}{n}[(1+t)^n - 1]}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{\frac{1}{n}x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{nt}{nt + \frac{n(n-1)}{2}t^2 + \cdots + t^n} = 1,$$

故 $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x \quad (x \rightarrow 0).$



等价无穷小的性质

定理 $\alpha \sim \beta$ 的充分必要条件是 $\beta = \alpha + o(\alpha)$.

定理 设 $\alpha \sim \alpha'$, $\beta \sim \beta'$, 且 $\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在,

则 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$.

证明
$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta}{\beta'} \cdot \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}.$$

例 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x}$.

解 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin 5x \sim 5x$, $\tan 2x \sim 2x$,
所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}.$$

例 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\arctan x^2}$.

解 当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $\arctan x^2 \sim x^2$,
因而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\arctan x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

例 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}} - 1}{\arcsin x^2}$.

解 当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1+x^2)^{\frac{1}{3}} - 1 \sim \frac{1}{3}x^2$, $\arcsin x^2 \sim x^2$,

因而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}} - 1}{\arcsin x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^2}{x^2} = \frac{1}{3}.$$

例 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin x^3}$.

解 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x \sim x$, $\sin x \sim x$, $\sin x^3 \sim x^3$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{x^3} = 0 . \quad \times$$

注 在利用等价无穷小代换求极限时, 只有对所求极限中相乘或相除的因式才能用等价无穷小来代替, 而对极限中相加或相减的部分则不能随意来代替.

例 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin x^3}$.

解
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x \cdot (1 - \cos x)}{\sin x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{1}{2} x^2}{x^3} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$