



闭区间上 连续函数的性质

如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内连续, 且在左端点 a 右连续, 在右端点 b 左连续, 则称函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续.

最大值最小值定理与有界性定理

零点定理与介值定理



最大值最小值定理 与有界性定理

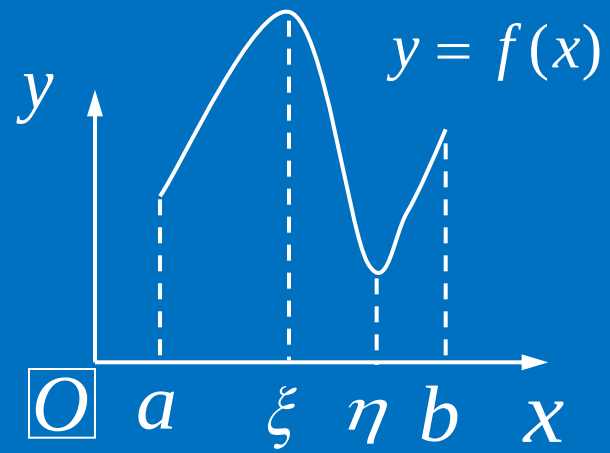
定义 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 如果存在 $x_0 \in I$, 使得对任何 $x \in I$, 均有

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0)),$$

则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的**最大值**(**最小值**).

如果一个函数的最大值与最小值相等, 则该函数一定是常数函数.

定理（最大值最小值定理） 闭区间上连续的函数在该区间上一定存在它的最大值和最小值, 即若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则至少存在一点 $\xi \in [a, b]$, $f(\xi)$ 是函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值; 也至少存在一点 $\eta \in [a, b]$, $f(\eta)$ 是函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上最小值.



记函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值 $M = \max_{[a, b]} f(x)$,
最小值 $m = \min_{[a, b]} f(x)$, 取 $\overline{M} = \max\{|M|, |m|\} + 1$,
则 $|f(x)| \leq \overline{M}$ 对一切 $x \in [a, b]$ 均成立, 因此按
函数有界性定义, 则有

定理（有界性定理）

闭区间上连续的函数在该区间上必有界.

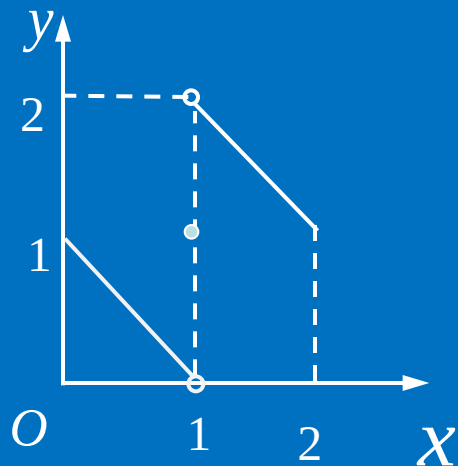
注 如果函数 $f(x)$ 仅在开区间 (a,b) 内连续, 或者在闭区间 $[a,b]$ 上不连续, 则函数 $f(x)$ 不一定有最大值或最小值存在, 也不一定有界.

比如：函数 $f(x) = \tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内连续，但它在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内无界，而且既无最大值也无最小值。

又如, 函数

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1, \\ 3-x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

在闭区间 $[0, 2]$ 上有间断点 $x=1$,
函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 2]$ 上虽然有界,
但既无最大值也无最小值.



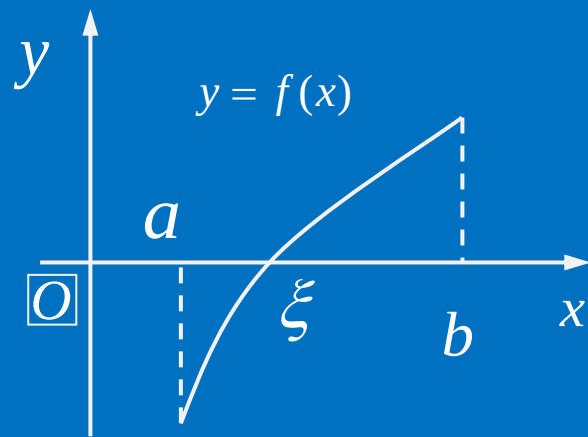


零点定理 与介值定理

定义 方程 $f(x)=0$ 的根称作函数 $f(x)$ 的**零点**.

定理 (零点定理) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使 $f(\xi)=0$.

零点定理的几何意义 一条“有头有尾”连续不断的曲线弧，其一头位于 x 轴的下方，而另一头位于 x 轴的上方，那么它一定会与 x 轴相交. 当然，可能交点还不止一个.



例 证明方程 $x^3 + x - 1 = 0$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上至少有一个实根.

证明 取函数 $f(x) = x^3 + x - 1$, 由于 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续, 且 $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 1 > 0$.

由零点定理知, 至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使 $f(\xi) = 0$, 即方程 $x^3 + x - 1 = 0$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上至少有一个实根.

定理（介值定理） 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，则对于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任何一个数 C ，在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ ，使 $f(\xi) = C$ 。

介值定理的几何意义 在闭区间 $[a, b]$ 上连续曲线弧 $y = f(x)$ 与直线 $y = C$ 至少相交一点。

