



洛必达法则



计算 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, 其中 $f(x)$ 、 $g(x)$ 都是连续函数,

(1) 若 $g(a) \neq 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = ?$

(2) 若 $f(a) \neq 0$, 且 $g(a) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = ?$

(3) 若 $f(a) = 0$, 且 $g(a) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = ?$

定义 如果当 $x \rightarrow a$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时, 函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 都趋于零或都趋于无穷大, 则极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)}$

可能存在、也可能不存在. 通常把这种极限叫做

未定式, 分别记作 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$.

用洛必达法则求 $\frac{0}{0}$ 的未定式

用洛必达法则求 $\frac{\infty}{\infty}$ 的未定式

用洛必达法则求其他类型的未定式



用洛必达法则
求 $\frac{0}{0}$ 的未定式

定理 如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足

(1) 当 $x \rightarrow a$ 时, 函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 都趋于零;

(2) 在点 a 的某去心邻域内, $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 都存在

且 $g'(x) \neq 0$;

(3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或为无穷大),

则 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

注 (1) 求 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 可以转化为求 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,

这种在一定条件下通过分子分母分别求导再求极限来确定未定式的值的方法称为**洛必达法则**.

若不是未定式, 则不能用洛必达法则, 否则会导致错误结果; 比如, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x} = 0$, 而 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1} = 1$.

(2) 如果 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 仍是 $\frac{0}{0}$, 且 $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 满足

定理中 $f(x)$ 与 $g(x)$ 所满足的条件, 则

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

而且可以依此类推.

(3) 如果把定理中 $x \rightarrow a$ 换成自变量的其他变化过程, 则只要把定理的条件作相应改动, 结论仍成立.

例 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin x}$.

解
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{2x} - 1)'}{(\sin x)'} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x}}{\cos x} = 2.$$

例 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{6x}$
 $= -\frac{1}{6}.$

例 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x \sin x \tan x}$.

$$\sec^2 x - 1 = \tan^2 x$$

解
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x \sin x \tan x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{3x^2} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

注 在应用洛必达法则求未定式时, 最好能与其他求极限的方法结合使用.



用洛必达法则
求 $\frac{\infty}{\infty}$ 的未定式

定理 如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足

(1) 当 $x \rightarrow a$ 时, 函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 都趋于无穷大;

(2) 在点 a 的某去心邻域内, $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 都存在

且 $g'(x) \neq 0$;

(3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或为无穷大),

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

例 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} \ (n > 0)$.

解
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}}$$
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{nx^n} = 0.$$

例 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^{\lambda x}}$ (n 为正整数, $\lambda > 0$).

解

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^{\lambda x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-1}}{\lambda e^{\lambda x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{\lambda^2 e^{\lambda x}} \\ &= \cdots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n!}{\lambda^n e^{\lambda x}} = 0.\end{aligned}$$

注 (1) 若这里的 n 为正数, 此极限仍为 0.

(2) 由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^{\lambda x}} = 0$ 可知增大的“速度”.



用洛必达法则
求其他类型的
未定式

$$0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad \infty^0, \quad 0^0, \quad 1^\infty \Rightarrow \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}$$

例 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$.

解
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

$$\underline{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\frac{1}{\ln x}} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{-\frac{1}{x \ln^2 x}}$$

例 求 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x)$.

解

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-\sin x} = 0.\end{aligned}$$

$$\sec x - \tan x = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$$

例 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(1+x)]^{\frac{1}{x}}$.

解 设 $y = [\ln(1+x)]^{\frac{1}{x}}$, $\ln y = \frac{\ln [\ln(1+x)]}{x}$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln [\ln(1+x)]}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\ln(1+x)} \cdot \frac{1}{1+x}}{1} = 0,$$

所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(1+x)]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln y} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln y} = 1$.

设 $y = [\ln(1+x)]^{\frac{1}{x}}$, $\ln y = \frac{1}{x} \cdot \ln [\ln(1+x)] = \frac{\ln [\ln(1+x)]}{x}$

小结

问题：能否用洛必达法则求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x}$?