

助力乡村学校音体美课堂行动”官方合作图书
/ 研客及全国各大考研培训学校指定用书

金榜时代TM
GLIST 明德·弘毅·品质 08

金榜时代考研数学系列

数学历年真题 全精解析

(数学一)

2022

编著◎李永乐 王式安 刘喜波 武忠祥 宋浩 姜晓千 铁军 李正元 蔡燧林 胡金德

主编建议 | 与《数学复习全书》《基础过关660题》《强化通关330题》配合使用，效果更佳

真题真相 | 深度解析2009-2021年真题，解锁命题“套路”，告诉你一个真实的考研数学

免费视频 | 微信扫右侧二维码观看本书配套精选视频，李永乐团队主讲，犹如名师在身旁



中国农业出版社
CHINA AGRICULTURE PRESS

金榜时代考研数学名师团队



线代王·李永乐 @清华李永乐考研数学辅导团队

微信公众号: 永乐讲线代

B站: 李永乐考研团队



- 原清华大学应用数学系教授 · 北京高教学会数学研究会副理事长
- 广受学生信赖的“线代王” · 曾任全国硕士研究生入学考试北京地区数学阅卷组组长
- 百万畅销书《线性代数辅导讲义》《数学复习全书》主编

李老师作为全国著名的考研数学线性代数辅导专家,对考研数学出题形式、考试重点了如指掌,解题思路极其灵活,辅导针对性极强,效果优良,成绩显著,受到广大学员的交口称赞。其主编的《线性代数辅导讲义》《数学复习全书》《数学基础过关660题》等已被历届考生公认为复习首选辅导书。

前命题组组长·王式安 @清华李永乐考研数学辅导团队 B站: 李永乐考研团队



- 原北京理工大学研究生院院长、应用数学系主任、教授
- 享受国务院特殊津贴的数学专家
- 美国哥伦比亚大学、南佛罗里达大学、纽约大学等大学的客座教授
- 1987-2001年间担任全国硕士研究生入学考试数学命题组组长
- 百万畅销书《概率论与数理统计辅导讲义》《数学复习全书》主编

王老师凭借多年参加考研数学命题工作的深厚经验,对考研数学的命题思路和命题方向了如指掌。其主编的《概率论与数理统计辅导讲义》《数学复习全书》《数学基础过关660题》等已被历届考生公认为复习首选辅导书。

考研高数“三巨头”——刘喜波(高数波叔) @清华李永乐考研数学辅导团队

- 中国科学院数学博士 · 北方工业大学理学院统计学系系主任、教授



长期从事本科生的教育教学工作,曾荣获学校师德先进个人、十佳班导师等称号,是北京市中青年骨干教师、北京市公共数学优秀教学团队主要成员,主编教材1部、教学参考书3部、教育教学论文集1部、译著2部,参编教学参考书10余部。

武忠祥 @清华李永乐考研数学辅导团队



- 原西安交通大学(985、211、双一流高校)数学系教授
- 美国爱荷华大学(2019美国综合性大学TOP100)访问学者
- 百万畅销书《高等数学辅导讲义》《数学复习全书》主编
- 高教社《工科数学分析基础》《高等数学基础》等教材主编

考研高数“三巨头”——宋浩(考研数学阅卷人) @宋浩老师 B站: 宋浩老师官方

- 山东大学数学学院本科研究生、中国科学院博士
- 英国Queen Mary University of London访问学者
- 副教授,考研数学阅卷人



宋老师上课风趣幽默、由浅入深,能把复杂抽象的数学讲得诙谐有趣,上传至B站的数学视频《线性代数》《微积分》《概率论与数理统计》《高等数学》帮助了全国无数的大学生,总播放量近2000万次。宋老师讲考研数学,延续其风趣幽默的特点,喜欢从多种角度找寻思路,善于总结知识点,把晦涩难懂的考研知识讲的生动而有趣。

考研高数“三巨头”——姜晓千(全能名师) @晓千老师

微信公众号: 晓千老师



- 中国人民大学金融数学博士
- 全国各大省市考研辅导机构全程主讲
- 新浪、搜狐、腾讯、网易、中国教育在线等各大门户网站特邀访谈嘉宾

姜老师对考研数学历年真题有着极其深入的研究,授课风格高屋建瓴、激情洋溢、亲和幽默,深受考研学子喜爱。

“助力乡村学校音体美课堂行动”官方合作图书
V 研客及全国考研培训学校指定用书

金榜时代TM
GLIST 明德·弘毅·品质

金 榜 时 代 考 研 数 学 系 列

数学历年真题 全精解析 (数学一)

2022

微信公众号【顶尖考研】

(ID: djky66)

编著 © 李永乐 王式安 刘喜波 武忠祥 宋浩 姜晓千 铁军 李正元 蔡燧林 胡金德

微信公众号:顶尖考研
(ID: djky66)

@考研路上火力全开的你

昨日种种，皆成今我，切莫思量，更莫哀，
从今往后，怎么收获，怎么栽。

中国农业出版社
CHINA AGRICULTURE PRESS

·北京·

图书在版编目(CIP)数据

数学历年真题全精解析. 数学一 / 李永乐等编著
—北京: 中国农业出版社, 2021. 1
ISBN 978-7-109-27552-2

I. ①数… II. ①李… III. ①高等数学—研究生—入学考试—题解 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2020)第 209355 号

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

中国农业出版社出版

地址: 北京市朝阳区麦子店街 18 号楼

邮编: 100125

责任编辑: 吕睿

责任校对: 吴丽婷

印刷: 天津新华印务有限公司

版次: 2021 年 1 月第 1 版

印次: 2021 年 1 月天津第 1 次印刷

发行: 新华书店北京发行所

开本: 787mm×1092mm 1/16

印张: 23

字数: 545 千字

定价: 99.80 元

版权所有·侵权必究

凡购买本社图书, 如有印装质量问题, 我社负责调换。

服务电话: 010-59195115 010-59194918

考研数学满分 150 分,数学在考研成绩中的比重很大;同时又因数学学科本身的特点,考生的数学成绩历年来千差万别,数学成绩好在考研中很占优势,因此有“得数学者考研成”之说。既然数学对考研成绩如此重要,那么就有必要探讨一下影响数学成绩的主要因素。

本系列图书作者根据多年的命题经验和阅卷经验,发现考研数学命题的灵活性非常大,不仅表现在一个知识点与多个知识点的考查难度不同,更表现在对多个知识的综合考查上,这些题目在表达上多一个字或多一句话,难度都会变得截然不同。正是这些综合型题目拉开了考试成绩的距离,而构成这些难点的主要因素,实际上是最基础的基本概念、定理和公式的综合。同时,从阅卷反映的情况来看,考生答错题目的主要原因也是对基本概念、定理和公式记忆和掌握得不够熟练。总结为一句话,那就是:要想数学拿高分,就必须熟练掌握、灵活运用基本概念、定理和公式。

基于此,李永乐考研数学辅导团队结合多年来考研辅导和研究的经验,精心编写了本系列图书,目的在于帮助考生有计划、有步骤地完成数学复习,从基本概念、定理和公式的记忆,到对其的熟练运用,循序渐进。以下介绍本系列图书的主要特点和使用说明,供考生复习时参考。

书名	本书特点	本书使用说明
《数学复习全书·基础篇》	内容基础·提炼精准·易学易懂(推荐使用时间:2020年6月—2020年12月)	
	本书根据大纲的考试范围将考研所需复习内容提炼出来,形成考研数学的基础内容和复习逻辑,实现大学数学同考研数学之间的顺利过渡,开启考研复习第一篇章。	考生复习过本校大学数学教材后,即可使用本书。如果大学没学过数学或者本校课本是自编教材,与考研大纲差别较大,也可使用本书替代大学数学教材。
《数学基础过关660题》	题目经典·体系完备·逻辑清晰(推荐使用时间:2020年9月—2021年4月)	
	本书主编团队出版 20 年的经典之作,一直被模仿,从未被超越。年销量达百万余册,是当之无愧的考研数学头号畅销书,拥有无数甘当“自来水”的粉丝读者,口碑爆棚,考研数学不可不入!“660”也早已成为考研数学的年度关键词。 本书重基础,重概念,重理论,一旦你拥有了《数学复习全书》《数学基础过关 660 题》教你的思维方式、知识逻辑、做题方法,你就能基础稳固、思维灵活,对知识、定理、公式的理解提升到新的高度,避免陷入复习中后期“基础不牢,地动山摇”的窘境。	与《数学复习全书·基础篇》搭配使用,在完成对基础知识的学习后,有针对性地做一些练习。帮助考生熟练掌握定理、公式和解题技巧,加强知识点的前后联系,将之体系化、系统化,分清重难点,让复习周期尽量缩短。 虽说书中都是选择题和填空题,同学们不要轻视,也不要一开始就盲目做题。看到一道题,要能分辨出是考哪个知识点,考什么,然后在做题过程中看看自己是否掌握了这个知识点,应用的定理、公式的条件是否熟悉,这样才算真正做好了一道题。
《数学历年真题全精解析·基础篇》	分类详解·注重基础·突出重点(推荐使用时间:2020年6月—2020年12月)	
	本书精选精析 1987—2008 年考研数学真题,帮助考生提前了解大学水平考试与考研选拔考试的差别,不会盲目自信,也不会妄自菲薄,真正跨入考研的门槛。	与《数学复习全书·基础篇》《数学基础过关 660 题》搭配使用,复习完一章,即可做相应的章节真题。不会做的题目做好笔记,二轮复习时的继续练习。

书名	本书特点	本书使用说明
《数学复习全书》(综合提高篇)	系统全面·深入细致·综合提高 (推荐使用时间:2021年1月—2021年7月)	
	本书为作者团队扛鼎之作,常年稳居各大平台考研图书畅销榜前列,主编之一的李永乐老师更是入选2019年“当当20周年白金作家”,考研界仅两位作者获此称号。 本书从基本理论、基础知识、基本方法出发,全面、深入、细致地讲解考研数学大纲要求的所有考点,不提供花拳绣腿的不实用技巧,也不提倡误人子弟的费时背书法,而是扎扎实实地带同学们深入每一个考点背后,找到它们之间的关联、逻辑,让同学们从知识点零碎、概念不清楚、期末考试过后即忘的“低级”水平,提升到考研必需的高度。	利用《数学复习全书·基础篇》把基本知识“捡”起来之后,再使用本书。本书及赠送本包含知识点的详细讲解、相应的练习题,以及笔记功能,有利于同学们建立考研知识体系和框架,打好基础。 在《数学基础过关660题》中若遇到不会做的题,可以放到这里来做。以章或节为单位,学习新内容前要复习前面的内容,按照一定的规律来复习。基础薄弱或中等偏下的考生,务必要利用考研当年上半年的时间,整体吃透书中的理论知识,摸清例题设置的原理和必要性,特别是对大纲中要求的基本概念、理论、方法要系统理解和掌握。
《数学历年真题全精解析》(强化篇)	真题真练·总结规律·提升技巧 (推荐使用时间:2021年7月—2021年11月)	
	本书完整收录2009—2021年考研数学的全部试题,将真题按考点分类,还精选了其他卷的试题作为练习题。力争做到考点全覆盖,题型多样,重点突出,不简单重复。书中的每道题给出的参考答案有常用、典型的解法,也有技巧性强的特殊解法。分析过程逻辑严谨、思路清晰,具有很强的可操作性,通过学习,考生可以独立完成对同类题的解答。	边做题、边总结,遇到“卡壳”的知识点、题目,回到《数学复习全书》和之前听过的基础课、强化课中去补,争取把每个真题知识点吃透、搞懂,不留死角。 通过做真题,进一步提高解题能力和技巧,满足实际考试的要求。第一阶段,浏览每年真题,熟悉题型和常考点。第二阶段,进行专项复习。
《高等数学辅导讲义》 《线性代数辅导讲义》 《概率论与数理统计辅导讲义》	经典讲义·专项突破·强化提高 (推荐使用时间:2021年7月—2021年10月)	
	三本讲义分别由作者的教学讲稿改编而成,系统阐述了考研数学的基础知识。书中例题都经过严格筛选、归纳,是多年经验的总结,对同学们的重点、难点的把握准确,有针对性。适合认真研读,做到举一反三。	哪科较薄弱,精研哪本。搭配《数学强化通关330题》一起使用,先复习讲义上的知识点,做章节例题、练习,再去听相关章节的强化课,做《数学强化通关330题》的相关习题,更有利于知识的巩固和提高。
《数学强化通关330题》	综合训练·突破重点·强化提高 (推荐使用时间:2021年5月—2021年10月)	
	强化阶段的练习题,综合训练必备。具有典型性、针对性、技巧性、综合性等特点,可以帮助同学们突破重点、难点,熟悉解题思路和方法,增强应试能力。	与《数学基础过关660题》互为补充,包含选择题、填空题和解答题。搭配《高等数学辅导讲义》《线性代数辅导讲义》《概率论与数理统计辅导讲义》使用,效果更佳。
《数学决胜冲刺6套卷》	冲刺模拟·有的放矢·高效提分 (推荐使用时间:2021年11月—2021年12月)	
	通过整套题的训练,对所学知识进行系统总结和梳理。不同于重点题型的练习,需要全面的知识,要综合应用。必要时应复习基本概念、公式、定理,准确记忆。	在精研真题之后,用模拟卷练习,找漏洞,保持手感。不要掐时间、估分,遇到不会的题目,回归基础,翻看以前的学习笔记,把每道题吃透。
《数学临阵磨枪》	查漏补缺·问题清零·从容应战 (推荐使用时间:考前20天)	
	本书是常用定理公式、基础知识的清单。最后阶段,大部分考生缺乏信心,感觉没复习完,本来会做的题目,因为紧张、压力,也容易出错。本书能帮助考生在考前查漏补缺,确保基础知识不丢分。	搭配《数学决胜冲刺6套卷》使用。上考场前,可以再次回忆、翻看本书。

从真题中你能够了解一个真实的考研数学,寻找考研数学的规律

真题是教育部考试中心一届又一届命题组老师们集体智慧的结晶,题目经典,又有规律可循。为了帮助广大考生能够在较短的时间内,准确理解和熟练掌握考研数学考试的出题方式和解题规律,全面提高解题能力,进而更好地驾驭考试,本书编写团队依据十余年的命题与阅卷经验,并结合二十多年的考研辅导和研究精华,精心编写了本书,以期起到帮助同学们提高综合分析和综合解题能力的作用。

历年来,研究生考试数学的知识点没有太大变化,并且考查的重难点也比较稳定,都是往年考试反复考查的内容,依据往年考题掌握了这些重难点,我们就等于成功了一半。练真题,反复揣摩是有效把握这些重难点的最佳途径。考生们可以思考考过的知识点会再从什么角度命题,如何与没有考过的知识点结合起来考查,进而复习没有考过的知识点,这就可以从深度、广度上全方位把握知识点了。因此,真题能够最有效地暴露我们的不足和复习误区,提供更有效的复习思路和策略,甚至可以说,真题就是最好的“辅导老师”,它告诉我们考试会考什么,怎么考,反过来又指导我们思考如何应对,也只有真题准确体现了考试所要求的能力和方

真题对大部分考生来说都是“陌生”的。真题命制科学,经过命题人的反复推敲,是市面上的练习题所无法比拟的。市面上的练习题难易适中,命制科学,贴近考试要求的很少。做真题,反复揣摩,能节省我们宝贵的复习时间,达到事半功倍的效果。紧紧抓住真题,在考试时也可以使我们做到从容应对。

本书共分三篇。第一篇给出最新的真题和解析,目的是让读者了解最新考题的结构形式和难易程度,方便复习备考;第二篇是历年的真题;第三篇是将真题按考点所属内容分类并进行解析。第三篇是本书的精华部分,各章编排如下:

1. 本章导读

设置本部分的目的是使考生明白此章的考试内容和考试重点,从而复习时目标明确。

2. 试题特点

本部分总结此类知识的历年考试出题规律,分析可能的出题点。

3. 考题详析

本部分对历年真题的题型进行归纳分类,总结各种题型的解题方法。这些解法均来自各

位专家的多年教学实践总结和长期命题阅卷经验。针对以往考生在解题过程中普遍存在的问题及常犯的错误,我们给出相应的注意事项,对每一道真题都给出解题思路分析,以便考生真正地理解和掌握解题方法。

4. 练习题

数学复习离不开做题,只有做适量的练习才能巩固所学的知识。为了使考生更好地巩固所学知识,提高实际解题能力,本书作者从历年其他卷别的试题中精心选取同类考题作为练习题,供考生练习,以便使考生在熟练掌握基本知识的基础上,能够轻松解答真题。同时,每道练习题都配备了详细的参考答案和解析,以便考生遇到疑难问题时能及时得到最详尽的指导。

建议考生在使用本书时不要就题论题,而是要多动脑筋,通过对题目的练习、比较、思考,总结并发现题目设置和解答的规律性。请大家一定要在今后的复习中,时刻想到将各个方面的知识融会贯通,做好串联和总结,以检验自己对问题的把握程度,真正掌握应试解题的金钥匙,从而迅速提高知识水平和应试能力,取得理想的分数。

使用本书的同时,也可以配合使用本书作者编写的《数学复习全书·基础篇》《数学基础过关 660 题》《数学复习全书》《数学强化通关 330 题》等,提高复习效率。

另外,为了更好地帮助同学们进行复习,“李永乐考研数学辅导团队”特在新浪微博上开设答疑专区,同学们在复习考研数学时遇到问题,均可在线留言,团队老师将尽心为你解答。

新浪微博:清华李永乐考研数学辅导团队



微信公众号:金榜时代考研



希望本书能对同学们的复习备考带来更大的帮助。对书中的不足之处,恳请读者批评指正。

祝同学们复习顺利,心想事成,考研成功!

编者

2021 年 1 月

第一篇 最新真题



2021 年全国硕士研究生招生考试数学(一)试题	1
2021 年全国硕士研究生招生考试数学(一)参考答案	5

第二篇 历年真题

2020 年全国硕士研究生招生考试数学(一)试题	15
2019 年全国硕士研究生招生考试数学(一)试题	19
2018 年全国硕士研究生招生考试数学(一)试题	22
2017 年全国硕士研究生招生考试数学(一)试题	25
2016 年全国硕士研究生招生考试数学(一)试题	28
2015 年全国硕士研究生招生考试数学(一)试题	31
2014 年全国硕士研究生招生考试数学(一)试题	34
2013 年全国硕士研究生招生考试数学(一)试题	37
2012 年全国硕士研究生招生考试数学(一)试题	40
2011 年全国硕士研究生招生考试数学(一)试题	43
2010 年全国硕士研究生招生考试数学(一)试题	46
2009 年全国硕士研究生招生考试数学(一)试题	49

第三篇 真题解析

第一部分 高等数学	53
第一章 函数、极限、连续	53
第二章 一元函数微分学	81
第三章 一元函数积分学	115
第四章 向量代数和空间解析几何	147
第五章 多元函数的微分学	148
第六章 重积分	166
第七章 曲线、曲面积分	184
第八章 无穷级数	199
第九章 常微分方程	215
第二部分 线性代数	224
第一章 行列式	224
第二章 矩阵	232
第三章 向量	246
第四章 线性方程组	259
第五章 特征值与特征向量	276
第六章 二次型	292
第三部分 概率论与数理统计	306
第一章 随机事件和概率	306
第二章 随机变量及其分布	310
第三章 多维随机变量及其分布	314
第四章 随机变量的数字特征	325
第五章 大数定律和中心极限定理	337
第六章 数理统计的基本概念	340
第七章 参数估计	344
第八章 假设检验	355

第一篇

最新真题

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

绝密 ★ 启用前

2021 年全国硕士研究生招生考试

数 学 (一)

(科目代码:301)

考生注意事项

1. 答题前,考生须在试题册指定位置上填写考生编号和考生姓名;在答题卡指定位置上填写报考单位、考生姓名和考生编号,并涂写考生编号信息点。
2. 选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上,非选择题的答案必须书写在答题卡指定位置的边框区域内,超出答题区域书写的答案无效;在草稿纸、试题册上答题无效。
3. 填(书)写部分必须使用黑色字迹签字笔书写,字迹工整,笔迹清楚;涂写部分必须使用 2B 铅笔填涂。
4. 考试结束,将答题卡、试题册和草稿纸按规定交回。

考生编号																				
考生姓名																				



一、选择题(1~10小题,每小题5分,共50分.下列每小题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.)

(1) 函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处

(A) 连续且取极大值.

(B) 连续且取极小值.

(C) 可导且导数等于零.

(D) 可导且导数不为零.

(2) 设函数 $f(x, y)$ 可微, 且 $f(x+1, e^x) = x(x+1)^2$, $f(x, x^2) = 2x^2 \ln x$, 则 $df(1, 1) =$

(A) $dx + dy$.

(B) $dx - dy$.

(C) dy .

(D) $-dy$.

(3) 设函数 $f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$ 在 $x = 0$ 处的 3 次泰勒多项式为 $ax + bx^2 + cx^3$, 则

(A) $a = 1, b = 0, c = -\frac{7}{6}$.

(B) $a = 1, b = 0, c = \frac{7}{6}$.

(C) $a = -1, b = -1, c = -\frac{7}{6}$.

(D) $a = -1, b = -1, c = \frac{7}{6}$.

(4) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 则 $\int_0^1 f(x) dx =$

(A) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \frac{1}{2n}$.

(B) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \frac{1}{n}$.

(C) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k-1}{2n}\right) \frac{1}{n}$.

(D) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{2n}\right) \frac{2}{n}$.

(5) 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 - (x_3 - x_1)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为

(A) 2, 0.

(B) 1, 1.

(C) 2, 1.

(D) 1, 2.

(6) 已知 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, 已知 $\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_2 - k\beta_1, \beta_3 = \alpha_3 - l_1\beta_1 - l_2\beta_2$, 若 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 两两相交, 则 l_1, l_2 依次为

(A) $\frac{5}{2}, \frac{1}{2}$.

(B) $-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}$.

(C) $\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}$.

(D) $-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}$.

(7) 设 A, B 为 n 阶实矩阵, 下列不成立的是

(A) $r \begin{pmatrix} A & O \\ O & A^T A \end{pmatrix} = 2r(A)$.

(B) $r \begin{pmatrix} A & AB \\ O & A^T \end{pmatrix} = 2r(A)$.

(C) $r \begin{pmatrix} A & BA \\ O & AA^T \end{pmatrix} = 2r(A)$.

(D) $r \begin{pmatrix} A & O \\ BA & A^T \end{pmatrix} = 2r(A)$.

(8) 设 A, B 为随机事件, 且 $0 < P(B) < 1$, 下列命题中为假命题的是

(A) 若 $P(A | B) = P(A)$, 则 $P(A | \bar{B}) = P(A)$.

(B) 若 $P(A | B) > P(A)$, 则 $P(\bar{A} | \bar{B}) > P(\bar{A})$.

(C) 若 $P(A | B) > P(A | \bar{B})$, 则 $P(A | B) > P(A)$.

(D) 若 $P(A | A \cup B) > P(\bar{A} | A \cup B)$, 则 $P(A) > P(B)$.

(9) 设 $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ 为来自总体 $N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$ 的简单随机样本, 令 $\theta = \mu_1 -$

$$\mu_2, \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i, \hat{\theta} = \bar{X} - \bar{Y}, \text{ 则}$$

(A) $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计, $D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}$.

(B) $\hat{\theta}$ 不是 θ 的无偏估计, $D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}$.

(C) $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计, $D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$.

(D) $\hat{\theta}$ 不是 θ 的无偏估计, $D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$.

(10) 设 $X_1, X_2, \dots, X_{16}$ 是来自总体 $N(\mu, 4)$ 的简单随机样本, 考虑假设检验问题: $H_0: \mu \leq 10, H_1: \mu > 10$, $\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数, 若该检验问题的拒绝域为 $W = \{\bar{X} \geq 11\}$, 其中 $\bar{X} =$

$$\frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} X_i, \text{ 则 } \mu = 11.5 \text{ 时, 该检验犯第二类错误的概率为}$$

(A) $1 - \Phi(0.5)$.

(B) $1 - \Phi(1)$.

(C) $1 - \Phi(1.5)$.

(D) $1 - \Phi(2)$.

二、填空题(11 ~ 16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.)

(11) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(12) 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 2e^t + t + 1, \\ y = 4(t-1)e^t + t^2 \end{cases}$ 确定, 则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(13) 欧拉方程 $x^2 y'' + xy' - 4y = 0$ 满足条件 $y(1) = 1, y'(1) = 2$ 的解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}.$

(14) 设 Σ 为空间区域 $\{(x, y, z) | x^2 + 4y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 2\}$ 表面的外侧, 则曲面积分 $\iint_{\Sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + z dx dy = \underline{\hspace{2cm}}.$

(15) 设 $A = [a_{ij}]$ 为 3 阶矩阵, A_{ij} 为代数余子式, 若 A 的每行元素之和均为 2, 且 $|A| = 3$, 则 $A_{11} + A_{21} + A_{31} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(16) 甲、乙两个盒子中有 2 个红球和 2 个白球, 先从甲盒中任取一球, 观察颜色后放入乙盒, 再从乙盒中任取一球, 令 X, Y 分别表示从甲盒和乙盒中取到的红球的个数, 则 X 与 Y 的相关系数为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

三、解答题(17 ~ 22 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(17) (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \int_0^x e^{t^2} dt}{e^x - 1} - \frac{1}{\sin x} \right).$



(18) (本题满分 12 分)

设 $u_n(x) = e^{-nx} + \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} (n = 1, 2, \dots)$, 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域及和函数.

(19) (本题满分 12 分)

已知曲线 $C: \begin{cases} x^2 + 2y^2 - z = 6, \\ 4x + 2y + z = 30, \end{cases}$ 求 C 上的点到 xOy 坐标面距离的最大值.

(20) (本题满分 12 分)

设 $D \subset \mathbf{R}^2$ 是有界单连通闭区域, $I(D) = \iint_D (4 - x^2 - y^2) dx dy$ 取得最大值的积分区域记为 D_1 .

(I) 求 $I(D_1)$ 的值;

(II) 计算 $\int_{\partial D_1} \frac{(xe^{x^2+y^2} + y)dx + (4ye^{x^2+y^2} - x)dy}{x^2 + 4y^2}$, 其中 ∂D_1 是 D_1 的正向边界.

(21) (本题满分 12 分)

已知 $A = \begin{bmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{bmatrix}$.

(I) 求正交矩阵 P , 使得 $P^T A P$ 为对角矩阵;

(II) 求正定矩阵 C , 使得 $C^2 = (a+3)E - A$.

(22) (本题满分 12 分)

在区间 $(0, 2)$ 上随机取一点, 将该区间分成两段, 较短一段的长度记为 X , 较长一段的长度记为 Y . 令 $Z = \frac{Y}{X}$,

(I) 求 X 的概率密度;

(II) 求 Z 的概率密度;

(III) 求 $E\left(\frac{X}{Y}\right)$.

2021 年全国硕士研究生招生考试

数学(一) 参考答案

一、选择题

(1)【答案】 D.

【解析】 由导数定义知

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

故应选(D).

(2)【答案】 C.

【解析】 方程 $f(x+1, e^x) = x(x+1)^2$ 两边对 x 求导得

$$f'_1(x+1, e^x) + e^x f'_2(x+1, e^x) = (x+1)^2 + 2x(x+1)$$

令 $x=0$, 有 $f'_1(1, 1) + f'_2(1, 1) = 1$ ①方程 $f(x, x^2) = 2x^2 \ln x$ 两边对 x 求导得

$$f'_1(x, x^2) + 2x f'_2(x, x^2) = 4x \ln x + 2x$$

令 $x=1$, 有 $f'_1(1, 1) + 2f'_2(1, 1) = 2$ ②

解 ①, ② 的联立方程组, 得

$$f'_1(1, 1) = 0, f'_2(1, 1) = 1$$

因而 $df(1, 1) = f'_1(1, 1)dx + f'_2(1, 1)dy = dy$.

(3)【答案】 A.

【解析】 (方法一) 直接法 由泰勒公式知

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + o(x^2)$$

$$\text{则 } \frac{\sin x}{1+x^2} = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)(1 - x^2 + o(x^2)) = x - \frac{7}{6}x^3 + o(x^3).$$

所以 $a=1, b=0, c=-\frac{7}{6}$, 故选(A).(方法二) 排除法 由于 $f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$ 是奇函数, 则其在 $x=0$ 处的泰勒展开式中只有奇次项. 因此, $b=0$, 故排除(C)(D) 选项. 此时

$$f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2} = x + cx^3 + o(x^3)$$

$$\text{即 } \frac{\sin x}{1+x^2} - x = cx^3 + o(x^3).$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



当 $x \in (0, \delta)$ 时, $\frac{\sin x}{1+x^2} - x < 0$, 则 $c < 0$, 从而排除(B), 故应选(A).

(4) 【答案】 B.

【解析】 (方法一) 直接法 将区间 $[0, 1]$ n 等分, 则 $\Delta x_k = \frac{1}{n}$, 第 k 个子区间为 $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$,

由于

$$\frac{k-1}{n} = \frac{2k-2}{2n} < \frac{2k-1}{2n} < \frac{2k}{2n} = \frac{k}{n}$$

$$\text{则 } \frac{2k-1}{2n} \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right].$$

由定积分定义知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \frac{1}{n} = \int_0^1 f(x) dx$$

故应选(B).

(方法二) 排除法 取 $f(x) \equiv 1$, 则 $\int_0^1 f(x) dx = 1$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \frac{1}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \neq 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k-1}{2n}\right) \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n \cdot \frac{1}{n} = 2 \neq 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{2n}\right) \frac{2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n \cdot \frac{2}{n} = 4 \neq 1$$

排除(A)(C)(D) 选项, 故应选(B).

(5) 【答案】 B.

【解析】 因为 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, 所以 $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 + x_3 \\ y_3 = -x_1 + x_3 \end{cases}$ 不是坐标变换.

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_1^2 + 2x_1x_3 - x_3^2$$

$$= 2x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$$

由 ① 配方法 $f = 2\left[x_2^2 + x_2(x_1 + x_3) + \frac{1}{4}(x_1 + x_3)^2\right] - \frac{1}{2}(x_1 + x_3)^2 + 2x_1x_3$

$$= 2\left(x_2 + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 - \frac{1}{2}(x_1 - x_3)^2$$

或 ② 特征值法 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 0 & -1 - \lambda \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - 2 & -2 \\ -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda + 1)(\lambda^2 - 3\lambda)$$

可得特征值为 3, -1, 0. 都有 $p = 1, q = 1$, 故选 (B).

(6) 【答案】 A.

【解析】 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$

$\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_2 - k\beta_1, \beta_3 = \alpha_3 - l_1\beta_1 - l_2\beta_2.$

由 Schmidt 正交化公式

$k = \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} = \frac{2}{2} = 1, \beta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix},$

$l_1 = \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} = \frac{5}{2},$

$l_2 = \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$

所以选 (A).

(7) 【答案】 C.

【解析】 如果 A 可逆, 4 个选项均正确, 因此不正确一定发生在 A 不可逆时.

利用分块矩阵 $r \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} = r(A) + r(B)$ 和 $r(A) = r(A^T A)$ 易知 (A) 肯定正确.

而令 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, 则由 $\begin{bmatrix} A & BA \\ O & AA^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 可知 (C) 不正确.

是否做过 (2018 年) 的考题?

$r(A, AB) = r(A), r(A, BA) \geq r(A).$

(8) 【答案】 D.

【解析】 (方法一) (A) $P(A | B) = P(A)$ 即 A, B 独立, 则 $A, \bar{B}$ 也独立, $P(A | \bar{B}) = P(A)$ 成立.

(B) $P(A | B) > P(A)$ 对任意事件 A 成立, 即有 $0 < P(\bar{B}) < 1$ 时成立 $P(\bar{A} | \bar{B}) > P(\bar{A}).$

(C) $P(A | B) > P(A | \bar{B}) = \frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A) - P(AB)}{1 - P(B)},$ 即 $\frac{P(AB)}{P(B)} > \frac{P(A) - P(AB)}{1 - P(B)},$

也就有 $P(AB) - P(AB)P(B) > P(B)P(A) - P(B)P(AB),$ 即 $P(AB) > P(A)P(B),$

$\frac{P(AB)}{P(B)} > P(A), P(A | B) > P(A)$ 成立.

(A)(B)(C) 三个均非假命题, 答案应选 (D).

(方法二) (D) $P(A | A \cup B) > P(\bar{A} | A \cup B)$ 即 $\frac{P(A)}{P(A \cup B)} > \frac{P(\bar{A})}{P(A \cup B)}$

等价于 $P(A) > P(B) - P(AB).$

这并不能推出 $P(A) > P(B),$ 答案选 (D).

(方法三) (D) $P(A | A \cup B) > P(\bar{A} | A \cup B),$ 令 $A = B,$



$$P(A | A \cup B) = P(A | A) = 1 > P(\bar{A} | A) = 0$$

即(D) 给条件成立, 但结论 $P(A) > P(B) = P(A)$ 不成立, 选(D).

(9)【答案】 C.

【解析】 $E(\hat{\theta}) = E(\bar{X} - \bar{Y}) = E(\bar{X}) - E(\bar{Y}) = \mu_1 - \mu_2 = \theta$.

$$\begin{aligned} D(\hat{\theta}) &= D(\bar{X} - \bar{Y}) = D\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - Y_i)\right] = \frac{1}{n^2} \left[\sum_{i=1}^n D(X_i - Y_i) \right] \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n [D(X_i) + D(Y_i) - 2\text{Cov}(X_i, Y_i)] \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho}{n} \end{aligned}$$

答案选(C).

(10)【答案】 B.

【解析】 检验犯第二类错误: 接受实际不真的假设 H_0 所犯的误差 β ,

$$X \sim N(\mu, 4), \text{ 即 } \bar{X} \sim N\left(11.5, \frac{1}{4}\right)$$

$$\beta = P\{\bar{X} \leq 11\} = P\left\{\frac{\bar{X} - 11.5}{\sqrt{\frac{1}{4}}} \leq \frac{11 - 11.5}{\sqrt{\frac{1}{4}}}\right\} = P\left\{\frac{\bar{X} - 11.5}{\frac{1}{2}} \leq -1\right\} = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1)$$

答案选(B).

二、填空题

(11)【答案】 $\frac{\pi}{4}$.

【解析】 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + (x+1)^2} = \arctan(x+1) \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$.

(12)【答案】 $\frac{2}{3}$.

【解析】 $\frac{dy}{dx} = \frac{4e^t + 4(t-1)e^t + 2t}{2e^t + 1} = 2t$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}(2t) \cdot \frac{dt}{dx} = 2 \cdot \frac{1}{2e^t + 1},$$

$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=0} = \frac{2}{3}.$$

(13)【答案】 x^2 .

【解析】 作换元 $x = e^t$, 则有 $xy' = \frac{dy}{dt}$, $x^2y'' = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$, 原方程可化为

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + \frac{dy}{dt} - 4y = 0, \text{ 即 } y''(t) - 4y(t) = 0$$

这是二阶常系数齐次线性微分方程, 其特征方程为 $r^2 - 4 = 0$, 特征根为 $r_1 = 2, r_2 = -2$.

该方程的通解为 $y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} = C_1 x^2 + \frac{C_2}{x^2}$.



代入初值条件 $y(1) = 1, y'(1) = 2$ 可得 $C_1 = 1, C_2 = 0$, 故 $y = x^2$.

(14)【答案】 4π .

【解析】 用高斯公式

$$\iiint_{\Sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + z dx dy = \iiint_{\Omega} (2x + 2y + 1) dx dy dz$$

由于 Ω 关于 xOz 面及 yOz 面对称, 则

$$\iiint_{\Omega} 2x dx dy dz = \iiint_{\Omega} 2y dx dy dz = 0$$

$$\text{有 } \iiint_{\Sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + z dx dy = \int_0^2 dz \iint_{x^2+4y^2 \leq 4} dx dy = 4\pi.$$

(15)【答案】 $\frac{3}{2}$.

【解析】 $A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$, $A_{11} + A_{21} + A_{31}$ 是 A^* 第 1 行元素之和.

$$\text{由 } A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ 有 } A^* \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = A^* A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = |A| E \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \text{ 所以}$$

$$A^* \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}, \text{ 即 } A_{11} + A_{21} + A_{31} = \frac{3}{2}.$$

(16)【答案】 $\frac{1}{5}$.

【解析】 (方法一)

X	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} P\{Y=0\} &= P\{X=0\}P\{Y=0|X=0\} + P\{X=1\}P\{Y=0|X=1\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$P\{Y=1\} = 1 - P\{Y=0\} = \frac{1}{2}$$

所以

Y	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

, 进一步有

	Y	0	1	
X	0			0.5
	1			0.5
		0.5	0.5	



微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$P\{X=0, Y=0\} = P\{X=0\}P\{Y=0 | X=0\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = 0.3$$

故

$X \backslash Y$	0	1
0	0.3	0.5
1		0.5
	0.5	0.5

进一步有

$X \backslash Y$	0	1
0	0.3	0.2
1	0.2	0.3
	0.5	0.5

$$\text{现求 } \rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)} \sqrt{D(Y)}} = \frac{E(XY) - E(X) \cdot E(Y)}{\sqrt{D(X)} \sqrt{D(Y)}}$$

$$E(X) = E(Y) = 0.5, E(XY) = 0.3$$

$$D(X) = D(Y) = 0.5 \times 0.5 = 0.25$$

$$\text{总之 } \rho = \frac{0.3 - 0.25}{0.5 \cdot 0.5} = \frac{1}{5}.$$

(方法二) $\rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)} \sqrt{D(Y)}} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)} \sqrt{D(Y)}}$, 显然 X, Y, XY 取值均为 0 和 1.

$$\text{这就有 } E(X) = P\{X=1\} = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= P\{Y=1\} = P\{X=0\}P\{Y=1 | X=0\} + P\{X=1\}P\{Y=1 | X=1\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$E(XY) = P\{XY=1\} = P\{X=1, Y=1\} = P\{X=1\}P\{Y=1 | X=1\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$

$$D(X) = D(Y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\rho = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)} \sqrt{D(Y)}} = \frac{0.3 - 0.25}{0.25} = \frac{1}{5}.$$

三、解答题

(17)【解】 (方法一) 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \left(1 + \int_0^x e^{t^2} dt\right) - (e^x - 1)}{(e^x - 1) \sin x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \left(1 + \int_0^x e^{t^2} dt\right) - (e^x - 1)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \left(1 + \int_0^x e^{t^2} dt\right) + \sin x \cdot e^{x^2} - e^x}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \cos x \int_0^x e^{t^2} dt + \sin x \cdot e^{x^2} + 1 - e^x}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{2x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \int_0^x e^{t^2} dt}{2x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot e^{x^2}}{2x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{2x}$$

$$= 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(方法二) 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{e^x - 1} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - (e^x - 1)}{(e^x - 1) \sin x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - (e^x - 1)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2}}{1} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^x}{2x}$$

$$= 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - e^x}{2}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(18)【解】 设 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = S_1(x) + S_2(x)$, 则

对 $S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$, 当 $e^{-x} < 1$ 即 $x > 0$ 时, 该级数收敛, 且

$$S_1(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-x} - e^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{1}{e^x - 1}$$

对 $S_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$, 因为 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)}{1} = 1$, 所以其收敛半径 $R = 1$, 当 $x = \pm 1$

时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^{n+1}}{n(n+1)}$ 均收敛, 因此该级数的收敛域为 $[-1, 1]$.

故所求级数的收敛域为 $(0, 1]$.

$$\text{又 } S_2'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, S_2''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x},$$

$$\text{从而有 } S_2'(x) = \int_0^x S_2''(t) dt + S_2'(0) = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x),$$

$$S_2(x) = \int_0^x S_2'(t) dt + S_2(0) = \int_0^x -\ln(1-t) dt = (1-x)\ln(1-x) + x, x \in (0, 1),$$

$$\text{当 } x = 1 \text{ 时, } S_2(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

$$\text{因此, } S(x) = S_1(x) + S_2(x) = \frac{1}{e^x - 1} + (1-x)\ln(1-x) + x, x \in (0, 1),$$

$$S(1) = S_1(1) + S_2(1) = \frac{1}{e-1} + 1 = \frac{e}{e-1}.$$

综上所述:

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^x - 1} + (1-x)\ln(1-x) + x, & x \in (0, 1) \\ \frac{e}{e-1}, & x = 1 \end{cases}$$



(19)【分析】 曲线 C 上的点到 xOy 面的距离为 $|z|$, 利用等效性, 目标函数取为 z^2 .

【解】 利用拉格朗日乘数法

$$\text{令 } L(x, y, z, \lambda, \mu) = z^2 + \lambda(x^2 + 2y^2 - z - 6) + \mu(4x + 2y + z - 30)$$

$$\begin{cases} L'_x = 2\lambda x + 4\mu = 0 & \text{①} \\ L'_y = 4\lambda y + 2\mu = 0 & \text{②} \\ L'_z = 2z - \lambda + \mu = 0 & \text{③} \\ L'_\lambda = x^2 + 2y^2 - z - 6 = 0 & \text{④} \\ L'_\mu = 4x + 2y + z - 30 = 0 & \text{⑤} \end{cases}$$

由 ①, ② 得 $\lambda(x - 4y) = 0$.

若 $\lambda = 0$, 则 $\mu = 0$, 代入 ③ 得 $z = 0$ 再代入 ④, ⑤, 得

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 6 = 0 \\ 4x + 2y - 30 = 0 \end{cases}$$

此方程组无解.

若 $x - 4y = 0$, 即 $x = 4y$ 代入 ④, ⑤ 得

$$\begin{cases} 18y^2 - z - 6 = 0 \\ 18y + z - 30 = 0 \end{cases}$$

可解得 $\begin{cases} y = 1, \\ z = 12 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} y = -2, \\ z = 66. \end{cases}$

可见, 所求的最大距离为 66.

(20)【解】 (I) 由二重积分的几何意义, 当且仅当被积函数 $4 - x^2 - y^2$ 在 D 上非负时, $I(D)$ 达到最大, 因而 $D_1: x^2 + y^2 \leq 4$.

$$\text{此时 } I(D_1) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4 - r^2) \cdot r dr = 8\pi.$$

$$(II) \text{ 令 } P = \frac{xe^{x^2+4y^2} + y}{x^2 + 4y^2}, Q = \frac{4ye^{x^2+4y^2} - x}{x^2 + 4y^2}.$$

当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{(8xye^{x^2+4y^2} - 1)(x^2 + 4y^2) - 2x(4ye^{x^2+4y^2} - x)}{(x^2 + 4y^2)^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{(8xye^{x^2+4y^2} + 1)(x^2 + 4y^2) - 8y(xe^{x^2+4y^2} + y)}{(x^2 + 4y^2)^2}$$

$$\text{显然 } \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

挖去奇点 $(0, 0)$. 令 $L: x^2 + 4y^2 = \epsilon^2$ (ϵ^2 足够小), 取顺时针方向

$$\text{有 } \int_{\partial D_1} Pdx + Qdy = \iint_{D_1'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy - \frac{1}{\epsilon^2} \oint_L (xe^{\epsilon^2} + y)dx + (4ye^{\epsilon^2} - x)dy$$

$$= -\frac{1}{\epsilon^2} \oint_L (xe^{\epsilon^2} + y)dx + (4ye^{\epsilon^2} - x)dy$$

$$\stackrel{\text{格林公式}}{=} \frac{1}{\epsilon^2} \iint_D -2dxdy = -\frac{2}{\epsilon^2} \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot \frac{\epsilon}{2} = -\pi$$

其中 $D_1' = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, x^2 + 4y^2 > \epsilon^2\}$, $D = \{(x, y) \mid x^2 + 4y^2 \leq \epsilon^2\}$.



$$(21) \text{【解】} (I) A = \begin{bmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - a & -1 & 1 \\ -1 & \lambda - a & 1 \\ 1 & 1 & \lambda - a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - a + 1 & 0 & \lambda - a + 1 \\ -1 & \lambda - a & 1 \\ 1 & 1 & \lambda - a \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda - a + 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - a & 2 \\ 1 & 1 & \lambda - a - 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - a + 1)^2 (\lambda - a - 2) \end{aligned}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

A 的特征值为: $a-1, a-1, a+2$.

$\lambda = a-1$ 时,

$$(a-1)E - A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 = (-1, 1, 0)^T, \alpha_2 = (1, 1, 2)^T$$

$\lambda = a+2$ 时,

$$(a+2)E - A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_3 = (-1, -1, 1)^T$$

$$\text{单位化得 } \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{令 } P = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \text{ 则 } P^T A P = P^{-1} A P = \Lambda = \begin{bmatrix} a-1 & & \\ & a-1 & \\ & & a+2 \end{bmatrix}.$$

(II) 记 $B = (a+3)E - A$, B 是对称矩阵. 因 A 的特征值是 $a-1, a-1, a+2$, 知 B 的特征值 $4, 4, 1$, 从而 B 正定.

$$P^T B P = P^T (a+3)E P - P^T A P$$

$$= \begin{bmatrix} a+3 & & \\ & a+3 & \\ & & a+3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a-1 & & \\ & a-1 & \\ & & a+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & & \\ & 4 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^T B P = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$



$$B = P \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{bmatrix} P^T P \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{bmatrix} P^T$$

$$C = P \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{bmatrix} P^T$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

【评注】 当 $\lambda = a - 1$, 求特征向量时, 可用常规的 $(1, 0), (0, 1)$ 来赋值, 则 $\alpha_1 = (-1, 1, 0)^T$, $\alpha_2 = (1, 0, 1)^T$. 此时 α_1, α_2 不正交, 需进一步用正交化来处理.

(22) 【解】 (I) $X + Y = 2, X < Y, X \sim U(0, 1)$,

故 $X \sim f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

(II) $X + Y = 2, Y = 2 - X, Z = \frac{Y}{X} = \frac{2 - X}{X}$,

$F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\left\{\frac{2 - X}{X} \leq z\right\}$.

① $z < 1, F_Z(z) = 0$;

② $1 \leq z, F_Z(z) = P\left\{X \geq \frac{2}{z+1}\right\} = 1 - \frac{2}{z+1}$,

总之 $F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 1, \\ 1 - \frac{2}{z+1}, & z \geq 1, \end{cases} f_Z(z) = F'_Z(z) = \begin{cases} \frac{2}{(z+1)^2}, & z \geq 1, \\ 0, & z < 1, \end{cases}$

(III) $E\left(\frac{X}{Y}\right) = E\left(\frac{X}{2-X}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{2-x} f_X(x) dx = \int_0^1 \frac{x}{2-x} dx = 2 \ln 2 - 1$.

第二篇

历年真题

2020 年全国硕士研究生招生考试 数学(一) 试题

一、选择题(1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每小题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.)

(1) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时,下列无穷小量中最高阶是

(A) $\int_0^x (e^{t^2} - 1) dt.$

(B) $\int_0^x \ln(1 + \sqrt{t^3}) dt.$

(C) $\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt.$

(D) $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t} dt.$

P74, 14 题

(2) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内有定义,且 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 则

(A) 当 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = 0$, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导.

(B) 当 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导.

(C) 当 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导时, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = 0$.

(D) 当 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导时, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$.

P82, 3 题

(3) 设函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微, $f(0, 0) = 0$, $\mathbf{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right) \Big|_{(0,0)}$, 非零向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{n}$ 垂直, 则

(A) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|\mathbf{n} \cdot (x, y, f(x, y))|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 存在. (B) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|\mathbf{n} \times (x, y, f(x, y))|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 存在.

(C) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|\mathbf{a} \cdot (x, y, f(x, y))|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 存在. (D) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|\mathbf{a} \times (x, y, f(x, y))|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 存在.

P151, 10 题

(4) 设 R 为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径, r 是实数, 则

(A) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 发散时, $|r| \geq R$.

(B) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 收敛时, $|r| \leq R$.



(C) 当 $|r| \geq R$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 发散.

(D) 当 $|r| \leq R$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 收敛.

P204, 7 题

(5) 若矩阵 A 经初等列变换化成 B , 则

(A) 存在矩阵 P , 使得 $PA = B$.

(B) 存在矩阵 P , 使得 $BP = A$.

(C) 存在矩阵 P , 使得 $PB = A$.

(D) 方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解.

P233, 3 题

(6) 已知直线 $L_1: \frac{x-a_1}{a_1} = \frac{y-b_1}{b_1} = \frac{z-c_1}{c_1}$ 与直线 $L_2: \frac{x-a_2}{a_2} = \frac{y-b_2}{b_2} = \frac{z-c_2}{c_2}$ 相交于一点, 记向量

$$\alpha_i = \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{bmatrix}, i = 1, 2, 3, \text{ 则}$$

(A) α_1 可由 α_2, α_3 线性表示.

(B) α_2 可由 α_1, α_3 线性表示.

(C) α_3 可由 α_1, α_2 线性表示.

(D) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

P247, 3 题

(7) 设 A, B, C 为三个随机事件, 且 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$, $P(AB) = 0$, $P(AC) = P(BC) = \frac{1}{12}$, 则 A, B, C 中恰有一个事件发生的概率为

(A) $\frac{3}{4}$.

(B) $\frac{2}{3}$.

(C) $\frac{1}{2}$.

(D) $\frac{5}{12}$.

P308, 7 题

(8) 设 $X_1, X_2, \dots, X_{100}$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 其中 $P\{X=0\} = P\{X=1\} = \frac{1}{2}$, $\Phi(x)$ 表

示标准正态分布函数, 则利用中心极限定理可得 $P\left\{\sum_{i=1}^{100} X_i \leq 55\right\}$ 的近似值为

(A) $1 - \Phi(1)$.

(B) $\Phi(1)$.

(C) $1 - \Phi(0.2)$.

(D) $\Phi(0.2)$.

P337, 1 题

二、填空题 (9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.)

(9) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right] = \underline{\hspace{2cm}}.$

P58, 6 题

(10) 设 $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 + 1}, \\ y = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}), \end{cases}$ 则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

P87, 11 题

(11) 若函数 $f(x)$ 满足 $f''(x) + af'(x) + f(x) = 0 (a > 0)$, $f(0) = m$, $f'(0) = n$, 则 $\int_0^{+\infty} f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

P138, 20 题

(12) 设函数 $f(x, y) = \int_0^{xy} e^{t^2} dt$, 则 $\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{(1,1)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

P152, 11 题



(13) 行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

P227, 4 题

(14) 设 X 服从区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的均匀分布, $Y = \sin X$, 则 $\text{Cov}(X, Y) = \underline{\hspace{2cm}}.$

P334, 14 题

三、解答题(15 ~ 23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

求函数 $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - xy$ 的极值.

P157, 18 题

(16) (本题满分 10 分)

计算曲线积分 $I = \int_L \frac{4x-y}{4x^2+y^2} dx + \frac{x+y}{4x^2+y^2} dy$, 其中 L 为 $x^2 + y^2 = 2$, 方向为逆时针方向.

P189, 10 题

(17) (本题满分 10 分)

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, (n+1)a_{n+1} = \left(n + \frac{1}{2}\right)a_n$.

证明: 当 $|x| < 1$ 时, 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 收敛, 并求其和函数.

P209, 15 题

(18) (本题满分 10 分)

设 Σ 为曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$) 下侧, $f(x)$ 为连续函数. 计算

$$I = \iint_{\Sigma} [xf(xy) + 2x - y] dydz + [yf(xy) + 2y + x] dzdx + [zf(xy) + z] dxdy$$

P197, 21 题

(19) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上具有连续导数, $f(0) = f(2) = 0, M = \max_{x \in [0, 2]} \{|f(x)|\}$, 证明:

(I) 存在 $\xi \in (0, 2)$, 使得 $|f'(\xi)| \geq M$.

(II) 若对任意的 $x \in (0, 2)$, $|f'(x)| \leq M$, 则 $M = 0$.

P109, 28 题



(20) (本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$ 经正交变换 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ 化为二次型 $g(y_1, y_2) =$

$ay_1^2 + 4y_1y_2 + by_2^2$, 其中 $a \geq b$.

(I) 求 a, b 值.

(II) 求正交矩阵 Q .

P299, 12 题

(21) (本题满分 11 分)

设 A 为二阶矩阵, $P = [\alpha, A\alpha]$, 其中 α 是非零向量且不是 A 的特征向量.

(I) 证明 P 为可逆矩阵.

(II) 若 $A^2\alpha + A\alpha - 6\alpha = 0$, 求 $P^{-1}AP$, 并判断 A 是否相似于对角矩阵.

P284, 9 题

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量 X_1, X_2, X_3 相互独立, 其中 X_1 与 X_2 均服从标准正态分布, X_3 的概率分布为

$$P\{X_3 = 0\} = P\{X_3 = 1\} = \frac{1}{2}, Y = X_3X_1 + (1 - X_3)X_2.$$

(I) 求二维随机变量 (X_1, Y) 的分布函数, 结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示.

(II) 证明随机变量 Y 服从标准正态分布.

P319, 8 题

(23) (本题满分 11 分)

设某种元件的使用寿命 T 的分布函数为

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-(\frac{t}{\theta})^m}, & t \geq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 θ, m 为参数且大于零.

(I) 求概率 $P\{T > t\}$ 与 $P\{T > s+t \mid T > s\}$, 其中 $s > 0, t > 0$.

(II) 任取 n 个这种元件做寿命试验, 测得它们的寿命分别为 $t_1, t_2, \dots, t_n$, 若 m 已知, 求 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}$.

P351, 9 题



2019 年全国硕士研究生招生考试 数学(一) 试题

一、选择题(1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每小题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.)

(1) 当 $x \rightarrow 0$ 时,若 $x - \tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小,则 $k =$

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. P73, 13 题

(2) 设函数 $f(x) = \begin{cases} x|x|, & x \leq 0, \\ x \ln x, & x > 0, \end{cases}$ 则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的

- (A) 可导点,极值点. (B) 不可导点,极值点.
(C) 可导点,非极值点. (D) 不可导点,非极值点. P94, 17 题

(3) 设 $\{u_n\}$ 是单调增加的有界数列,则下列级数中收敛的是

- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$. (B) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{u_n}$.
(C) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$. (D) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1}^2 - u_n^2)$. P201, 4 题

答案对应的
页码与题号

(4) 设函数 $Q(x, y) = \frac{x}{y^2}$, 如果对上半平面($y > 0$) 内的任意有向光滑封闭曲线 C 都有 $\oint_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$, 那么函数 $P(x, y)$ 可取为

- (A) $y - \frac{x^2}{y^3}$. (B) $\frac{1}{y} - \frac{x^2}{y^3}$. (C) $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$. (D) $x - \frac{1}{y}$. P188, 9 题

(5) 设 A 是 3 阶实对称矩阵, E 是 3 阶单位矩阵. 若 $A^2 + A = 2E$, 且 $|A| = 4$, 则二次型 $x^T A x$ 的规范形为

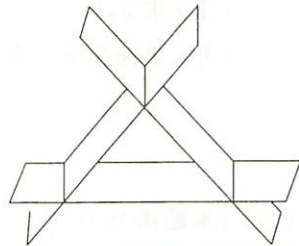
- (A) $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$. (B) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.
(C) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$. (D) $-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$. P299, 11 题

(6) 如图所示, 有 3 张平面两两相交, 交线相互平行, 它们的方程

$$a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z = d_i (i = 1, 2, 3)$$

组成的线性方程组的系数矩阵和增广矩阵分别记为 $A, \bar{A}$, 则

- (A) $r(A) = 2, r(\bar{A}) = 3$.
(B) $r(A) = 2, r(\bar{A}) = 2$.
(C) $r(A) = 1, r(\bar{A}) = 2$.
(D) $r(A) = 1, r(\bar{A}) = 1$. P270, 12 题



(7) 设 A, B 为随机事件, 则 $P(A) = P(B)$ 的充分必要条件是

- (A) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. (B) $P(AB) = P(A)P(B)$.
(C) $P(A\bar{B}) = P(B\bar{A})$. (D) $P(AB) = P(\bar{A}\bar{B})$. P308, 6 题



(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且都服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P\{|X - Y| < 1\}$

(A) 与 μ 无关, 而与 σ^2 有关.

(B) 与 μ 有关, 而与 σ^2 无关.

(C) 与 μ, σ^2 都有关.

(D) 与 μ, σ^2 都无关.

P312, 7 题

二、填空题 (9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.)

(9) 设函数 $f(u)$ 可导, $z = f(\sin y - \sin x) + xy$, 则 $\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\cos y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} =$ _____.

P151, 9 题

(10) 微分方程 $2yy' - y^2 - 2 = 0$ 满足条件 $y(0) = 1$ 的特解 $y =$ _____.

P216, 5 题

(11) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^n$ 在 $(0, +\infty)$ 内的和函数 $S(x) =$ _____.

P208, 14 题

(12) 设 Σ 为曲面 $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4 (z \geq 0)$ 的上侧, 则 $\iint_{\Sigma} \sqrt{4 - x^2 - 4z^2} dx dy =$ _____.

P197, 20 题

(13) 设 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 为三阶矩阵. 若 α_1, α_2 线性无关, 且 $\alpha_3 = -\alpha_1 + 2\alpha_2$, 则线性方程组 $Ax = 0$ 的通解为 _____.

P260, 2 题

(14) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ $F(x)$ 为 X 的分布函数, $E(X)$ 为 X 的

数学期望, 则 $P\{F(X) > E(X) - 1\} =$ _____.

P331, 11 题

三、解答题 (15 ~ 23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y' + xy = e^{-\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(0) = 0$ 的特解.

(I) 求 $y(x)$;

(II) 求曲线 $y = y(x)$ 的凹凸区间及拐点.

P217, 6 题

(16) (本题满分 10 分)

设 a, b 为实数, 函数 $z = 2 + ax^2 + by^2$ 在点 $(3, 4)$ 处的方向导数中, 沿方向 $l = -3i - 4j$ 的方向导数最大, 最大值为 10.

(I) 求 a, b ;

(II) 求曲面 $z = 2 + ax^2 + by^2 (z \geq 0)$ 的面积.

P163, 24 题

(17) (本题满分 10 分)

求曲线 $y = e^{-x} \sin x (x \geq 0)$ 与 x 轴之间图形的面积.

P141, 23 题

(18) (本题满分 10 分)

设 $a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx (n = 0, 1, 2, \dots)$.

(I) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 且 $a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2} (n = 2, 3, \dots)$;

(II) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$.

P64, 9 题

(19) (本题满分 10 分)

设 Ω 是由锥面 $x^2 + (y-z)^2 = (1-z)^2 (0 \leq z \leq 1)$ 与平面 $z = 0$ 围成的锥体, 求 Ω 的形心坐标.

P183, 11 题

(20) (本题满分 11 分)

设向量组 $\alpha_1 = (1, 2, 1)^T, \alpha_2 = (1, 3, 2)^T, \alpha_3 = (1, a, 3)^T$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一组基, $\beta = (1, 1, 1)^T$, 在这组基下的坐标为 $(b, c, 1)^T$.

(I) 求 a, b, c 的值;

(II) 证明 $\alpha_2, \alpha_3, \beta$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一组基, 并求 $\alpha_2, \alpha_3, \beta$ 到 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的过渡矩阵.

P257, 10 题

(21) (本题满分 11 分)

已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ 与 $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}$ 相似.

(I) 求 x, y ;

(II) 求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = B$.

P283, 8 题

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 服从参数为 1 的指数分布, Y 的概率分布为 $P\{Y = -1\} = p, P\{Y = 1\} = 1 - p, (0 < p < 1)$, 令 $Z = XY$.

(I) 求 Z 的概率密度;

(II) p 为何值时, X 与 Z 不相关?

(III) X 与 Z 是否相互独立?

P315, 3 题

(23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \sigma^2) = \begin{cases} \frac{A}{\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x \geq \mu \\ 0, & x < \mu \end{cases}$$

其中 μ 是已知参数, $\sigma > 0$ 是未知参数, A 是常数. $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

(I) 求 A ;

(II) 求 σ^2 的最大似然估计量.

P350, 8 题



2018 年全国硕士研究生招生考试 数学(一) 试题

一、选择题(1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每小题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.)

(1) 下列函数中,在 $x=0$ 处不可导的是

(A) $f(x) = |x| \sin |x|$.

(B) $f(x) = |x| \sin \sqrt{|x|}$.

(C) $f(x) = \cos |x|$.

(D) $f(x) = \cos \sqrt{|x|}$.

P82, 2 题

(2) 过点 $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, 且与曲面 $z = x^2 + y^2$ 相切的平面为

(A) $z = 0$ 与 $x + y - z = 1$.

(B) $z = 0$ 与 $2x + 2y - z = 2$.

(C) $x = y$ 与 $x + y - z = 1$.

(D) $x = y$ 与 $2x + 2y - z = 2$.

P165, 27 题

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+3}{(2n+1)!} =$

(A) $\sin 1 + \cos 1$.

(B) $2\sin 1 + \cos 1$.

(C) $2\sin 1 + 2\cos 1$.

(D) $2\sin 1 + 3\cos 1$.

P208, 13 题

(4) 设 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx$, $N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx$, $K = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sqrt{\cos x}) dx$, 则

(A) $M > N > K$.

(B) $M > K > N$.

(C) $K > M > N$.

(D) $K > N > M$.

P120, 7 题

(5) 下列矩阵中,与矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 相似的为

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

P280, 5 题

(6) 设 A, B 为 n 阶矩阵,记 $r(X)$ 为矩阵 X 的秩, $(X \ Y)$ 表示分块矩阵,则

(A) $r(A \ AB) = r(A)$.

(B) $r(A \ BA) = r(A)$.

(C) $r(A \ B) = \max\{r(A), r(B)\}$.

(D) $r(A \ B) = r(A^T \ B^T)$.

P241, 8 题

(7) 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 满足 $f(1+x) = f(1-x)$, 且 $\int_0^2 f(x) dx = 0.6$, 则 $P\{X < 0\} =$

(A) 0.2.

(B) 0.3.

(C) 0.4.

(D) 0.5.

P312, 6 题

(8) 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本. 据此样本检测假设: $H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$, 则

(A) 如果在检验水平 $\alpha = 0.05$ 下拒绝 H_0 , 那么在检验水平 $\alpha = 0.01$ 下必拒绝 H_0 .



(B) 如果在检验水平 $\alpha = 0.05$ 下拒绝 H_0 , 那么在检验水平 $\alpha = 0.01$ 下必接受 H_0 .

(C) 如果在检验水平 $\alpha = 0.05$ 下接受 H_0 , 那么在检验水平 $\alpha = 0.01$ 下必拒绝 H_0 .

(D) 如果在检验水平 $\alpha = 0.05$ 下接受 H_0 , 那么在检验水平 $\alpha = 0.01$ 下必接受 H_0 .

P355, 1 题

二、填空题(9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.)

(9) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} \right)^{\frac{1}{\sin kx}} = e$, 则 $k =$ _____.

P70, 12 题

(10) 设函数 $f(x)$ 具有 2 阶连续导数, 若曲线 $y = f(x)$ 过点 $(0, 0)$ 且与曲线 $y = 2^x$ 在点 $(1, 2)$ 处相切, 则 $\int_0^1 x f''(x) dx =$ _____.

P125, 14 题

(11) 设 $F(x, y, z) = xyi - yzj + zxk$, 则 $\text{rot } F(1, 1, 0) =$ _____.

P163, 23 题

(12) 设 L 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线, 则 $\oint_L xy ds =$ _____.

P184, 2 题

(13) 设二阶矩阵 A 有两个不同特征值, α_1, α_2 是 A 的线性无关的特征向量, 且满足 $A^2(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2$, 则 $|A| =$ _____.

P229, 6 题

(14) 设随机事件 A 与 B 相互独立, A 与 C 相互独立, $BC = \emptyset$, 若

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}, P(AC | AB \cup C) = \frac{1}{4}$$

则 $P(C) =$ _____.

P308, 5 题

三、解答题(15 ~ 23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

求不定积分 $\int e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} dx$.

P116, 2 题

(16) (本题满分 10 分)

将长为 2 m 的铁丝分成三段, 依次围成圆、正方形与正三角形. 三个图形的面积之和是否存在最小值? 若存在, 求出最小值.

P156, 17 题

(17) (本题满分 10 分)

设 Σ 是曲面 $x = \sqrt{1 - 3y^2 - 3z^2}$ 的前侧, 计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} x dy dz + (y^3 + 2) dz dx + z^3 dx dy$$

P196, 19 题

(18) (本题满分 10 分)

已知微分方程 $y' + y = f(x)$, 其中 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的连续函数.

(I) 若 $f(x) = x$, 求方程的通解.

(II) 若 $f(x)$ 是周期为 T 的函数, 证明: 方程存在唯一的以 T 为周期的解.

P216, 4 题



(19) (本题满分 10 分)

设数列 $\{x_n\}$ 满足: $x_1 > 0, x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1 (n = 1, 2, \dots)$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

P63, 8 题

(20) (本题满分 11 分)

设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + ax_3)^2$, 其中 a 是参数.

(I) 求 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解;

(II) 求 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的规范形.

P298, 10 题

(21) (本题满分 11 分)

已知 a 是常数, 且矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{bmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $B = \begin{bmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(I) 求 a ;

(II) 求满足 $AP = B$ 的可逆矩阵 P .

P269, 11 题

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 的概率分布为 $P\{X=1\} = P\{X=-1\} = \frac{1}{2}$, Y 服从参数为

λ 的泊松分布. 令 $Z = XY$.

(I) 求 $\text{Cov}(X, Z)$;

(II) 求 Z 的概率分布.

P333, 13 题

答案对应的
页码与题号

(23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \sigma) = \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x|}{\sigma}}, -\infty < x < +\infty$$

其中 $\sigma \in (0, +\infty)$ 为未知参数, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本. 记 σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}$.

(I) 求 $\hat{\sigma}$;

(II) 求 $E(\hat{\sigma})$ 和 $D(\hat{\sigma})$.

P354, 15 题



2017 年全国硕士研究生招生考试 数学(一) 试题

一、选择题(1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.)

(1) 若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{ax}, & x > 0, \\ b, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续,则

(A) $ab = \frac{1}{2}$.

(B) $ab = -\frac{1}{2}$.

(C) $ab = 0$.

(D) $ab = 2$.

P77, 16 题

(2) 设函数 $f(x)$ 可导,且 $f(x)f'(x) > 0$,则

(A) $f(1) > f(-1)$.

(B) $f(1) < f(-1)$.

(C) $|f(1)| > |f(-1)|$.

(D) $|f(1)| < |f(-1)|$.

P94, 15 题

(3) 函数 $f(x, y, z) = x^2y + z^2$ 在点 $(1, 2, 0)$ 处沿向量 $\mathbf{n} = (1, 2, 2)$ 的方向导数为

(A) 12.

(B) 6.

(C) 4.

(D) 2.

P163, 22 题

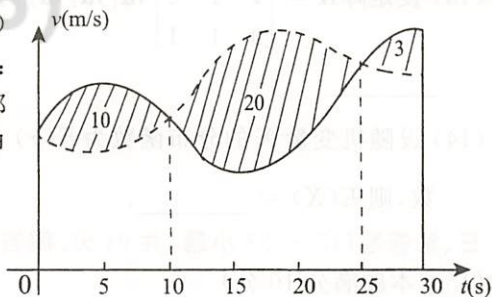
(4) 甲、乙两人赛跑,计时开始时,甲在乙前方 10(单位:m)处,图中实线表示甲的速度曲线 $v = v_1(t)$ (单位:m/s),虚线表示乙的速度曲线 $v = v_2(t)$,三块阴影部分面积的数值依次为 10, 20, 3. 计时开始后乙追上甲的时刻记为 t_0 (单位:s),则

(A) $t_0 = 10$.

(B) $15 < t_0 < 20$.

(C) $t_0 = 25$.

(D) $t_0 > 25$.



P119, 5 题

(5) 设 α 为 n 维单位列向量, E 为 n 阶单位矩阵,则

(A) $E - \alpha\alpha^T$ 不可逆.

(B) $E + \alpha\alpha^T$ 不可逆.

(C) $E + 2\alpha\alpha^T$ 不可逆.

(D) $E - 2\alpha\alpha^T$ 不可逆.

P236, 5 题

(6) 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 则

(A) A 与 C 相似, B 与 C 相似.

(B) A 与 C 相似, B 与 C 不相似.

(C) A 与 C 不相似, B 与 C 相似.

(D) A 与 C 不相似, B 与 C 不相似.

P279, 4 题



(7) 设 A, B 为随机事件, 若 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$, 则 $P(A|B) > P(A|\bar{B})$ 的充分必要条件是

(A) $P(B|A) > P(B|\bar{A})$.

(B) $P(B|A) < P(B|\bar{A})$.

(C) $P(\bar{B}|A) > P(B|\bar{A})$.

(D) $P(\bar{B}|A) < P(B|\bar{A})$.

P307, 4 题

(8) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$ 为来自总体 $N(\mu, 1)$ 的简单随机样本, 记 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 则下列结论中不正确的是

(A) $\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$ 服从 χ^2 分布.

(B) $2(X_n - X_1)^2$ 服从 χ^2 分布.

(C) $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 服从 χ^2 分布.

(D) $n(\bar{X} - \mu)^2$ 服从 χ^2 分布.

P340, 2 题

二、填空题 (9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.)

(9) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, 则 $f^{(3)}(0) =$ _____.

P87, 10 题

(10) 微分方程 $y'' + 2y' + 3y = 0$ 的通解为 $y =$ _____.

P222, 13 题

(11) 若曲线积分 $\int_L \frac{x dx - ay dy}{x^2 + y^2 - 1}$ 在区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$ 内与路径无关, 则 $a =$ _____.

P190, 12 题

(12) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n x^{n-1}$ 在区间 $(-1, 1)$ 内的和函数 $S(x) =$ _____.

P208, 12 题

(13) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为线性无关的 3 维列向量组, 则向量组 $A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$ 的秩为 _____.

P253, 6 题

(14) 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = 0.5\Phi(x) + 0.5\Phi\left(\frac{x-4}{2}\right)$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, 则 $E(X) =$ _____.

P329, 9 题

三、解答题 (15 ~ 23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

设函数 $f(u, v)$ 具有 2 阶连续偏导数, $y = f(e^x, \cos x)$, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}, \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0}$.

P151, 8 题

(16) (本题满分 10 分)

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right)$.

P119, 6 题

(17) (本题满分 10 分)

已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3 + y^3 - 3x + 3y - 2 = 0$ 确定, 求 $y(x)$ 的极值.

P94, 16 题



(18)(本题满分10分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上具有 2 阶导数, 且 $f(1) > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} < 0$, 证明:

(I) 方程 $f(x) = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内至少存在一个实根;

(II) 方程 $f(x)f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内至少存在两个不同实根.

P104, 25 题

(19)(本题满分10分)

设薄片型物体 S 是圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $z^2 = 2x$ 割下的有限部分, 其上任一点的密度为 $\mu(x, y, z) = 9\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. 记圆锥面与柱面的交线为 C .

(I) 求 C 在 xOy 平面上的投影曲线的方程;

(II) 求 S 的质量 M .

P193, 15 题

(20)(本题满分11分)

设三阶矩阵 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 有 3 个不同的特征值, 且 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$.

(I) 证明 $r(A) = 2$;

(II) 若 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, 求方程组 $Ax = \beta$ 的通解.

P268, 10 题

(21)(本题满分11分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 + ax_3^2 + 2x_1x_2 - 8x_1x_3 + 2x_2x_3$ 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$, 求 a 的值及一个正交矩阵 Q .

P297, 9 题

(22)(本题满分11分)

设随机变量 X, Y 相互独立, 且 X 的概率分布为 $P\{X = 0\} = P\{X = 2\} = \frac{1}{2}$, Y 的概率密度为 $f(y) = \begin{cases} 2y, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

(I) 求 $P\{Y \leq E(Y)\}$;

(II) 求 $Z = X + Y$ 的概率密度.

P330, 10 题

(23)(本题满分11分)

某工程师为了解一台天平的精度, 用该天平对一物体的质量做 n 次测量, 该物体的质量 μ 是已知的, 设 n 次测量结果 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立且均服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$. 该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $Z_i = |X_i - \mu| (i = 1, 2, \dots, n)$, 利用 $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ 估计 σ .

(I) 求 Z_1 的概率密度;

(II) 利用一阶矩求 σ 的矩估计量;

(III) 求 σ 的最大似然估计量.

P349, 7 题



2016 年全国硕士研究生招生考试 数学(一) 试题

一、选择题(1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.)

(1) 若反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)^b} dx$ 收敛,则

(A) $a < 1$ 且 $b > 1$.

(B) $a > 1$ 且 $b > 1$.

(C) $a < 1$ 且 $a+b > 1$.

(D) $a > 1$ 且 $a+b > 1$.

P138,19 题

(2) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2(x-1), & x < 1, \\ \ln x, & x \geq 1, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 的一个原函数是

(A) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x - 1), & x \geq 1. \end{cases}$

(B) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x + 1) - 1, & x \geq 1. \end{cases}$

(C) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x + 1) + 1, & x \geq 1. \end{cases}$

(D) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x - 1) + 1, & x \geq 1. \end{cases}$

P115,1 题

(3) 若 $y = (1+x^2)^2 - \sqrt{1+x^2}$, $y = (1+x^2)^2 + \sqrt{1+x^2}$ 是微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的两个解,则 $q(x) =$

(A) $3x(1+x^2)$.

(B) $-3x(1+x^2)$.

(C) $\frac{x}{1+x^2}$.

(D) $-\frac{x}{1+x^2}$.

P216,3 题

(4) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots, \end{cases}$ 则

(A) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点.

(B) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

(C) $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续但不可导.

(D) $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导.

P77,15 题

(5) 设 A, B 是可逆矩阵,且 A 与 B 相似,则下列结论错误的是

(A) A^T 与 B^T 相似.

(B) A^{-1} 与 B^{-1} 相似.

(C) $A + A^T$ 与 $B + B^T$ 相似.

(D) $A + A^{-1}$ 与 $B + B^{-1}$ 相似.

P279,3 题

(6) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$, 则 $f(x_1, x_2, x_3) = 2$ 在空间直角坐标下表示的二次曲面为

(A) 单叶双曲面.

(B) 双叶双曲面.

(C) 椭球面.

(D) 柱面.

P297,8 题

(7) 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2) (\sigma > 0)$, 记 $p = P\{X \leq \mu + \sigma^2\}$, 则

(A) p 随着 μ 的增加而增加.

(B) p 随着 σ 的增加而增加.

(C) p 随着 μ 的增加而减少.

(D) p 随着 σ 的增加而减少.

P312,5 题



- (8) 随机试验 E 有三种两两不相容的结果 A_1, A_2, A_3 , 且三种结果发生的概率均为 $\frac{1}{3}$, 将试验 E 独立重复做 2 次, X 表示 2 次试验中结果 A_1 发生的次数, Y 表示 2 次试验中结果 A_2 发生的次数, 则 X 与 Y 的相关系数为

(A) $-\frac{1}{2}$. (B) $-\frac{1}{3}$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) $\frac{1}{3}$. P335, 17 题

二、填空题 (9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.)

(9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t \ln(1 + t \sin t) dt}{1 - \cos x^2} =$. P58, 5 题

(10) 向量场 $\mathbf{A}(x, y, z) = (x + y + z)\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ 的旋度 $\text{rot } \mathbf{A} =$. P163, 21 题

(11) 设函数 $f(u, v)$ 可微, $z = z(x, y)$ 由方程 $(x+1)z - y^2 = x^2 f(x-z, y)$ 确定, 则 $\left. \frac{dz}{dy} \right|_{(0,1)} =$. P150, 7 题

(12) 设函数 $f(x) = \arctan x - \frac{x}{1+ax^2}$, 且 $f'''(0) = 1$, 则 $a =$. P87, 9 题

(13) 行列式 $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} =$. P226, 3 题

(14) 设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 样本均值 $\bar{x} = 9.5$, 参数 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间的置信上限为 10.8, 则 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间为 . P353, 13 题

三、解答题 (15 ~ 23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

已知平面区域 $D = \{(r, \theta) \mid 2 \leq r \leq 2(1 + \cos \theta), -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$, 计算二重积分 $\iint_D x dx dy$.

P169, 5 题

(16) (本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 满足方程 $y'' + 2y' + ky = 0$, 其中 $0 < k < 1$.

(I) 证明: 反常积分 $\int_0^{+\infty} y(x) dx$ 收敛;

(II) 若 $y(0) = 1, y'(0) = 1$, 求 $\int_0^{+\infty} y(x) dx$ 的值. P221, 12 题

(17) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x, y)$ 满足 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = (2x+1)e^{2x-y}$, 且 $f(0, y) = y+1$, L_t 是从点 $(0, 0)$ 到点 $(1, t)$

的光滑曲线. 计算曲线积分 $I(t) = \int_{L_t} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy$, 并求 $I(t)$ 的最小值.

P190, 11 题



(18)(本题满分 10 分)

设有界区域 Ω 由平面 $2x + y + 2z = 2$ 与三个坐标平面围成, Σ 为 Ω 整个表面的外侧, 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + 1)dydz - 2ydzdx + 3zdx dy$.

P196, 18 题

(19)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 可导, 且 $f(0) = 1, 0 < f'(x) < \frac{1}{2}$, 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1} = f(x_n) (n = 1, 2, \dots)$

证明:

(I) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (x_{n+1} - x_n)$ 绝对收敛;

(II) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 且 $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} x_n < 2$.

P200, 3 题

(20)(本题满分 11 分)

设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & a \\ -a-1 & -2 \end{bmatrix}$.

当 a 为何值时, 方程 $AX = B$ 无解、有唯一解、有无穷多解? 在有解时, 求解此方程.

P267, 9 题

(21)(本题满分 11 分)

已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(I) 求 A^{99} ;

(II) 设三阶矩阵 $B = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 满足 $B^2 = BA$, 记 $B^{100} = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]$, 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 分别表示为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合.

P282, 7 题

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 在区域 $D = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, x^2 < y < \sqrt{x}\}$ 上服从均匀分布, 令

$$U = \begin{cases} 1, & X \leq Y \\ 0, & X > Y \end{cases}$$

(I) 写出 (X, Y) 的概率密度;

(II) 请问 U 与 X 是否相互独立? 并说明理由;

(III) 求 $Z = U + X$ 的分布函数 $F(z)$.

P318, 7 题

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{3x^2}{\theta^3}, & 0 < x < \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $\theta \in (0, +\infty)$ 为未知参数, X_1, X_2, X_3 为来自总体 X 的简单随机样本, 令 $T = \max(X_1, X_2, X_3)$.

(I) 求 T 的概率密度;

(II) 确定 a , 使得 aT 为 θ 的无偏估计.

P353, 14 题

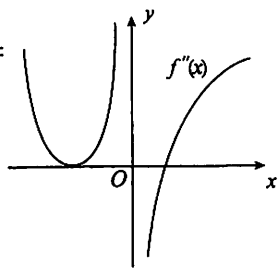


2015 年全国硕士研究生招生考试 数学(一) 试题

一、选择题(1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.)

- (1) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续,其二阶导函数 $f''(x)$ 的图形如图所示,则曲线 $y = f(x)$ 的拐点个数为

(A) 0.
(B) 1.
(C) 2.
(D) 3.



P97, 21 题

- (2) 设 $y = \frac{1}{2}e^{2x} + (x - \frac{1}{3})e^x$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的一个特解, 则

(A) $a = -3, b = 2, c = -1$.
(B) $a = 3, b = 2, c = -1$.
(C) $a = -3, b = 2, c = 1$.
(D) $a = 3, b = 2, c = 1$.

P221, 11 题

- (3) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 则 $x = \sqrt{3}$ 与 $x = 3$ 依次为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$ 的

(A) 收敛点, 收敛点.
(B) 收敛点, 发散点.
(C) 发散点, 收敛点.
(D) 发散点, 发散点.

P204, 6 题

- (4) 设 D 是第一象限中由曲线 $2xy = 1, 4xy = 1$ 与直线 $y = x, y = \sqrt{3}x$ 围成的平面区域, 函数 $f(x, y)$ 在 D 上连续, 则 $\iint_D f(x, y) dx dy =$

(A) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos \theta, r\sin \theta) r dr.$

(B) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos \theta, r\sin \theta) r dr.$

(C) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos \theta, r\sin \theta) dr.$

(D) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos \theta, r\sin \theta) dr.$

P169, 4 题

- (5) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \end{bmatrix}$, 若集合 $\Omega = \{1, 2\}$, 则线性方程组 $Ax = b$ 有无穷多解的充分必要条件为

(A) $a \notin \Omega, d \notin \Omega$.
(B) $a \notin \Omega, d \in \Omega$.
(C) $a \in \Omega, d \notin \Omega$.
(D) $a \in \Omega, d \in \Omega$.

P267, 8 题

- (6) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $x = Py$ 下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 其中 $P = [e_1, e_2, e_3]$, 若 $Q = [e_1, -e_3, e_2]$, 则 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为



(A) $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$. (B) $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$. (C) $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$. (D) $2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.

P296, 7 题

(7) 若 A, B 为任意两个随机事件, 则

(A) $P(AB) \leq P(A)P(B)$.

(B) $P(AB) \geq P(A)P(B)$.

(C) $P(AB) \leq \frac{P(A) + P(B)}{2}$.

(D) $P(AB) \geq \frac{P(A) + P(B)}{2}$.

P307, 3 题

(8) 设随机变量 X, Y 不相关, 且 $E(X) = 2, E(Y) = 1, D(X) = 3$, 则 $E[X(X+Y-2)] =$

(A) -3 .

(B) 3 .

(C) -5 .

(D) 5 .

P328, 7 题

二、填空题 (9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.)

(9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} =$ _____.

P58, 4 题

(10) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{1 + \cos x} + |x| \right) dx =$ _____.

P125, 12 题

(11) 若函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $e^z + xyz + x + \cos x = 2$ 确定, 则 $\left. \frac{dz}{dx} \right|_{(0,1)} =$ _____.

P150, 6 题

(12) 设 Ω 是由平面 $x + y + z = 1$ 与三个坐标平面所围成的空间区域, 则 $\iiint_{\Omega} (x + 2y + 3z) dx dy dz =$ _____.

P181, 8 题

(13) n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} =$ _____.

P225, 2 题

(14) 设二维随机变量 (X, Y) 服从正态分布 $N(1, 0; 1, 1; 0)$, 则 $P\{XY - Y < 0\} =$ _____.

P315, 2 题

三、解答题 (15 ~ 23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x) = x + a \ln(1+x) + bx \sin x, g(x) = kx^3$, 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x \rightarrow 0$ 是等价无穷小, 求 a, b, k 值.

P125, 13 题

(16) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零. 若对任意的 $x_0 \in I$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线与直线 $x = x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4, 且 $f(0) = 2$, 求 $f(x)$ 的表达式.

P90, 12 题

(17) (本题满分 10 分)

已知函数 $f(x, y) = x + y + xy$, 曲线 $C: x^2 + y^2 + xy = 3$, 求 $f(x, y)$ 在曲线 C 上的最大方向导数.

P156, 16 题



(18)(本题满分 10 分)

- (I) 设函数 $u(x), v(x)$ 可导, 利用导数定义证明 $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$;
 (II) 设函数 $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ 可导, $f(x) = u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$, 写出 $f(x)$ 的求导公式.

P81, 1 题

(19)(本题满分 10 分)

已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases} z = \sqrt{2-x^2-y^2}, \\ z = x, \end{cases}$ 起点为 $A(0, \sqrt{2}, 0)$, 终点为 $B(0, -\sqrt{2}, 0)$, 计算曲线

$$\text{积分 } I = \int_L (y+z)dx + (z^2 - x^2 + y)dy + x^2y^2dz.$$

P188, 8 题

(20)(本题满分 11 分)

设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基, $\beta_1 = 2\alpha_1 + 2k\alpha_3, \beta_2 = 2\alpha_2, \beta_3 = \alpha_1 + (k+1)\alpha_3$.

- (I) 证明向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基;
 (II) 当 k 为何值时, 存在非零向量 ξ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标相同, 并求所有的 ξ .

P257, 9 题

(21)(本题满分 11 分)

设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{bmatrix}$ 相似于矩阵 $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

- (I) 求 a, b 的值;
 (II) 求可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-x} \ln 2, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

对 X 进行独立重复的观测, 直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止, 记 Y 为观测次数.

- (I) 求 Y 的概率分布;
 (II) 求 $E(Y)$.

P328, 8 题

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{1-\theta}, & \theta \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 θ 为未知参数, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自该总体的简单随机样本.

- (I) 求 θ 的矩估计量;
 (II) 求 θ 的最大似然估计量.

P348, 6 题



2014 年全国硕士研究生招生考试 数学(一) 试题

一、选择题(1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.)

(1) 下列曲线中有渐近线的是

(A) $y = x + \sin x$.

(B) $y = x^2 + \sin x$.

(C) $y = x + \sin \frac{1}{x}$.

(D) $y = x^2 + \sin \frac{1}{x}$.

P97, 20 题

(2) 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数, $g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$, 则在区间 $[0, 1]$ 上

(A) 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$.

(B) 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$.

(C) 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$.

(D) 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$.

P101, 23 题

(3) 设 $f(x, y)$ 是连续函数, 则 $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx =$

(A) $\int_0^1 dx \int_0^{x-1} f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$.

(B) $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x, y) dy$.

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\cos \theta + \sin \theta}^{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr$.

(D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\cos \theta + \sin \theta}^{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$.

P178, 6 题

(4) 若 $\int_{-\pi}^{\pi} (x - a_1 \cos x - b_1 \sin x)^2 dx = \min_{a, b \in \mathbb{R}} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} (x - a \cos x - b \sin x)^2 dx \right\}$, 则 $a_1 \cos x + b_1 \sin x =$

(A) $2 \sin x$.

(B) $2 \cos x$.

(C) $2\pi \sin x$.

(D) $2\pi \cos x$.

P124, 11 题

(5) 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$

(A) $(ad - bc)^2$.

(B) $-(ad - bc)^2$.

(C) $a^2 d^2 - b^2 c^2$.

(D) $b^2 c^2 - a^2 d^2$.

P224, 1 题

(6) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为三维向量, 则对任意常数 k, l , 向量组 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关的

(A) 必要非充分条件.

(B) 充分非必要条件.

(C) 充分必要条件.

(D) 既非充分也非必要条件.

P251, 5 题



- (7) 设随机事件 A 与 B 相互独立, 且 $P(B) = 0.5, P(A - B) = 0.3$, 则 $P(B - A) =$
 (A) 0.1. (B) 0.2. (C) 0.3. (D) 0.4. P307, 2 题
- (8) 设连续型随机变量 X_1 与 X_2 相互独立且方差均存在, X_1 与 X_2 概率密度分别为 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$, 随机变量 Y_1 的概率密度为 $f_{Y_1}(y) = \frac{1}{2}[f_1(y) + f_2(y)]$, 随机变量 $Y_2 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$, 则
 (A) $E(Y_1) > E(Y_2), D(Y_1) > D(Y_2)$. (B) $E(Y_1) = E(Y_2), D(Y_1) = D(Y_2)$.
 (C) $E(Y_1) = E(Y_2), D(Y_1) < D(Y_2)$. (D) $E(Y_1) = E(Y_2), D(Y_1) > D(Y_2)$. P327, 5 题

二、填空题(9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.)

- (9) 曲面 $z = x^2(1 - \sin y) + y^2(1 - \sin x)$ 在点 $(1, 0, 1)$ 处的切平面方程为 _____. P164, 26 题
- (10) 设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数, 且 $f'(x) = 2(x - 1), x \in [0, 2]$, 则 $f(7) =$ _____. P87, 8 题
- (11) 微分方程 $xy' + y(\ln x - \ln y) = 0$ 满足条件 $y(1) = e^3$ 的解为 $y =$ _____. P215, 2 题
- (12) 设 L 是柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $y + z = 0$ 的交线, 从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向, 则曲线积分 $\oint_L z dx + y dz =$ _____. P187, 7 题
- (13) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1, 则 a 的取值范围是 _____. P296, 6 题
- (14) 设总体 X 的概率密度为
- $$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{2x}{3\theta^2}, & \theta < x < 2\theta, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 θ 是未知参数, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本. 若 $c \sum_{i=1}^n X_i^2$ 是 θ^2 的无偏估计, 则 $c =$ _____. P353, 12 题

三、解答题(15 ~ 23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

$$\text{求极限 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}.$$

P57, 3 题

(16) (本题满分 10 分)

设函数 $y = f(x)$ 由方程 $y^3 + xy^2 + x^2y + 6 = 0$ 确定, 求 $f(x)$ 的极值.

P93, 14 题

(17) (本题满分 10 分)

设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数, $z = f(e^x \cos y)$ 满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4z + e^x \cos y)e^{2x}$$

若 $f(0) = 0, f'(0) = 0$, 求 $f(u)$ 的表达式.

P160, 19 题



(18)(本题满分 10 分)

设 Σ 为曲面 $z = x^2 + y^2 (z \leq 1)$ 的上侧, 计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} (x-1)^3 dydz + (y-1)^3 dzdx + (z-1) dxdy \quad \text{P195, 17 题}$$

(19)(本题满分 10 分)

设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足 $0 < a_n < \frac{\pi}{2}, 0 < b_n < \frac{\pi}{2}, \cos a_n - a_n = \cos b_n$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛.

(I) 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$;

(II) 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$ 收敛.

P199, 2 题

(20)(本题满分 11 分)

设 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, E 为三阶单位矩阵.

(I) 求方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系;

(II) 求满足 $AB = E$ 的所有矩阵 B .

P266, 7 题

(21)(本题满分 11 分)

证明 n 阶矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{bmatrix}$ 相似.

P278, 2 题

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=1\} = P\{X=2\} = \frac{1}{2}$, 在给定 $X=i$ 的条件下, 随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0, i) (i=1, 2)$.

(I) 求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$;

(II) 求 $E(Y)$.

P327, 6 题

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的分布函数为

$$F(x; \theta) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

其中 θ 是未知参数且大于零. $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

(I) 求 $E(X)$ 与 $E(X^2)$;

(II) 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_n$.

(III) 是否存在实数 a , 使得对任何 $\epsilon > 0$, 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\hat{\theta}_n - a| \geq \epsilon\} = 0$?

P347, 5 题



2013 年全国硕士研究生招生考试 数学(一) 试题

一、选择题(1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.)

(1) 已知极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^k} = c$, 其中 k, c 为常数, 且 $c \neq 0$, 则

(A) $k = 2, c = -\frac{1}{2}$.

(B) $k = 2, c = \frac{1}{2}$.

(C) $k = 3, c = -\frac{1}{3}$.

(D) $k = 3, c = \frac{1}{3}$.

P69, 11 题

(2) 曲面 $x^2 + \cos(xy) + yz + x = 0$ 在点 $(0, 1, -1)$ 处的切平面方程为

(A) $x - y + z = -2$.

(B) $x + y + z = 0$.

(C) $x - 2y + z = -3$.

(D) $x - y - z = 0$.

P164, 25 题

(3) 设 $f(x) = \left| x - \frac{1}{2} \right|$, $b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx (n = 1, 2, \dots)$, 令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$, 则

$S\left(-\frac{9}{4}\right) =$

(A) $\frac{3}{4}$.

(B) $\frac{1}{4}$.

(C) $-\frac{1}{4}$.

(D) $-\frac{3}{4}$.

P213, 16 题

(4) 设 $L_1: x^2 + y^2 = 1, L_2: x^2 + y^2 = 2, L_3: x^2 + 2y^2 = 2, L_4: 2x^2 + y^2 = 2$ 为四条逆时针方向的平面曲线, 记 $I_i = \oint_{L_i} \left(y + \frac{y^3}{6} \right) dx + \left(2x - \frac{x^3}{3} \right) dy (i = 1, 2, 3, 4)$, 则 $\max\{I_1, I_2, I_3, I_4\} =$

(A) I_1 .

(B) I_2 .

(C) I_3 .

(D) I_4 .

P187, 6 题

(5) 设 A, B, C 均为 n 阶矩阵, 若 $AB = C$, 且 B 可逆, 则

(A) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价.

(B) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价.

(C) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价.

(D) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 B 的列向量组等价.

P247, 2 题

(6) 矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 相似的充分必要条件为

(A) $a = 0, b = 2$.

(B) $a = 0, b$ 为任意常数.

(C) $a = 2, b = 0$.

(D) $a = 2, b$ 为任意常数.

P289, 12 题

(7) 设 X_1, X_2, X_3 是随机变量, 且 $X_1 \sim N(0, 1), X_2 \sim N(0, 2^2), X_3 \sim N(5, 3^2)$,

$p_i = P\{-2 \leq X_i \leq 2\} (i = 1, 2, 3)$, 则

(A) $p_1 > p_2 > p_3$.

(B) $p_2 > p_1 > p_3$.



(C) $p_3 > p_1 > p_2$.

(D) $p_1 > p_3 > p_2$.

P311,3 题

(8) 设随机变量 $X \sim t(n)$, $Y \sim F(1, n)$, 给定 $\alpha (0 < \alpha < 0.5)$, 常数 c 满足 $P\{X > c\} = \alpha$, 则 $P\{Y > c^2\} =$

(A) α .

(B) $1 - \alpha$.

(C) 2α .

(D) $1 - 2\alpha$.

P340,1 题

二、填空题(9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.)

(9) 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $y - x = e^{x(1-y)}$ 确定, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right] =$ _____.

P86,7 题

(10) 已知 $y_1 = e^{3x} - xe^{2x}$, $y_2 = e^x - xe^{2x}$, $y_3 = -xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解, 则该方程的通解为 $y =$ _____.

P220,10 题

(11) 设 $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = t \sin t + \cos t, \end{cases}$ (t 为参数), 则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} =$ _____.

P86,6 题

(12) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx =$ _____.

P137,18 题

(13) 设 $A = (a_{ij})$ 是三阶非零矩阵, $|A|$ 为 A 的行列式, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 若 $a_{ij} + A_{ij} = 0$ ($i, j = 1, 2, 3$), 则 $|A| =$ _____.

P229,5 题

(14) 设随机变量 Y 服从参数为 1 的指数分布, a 为常数且大于零, 则 $P\{Y \leq a+1 | Y > a\} =$ _____.

P311,4 题

三、解答题(15 ~ 23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

计算 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$, 其中 $f(x) = \int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t} dt$.

P123,10 题

(16) (本题满分 10 分)

设数列 $\{a_n\}$ 满足条件: $a_0 = 3, a_1 = 1, a_{n-2} - n(n-1)a_n = 0 (n \geq 2)$, $S(x)$ 是幂级数

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数.

(I) 证明: $S''(x) - S(x) = 0$;

(II) 求 $S(x)$ 的表达式.

P208,11 题

(17) (本题满分 10 分)

求函数 $f(x, y) = \left(y + \frac{x^3}{3}\right)e^{x+y}$ 的极值.

P155,15 题

(18) (本题满分 10 分)

设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(1) = 1$, 证明:

(I) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = 1$;

(II) 存在 $\eta \in (-1, 1)$, 使得 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$.

P108,27 题



(19)(本题满分 10 分)

设直线 L 过 $A(1,0,0), B(0,1,1)$ 两点, 将 L 绕 z 轴旋转一周得到曲面 Σ , Σ 与平面 $z=0, z=2$ 所围成的立体为 Ω .

(I) 求曲面 Σ 的方程;

(II) 求 Ω 的形心坐标.

P182, 10 题

(20)(本题满分 11 分)

设 $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix}$, 当 a, b 为何值时, 存在矩阵 C 使得 $AC - CA = B$? 并求所有矩阵 C .

P265, 6 题

(21)(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$, 记

$$\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

(I) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$;

(II) 若 α, β 正交且均为单位向量, 证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.

P295, 5 题

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x^2, & 0 < x < 3, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\text{令随机变量 } Y = \begin{cases} 2, & X \leq 1, \\ X, & 1 < X < 2, \\ 1, & X \geq 2. \end{cases}$$

(I) 求 Y 的分布函数;

(II) 求概率 $P\{X \leq Y\}$.

P317, 6 题

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{\theta^2}{x^3} e^{-\frac{\theta}{x}}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 θ 为未知参数且大于零. $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

(I) 求 θ 的矩估计量;

(II) 求 θ 的最大似然估计量.

P346, 4 题



2012 年全国硕士研究生招生考试

数学(一) 试题

一、选择题(1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.)

(1) 曲线 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 的渐近线的条数为

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

P96, 19 题

(2) 设函数 $f(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)$, 其中 n 为正整数, 则 $f'(0) =$

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$.

(B) $(-1)^n(n-1)!$.

(C) $(-1)^{n-1}n!$.

(D) $(-1)^nn!$.

P86, 5 题

(3) 如果函数 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处连续, 那么下列命题正确的是

(A) 若极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|}$ 存在, 则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微.

(B) 若极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 存在, 则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微.

(C) 若 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微, 则极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|}$ 存在.

(D) 若 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微, 则极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 存在.

P149, 5 题

(4) 设 $I_k = \int_0^{k\pi} e^{x^2} \sin x dx (k = 1, 2, 3)$, 则有

(A) $I_1 < I_2 < I_3$.

(B) $I_3 < I_2 < I_1$.

(C) $I_2 < I_3 < I_1$.

(D) $I_2 < I_1 < I_3$.

P118, 4 题

(5) 设 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ c_2 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ c_3 \end{bmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ c_4 \end{bmatrix}$, 其中 c_1, c_2, c_3, c_4 为任意常数, 则下列向量

组线性相关的为

(A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

(B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$.

(C) $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$.

(D) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

P251, 4 题

(6) 设 A 为三阶矩阵, P 为三阶可逆矩阵, 且 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. 若 $P = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$,

$Q = [\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3]$, 则 $Q^{-1}AQ =$

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(D) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

P233, 2 题



(7) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且分别服从参数为 1 与参数为 4 的指数分布, 则 $P\{X < Y\} =$

- (A) $\frac{1}{5}$. (B) $\frac{1}{3}$. (C) $\frac{2}{3}$. (D) $\frac{4}{5}$. P317, 5 题

(8) 将长度为 1m 的木棒随机地截成两段, 则两段长度的相关系数为

- (A) 1. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $-\frac{1}{2}$. (D) -1. P335, 16 题

二、填空题(9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.)

(9) 若函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$ 及 $f''(x) + f(x) = 2e^x$,

则 $f(x) =$ _____.

P220, 9 题

(10) $\int_0^2 x \sqrt{2x - x^2} dx =$ _____.

P122, 9 题

(11) $\text{grad}\left(xy + \frac{z}{y}\right)\bigg|_{(2,1,1)} =$ _____.

P162, 20 题

(12) 设 $\Sigma = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, 则 $\iint_{\Sigma} y^2 dS =$ _____.

P193, 14 题

(13) 设 α 为三维单位列向量, E 为三阶单位矩阵, 则矩阵 $E - \alpha\alpha^T$ 的秩为 _____.

P241, 7 题

(14) 设 A, B, C 是随机事件, A 与 C 互不相容, $P(AB) = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{1}{3}$, 则

$P(AB \mid \bar{C}) =$ _____.

P306, 1 题

三、解答题(15 ~ 23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

证明: $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq 1 + \frac{x^2}{2} (-1 < x < 1)$.

P100, 22 题

(16) (本题满分 10 分)

求函数 $f(x, y) = xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

P155, 14 题

(17) (本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n + 1} x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

P207, 10 题

(18) (本题满分 10 分)

已知曲线 $L: \begin{cases} x = f(t), \\ y = \cos t, \end{cases} \left(0 \leq t < \frac{\pi}{2}\right)$, 其中函数 $f(t)$ 具有连续导数, 且 $f(0) = 0$,

$f'(t) > 0 (0 < t < \frac{\pi}{2})$. 若曲线 L 的切线与 x 轴的交点到切点的距离恒为 1, 求函数 $f(t)$ 的表

达式, 并求以曲线 L 及 x 轴和 y 轴为边界的区域的面积.

P141, 22 题



(19) (本题满分 10 分)

已知 L 是第一象限中从点 $(0,0)$ 沿圆周 $x^2 + y^2 = 2x$ 到点 $(2,0)$, 再沿圆周 $x^2 + y^2 = 4$ 到点 $(0,2)$ 的曲线段. 计算曲线积分 $I = \int_L 3x^2 y dx + (x^3 + x - 2y) dy$.

P186, 5 题

(20) (本题满分 11 分)

$$\text{设 } A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(I) 计算行列式 $|A|$;(II) 当实数 a 为何值时, 方程组 $Ax = \beta$ 有无穷多解? 并求其通解.

P264, 5 题

(21) (本题满分 11 分)

$$\text{已知 } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{bmatrix}, \text{二次型 } f(x_1, x_2, x_3) = x^T (A^T A) x \text{ 的秩为 } 2.$$

(I) 求实数 a 的值;(II) 求正交变换 $x = Qy$ 将二次型 f 化为标准形.

P294, 4 题

(22) (本题满分 11 分)

设二维离散型随机变量 (X, Y) 的概率分布为

X \ Y	Y		
	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

(I) 求 $P\{X = 2Y\}$;(II) 求 $\text{Cov}(X - Y, Y)$.

P332, 12 题

(23) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立且分别服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 与 $N(\mu, 2\sigma^2)$, 其中 σ 是未知参数且 $\sigma > 0$. 记 $Z = X - Y$.

(I) 求 Z 的概率 $f(z; \sigma^2)$;(II) 设 $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ 为来自总体 Z 的简单随机样本, 求 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$;(III) 证明 $\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量.

P346, 3 题



2011 年全国硕士研究生招生考试 数学(一) 试题

微信公众号: 顶尖考研
ID: djky66

一、选择题(1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每小题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的. 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.)

- (1) 曲线 $y = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是
(A) (1,0). (B) (2,0).
(C) (3,0). (D) (4,0). P96, 18 题
- (2) 设数列 $\{a_n\}$ 单调减少, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ($n = 1, 2, \dots$) 无界, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 的收敛域为
(A) $(-1, 1]$. (B) $[-1, 1)$.
(C) $[0, 2)$. (D) $(0, 2]$. P204, 5 题
- (3) 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 且 $f(x) > 0$, $f'(0) = 0$, 则函数 $z = f(x) \ln f(y)$ 在点 $(0, 0)$ 处取得极小值的一个充分条件是
(A) $f(0) > 1, f''(0) > 0$. (B) $f(0) > 1, f''(0) < 0$.
(C) $f(0) < 1, f''(0) > 0$. (D) $f(0) < 1, f''(0) < 0$. P154, 13 题
- (4) 设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin x) dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cot x) dx$, $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x) dx$, 则 I, J, K 的大小关系为
(A) $I < J < K$. (B) $I < K < J$.
(C) $J < I < K$. (D) $K < J < I$. P118, 3 题
- (5) 设 A 为三阶矩阵, 将 A 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 B , 再交换 B 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵, 记 $P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $A =$
(A) $P_1 P_2$. (B) $P_1^{-1} P_2$.
(C) $P_2 P_1$. (D) $P_2 P_1^{-1}$. P232, 1 题
- (6) 设 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$ 是四阶矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵, 若 $(1, 0, 1, 0)^T$ 是方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系, 则 $A^*x = 0$ 的基础解系可为
(A) α_1, α_3 . (B) α_1, α_2 .
(C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. (D) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. P259, 1 题
- (7) 设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 为两个分布函数, 其相应的概率密度 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 是连续函数, 则必为概率密度的是
(A) $f_1(x)f_2(x)$. (B) $2f_2(x)F_1(x)$.
(C) $f_1(x)F_2(x)$. (D) $f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)$. P314, 1 题



- (8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $E(X)$ 与 $E(Y)$ 存在, 记 $U = \max\{X, Y\}$, $V = \min\{X, Y\}$, 则 $E(UV) =$
 (A) $E(U) \cdot E(V)$. (B) $E(X) \cdot E(Y)$.
 (C) $E(U) \cdot E(Y)$. (D) $E(X) \cdot E(V)$. P326, 3 题

二、填空题(9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.)

- (9) 曲线 $y = \int_0^x \tan t dt$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$) 的弧长 $s =$ _____. P140, 21 题
 (10) 微分方程 $y' + y = e^{-x} \cos x$ 满足条件 $y(0) = 0$ 的解为 $y =$ _____. P215, 1 题
 (11) 设函数 $F(x, y) = \int_0^{xy} \frac{\sin t}{1+t^2} dt$, 则 $\left. \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right|_{\substack{x=0 \\ y=2}} =$ _____. P149, 3 题
 (12) 设 L 是柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $z = x + y$ 的交线, 从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向, 则曲线积分 $\oint_L xz dx + x dy + \frac{y^2}{2} dz =$ _____. P186, 4 题
 (13) 若二次曲面的方程 $x^2 + 3y^2 + z^2 + 2axy + 2xz + 2yz = 4$ 经正交变换化为 $y_1^2 + 4z_1^2 = 4$, 则 $a =$ _____. P294, 3 题
 (14) 设二维随机变量 (X, Y) 服从正态分布 $N(\mu, \mu; \sigma^2, \sigma^2; 0)$, 则 $E(XY^2) =$ _____. P326, 4 题

三、解答题(15 ~ 23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

- (15) (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{e^x-1}}$.

P57, 2 题

- (16) (本题满分 9 分)

设函数 $z = f(xy, yg(x))$, 其中函数 f 具有二阶连续偏导数, 函数 $g(x)$ 可导且在 $x = 1$ 处取得极值 $g(1) = 1$. 求 $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{\substack{x=1 \\ y=1}}$.

P149, 4 题

- (17) (本题满分 10 分)

求方程 $kx \arctan x - x = 0$ 不同实根的个数, 其中 k 为参数.

P104, 24 题

- (18) (本题满分 10 分)

(I) 证明: 任意的正整数 n , 都有 $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ 成立;

(II) 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ ($n = 1, 2, \cdots$), 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

P63, 7 题



(19) (本题满分 11 分)

已知函数 $f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $f(1, y) = 0, f(x, 1) = 0, \iint_D f(x, y) dx dy = a$, 其中

$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 计算二重积分 $I = \iint_D xy f''_{xy}(x, y) dx dy$.

P168, 3 题

(20) (本题满分 11 分)

设向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T, \alpha_2 = (0, 1, 1)^T, \alpha_3 = (1, 3, 5)^T$ 不能由向量组 $\beta_1 = (1, 1, 1)^T, \beta_2 = (1, 2, 3)^T, \beta_3 = (3, 4, a)^T$ 线性表示.

(I) 求 a 的值;(II) 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

P246, 1 题

(21) (本题满分 11 分)

设 A 为三阶实对称矩阵, A 的秩为 2, 且

$$A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(I) 求 A 的所有特征值与特征向量;(II) 求矩阵 A .

P288, 11 题

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

且 $P\{X^2 = Y^2\} = 1$.

(I) 求二维随机变量 (X, Y) 的概率分布;(II) 求 $Z = XY$ 的概率分布;(III) 求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY} .

P334, 15 题

(23) (本题满分 11 分)

设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu_0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 其中 μ_0 已知, $\sigma^2 > 0$ 未知. $\bar{X}$ 和 S^2 分别表示样本均值和样本方差.

(I) 求参数 σ^2 的最大似然估计 $\hat{\sigma}^2$;(II) 计算 $E(\hat{\sigma}^2)$ 和 $D(\hat{\sigma}^2)$.

P345, 2 题



2010 年全国硕士研究生招生考试 数学(一) 试题

一、选择题(1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每小题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.)

(1) 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x =$

(A) 1.

(B) e.

(C) e^{a-b} .(D) e^{b-a} .

P56, 1 题

(2) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0$ 确定,其中 F 为可微函数,且 $F'_2 \neq 0$,则

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} =$$

(A) x .(B) z .(C) $-x$.(D) $-z$.

P148, 2 题

(3) 设 m, n 均是正整数,则反常积分 $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ 的收敛性

(A) 仅与 m 的取值有关.(B) 仅与 n 的取值有关.(C) 与 m, n 的取值都有关.(D) 与 m, n 的取值都无关.

P137, 17 题

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} =$

(A) $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy.$

(B) $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy.$

(C) $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy.$

(D) $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy.$

P166, 2 题

(5) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times m$ 矩阵, E 为 m 阶单位矩阵.若 $AB = E$,则

(A) 秩 $r(A) = m$, 秩 $r(B) = m$.(B) 秩 $r(A) = m$, 秩 $r(B) = n$.(C) 秩 $r(A) = n$, 秩 $r(B) = m$.(D) 秩 $r(A) = n$, 秩 $r(B) = n$.

P240, 6 题

(6) 设 A 为四阶实对称矩阵,且 $A^2 + A = O$.若 A 的秩为 3,则 A 相似于

(A) $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}.$

(B) $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}.$

(C) $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}.$

(D) $\begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}.$

P287, 10 题



(7) 设随机变量 X 的分布函数 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1, \\ 1 - e^{-x}, & x \geq 1, \end{cases}$ 则 $P\{X = 1\} =$

(A) 0.

(B) $\frac{1}{2}$.(C) $\frac{1}{2} - e^{-1}$.(D) $1 - e^{-1}$.

P310, 1 题

(8) 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度, $f_2(x)$ 为 $[-1, 3]$ 上均匀分布的概率密度, 若

$$f(x) = \begin{cases} af_1(x), & x \leq 0, \\ bf_2(x), & x > 0 \end{cases} \quad (a > 0, b > 0)$$

为概率密度, 则 a, b 应满足

(A) $2a + 3b = 4$.(B) $3a + 2b = 4$.(C) $a + b = 1$.(D) $a + b = 2$.

P310, 2 题

二、填空题(9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.)

(9) 设 $\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = \int_0^t \ln(1+u^2) du, \end{cases}$ 则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0} =$ _____.

P85, 4 题

(10) $\int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \cos \sqrt{x} dx =$ _____.

P122, 8 题

(11) 已知曲线 L 的方程为 $y = 1 - |x|$ ($x \in [-1, 1]$), 起点是 $(-1, 0)$, 终点为 $(1, 0)$, 则曲线积分

$$\int_L xy dx + x^2 dy =$$

P185, 3 题

(12) 设 $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$, 则 Ω 的形心的竖坐标 $\bar{z} =$ _____.

P182, 9 题

(13) 设 $\alpha_1 = (1, 2, -1, 0)^T$, $\alpha_2 = (1, 1, 0, 2)^T$, $\alpha_3 = (2, 1, 1, a)^T$. 若由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 生成的向量空间的维数为 2, 则 $a =$ _____.

P256, 8 题

(14) 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X = k\} = \frac{C}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots$, 则 $E(X^2) =$ _____.

P326, 2 题

三、解答题(15 ~ 23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

求微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 2xe^x$ 的通解.

P220, 8 题

(16) (本题满分 10 分)

求函数 $f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t)e^{-t^2} dt$ 的单调区间与极值.

P93, 13 题

(17) (本题满分 10 分)

(I) 比较 $\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$ 与 $\int_0^1 t^n |\ln t| dt$ ($n = 1, 2, \dots$) 的大小, 说明理由;

(II) 记 $u_n = \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$ ($n = 1, 2, \dots$), 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

P133, 16 题



(18) (本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

P206, 9 题

(19) (本题满分 10 分)

设 P 为椭球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 - yz = 1$ 上的动点, 若 S 在点 P 处的切平面与 xOy 面垂直,求点 P 的轨迹 C , 并计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} \frac{(x+\sqrt{3})|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}} dS$, 其中 Σ 是椭球面 S 位于曲线 C 上方的部分.

P192, 13 题

(20) (本题满分 11 分)

$$\text{设 } A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

已知线性方程组 $Ax = b$ 存在两个不同的解.(I) 求 λ, a ;(II) 求方程组 $Ax = b$ 的通解.

P263, 4 题

(21) (本题满分 11 分)

已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T Ax$ 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为 $y_1^2 + y_2^2$, 且 Q 的第 3 列为

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^T.$$

(I) 求矩阵 A ;(II) 证明 $A + E$ 为正定矩阵, 其中 E 为三阶单位矩阵.

P293, 2 题

(22) (本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = A e^{-2x^2 + 2xy - y^2}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty$$

求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$.

P322, 10 题

(23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率分布为

X	1	2	3
P	$1-\theta$	$\theta-\theta^2$	θ^2

其中参数 $\theta \in (0, 1)$ 未知. 以 N_i 表示来自总体 X 的简单随机样本 (样本容量为 n) 中等于 i 的个数 ($i = 1, 2, 3$). 试求常数 a_1, a_2, a_3 , 使 $T = \sum_{i=1}^3 a_i N_i$ 为 θ 的无偏估计量, 并求 T 的方差.

P352, 11 题



2009 年全国硕士研究生招生考试 数学(一) 试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1 - bx)$ 是等价无穷小,则

(A) $a = 1, b = -\frac{1}{6}$.

(B) $a = 1, b = \frac{1}{6}$.

(C) $a = -1, b = -\frac{1}{6}$.

(D) $a = -1, b = \frac{1}{6}$.

(2) 如图所示,正方形 $\{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ 被其对角线

划分为四个区域 $D_k (k = 1, 2, 3, 4)$, $I_k = \iint_{D_k} y \cos x dx dy$,

则 $\max_{1 \leq k \leq 4} \{I_k\} =$

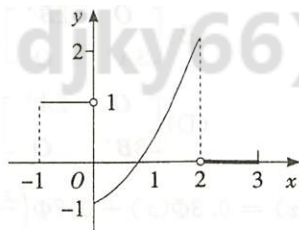
(A) I_1 .

(B) I_2 .

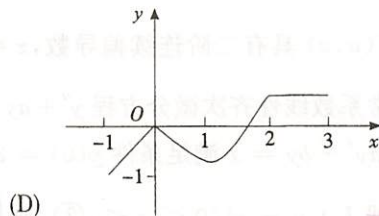
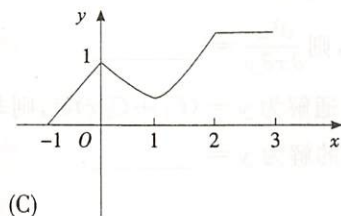
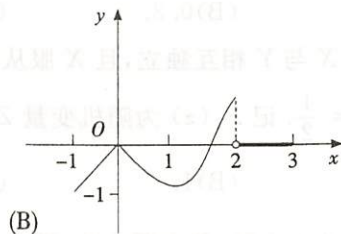
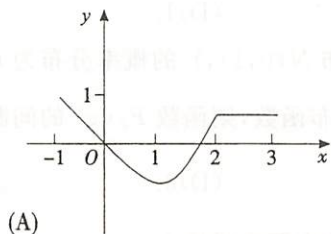
(C) I_3 .

(D) I_4 .

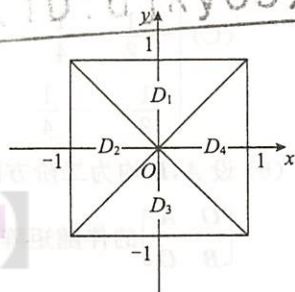
(3) 设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-1, 3]$ 上的图形为



则函数 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 的图形为



微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



P166, 1 题

P128, 15 题



(4) 设有两个数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则

(A) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛. (B) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散.

(C) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛. (D) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 发散. P199, 1 题

(5) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是三维向量空间 R^3 的一组基, 则由基 $\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3$ 到基 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 的过渡矩阵为

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

(B) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$.

(D) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$.

P256, 7 题

(6) 设 A, B 均为二阶方阵, A^*, B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵. 若 $|A| = 2, |B| = 3$, 则分块矩阵

$\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}$ 的伴随矩阵为

(A) $\begin{bmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{bmatrix}$.

(B) $\begin{bmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{bmatrix}$.

(D) $\begin{bmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{bmatrix}$.

P235, 4 题

(7) 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = 0.3\Phi(x) + 0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数, 则 $E(X) =$

(A) 0.

(B) 0.3.

(C) 0.7.

(D) 1.

P325, 1 题

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 X 服从标准正态分布 $N(0, 1)$, Y 的概率分布为 $P\{Y = 0\} = P\{Y = 1\} = \frac{1}{2}$. 记 $F_Z(z)$ 为随机变量 $Z = XY$ 的分布函数, 则函数 $F_Z(z)$ 的间断点个数为

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

P316, 4 题

二、填空题 (本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分. 答案填在题中横线上.)

(9) 设函数 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, $z = f(x, xy)$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ _____.

P148, 1 题

(10) 若二阶常系数线性齐次微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^x$, 则非齐次微分方程 $y'' + ay' + by = x$ 满足条件 $y(0) = 2, y'(0) = 0$ 的解为 $y =$ _____.

P219, 7 题

(11) 已知曲线 $L: y = x^2 (0 \leq x \leq \sqrt{2})$, 则 $\int_L x ds =$ _____.

P184, 1 题



(12) 设 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, 则 $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz =$ _____.

P180, 7 题

(13) 若三维列向量 α, β 满足 $\alpha^T \beta = 2$, 其中 α^T 为 α 的转置, 则矩阵 $\beta \alpha^T$ 的非零特征值为 _____.

P276, 1 题

(14) 设 $X_1, X_2, \dots, X_m$ 为来自二项分布总体 $B(n, p)$ 的简单随机样本, $\bar{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差. 若 $\bar{X} + kS^2$ 为 np^2 的无偏估计量, 则 $k =$ _____.

P352, 10 题

三、解答题(本题共 9 小题, 满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 9 分)

求二元函数 $f(x, y) = x^2(2 + y^2) + y \ln y$ 的极值.

P154, 12 题

(16) (本题满分 9 分)

设 a_n 为曲线 $y = x^n$ 与 $y = x^{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$) 所围成区域的面积, 记

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$$

求 S_1 与 S_2 的值.

P206, 8 题

(17) (本题满分 11 分)

椭球面 S_1 是椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 绕 x 轴旋转而成, 圆锥面 S_2 是由过点 $(4, 0)$ 且与椭圆

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 相切的直线绕 x 轴旋转而成.

(I) 求 S_1 及 S_2 的方程;

(II) 求 S_1 与 S_2 之间的立体体积.

P147, 1 题

(18) (本题满分 11 分)

(I) 证明拉格朗日中值定理: 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$;

(II) 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 在 $(0, \delta)$ ($\delta > 0$) 内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = A$, 则 $f'_+(0)$

存在, 且 $f'_+(0) = A$.

P107, 26 题





(19) (本题满分 10 分)

计算曲面积分 $I = \oint_{\Sigma} \frac{x dy dz + y dz dx + z dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$, 其中 Σ 是曲面 $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$ 的外侧.

P194, 16 题

答案对应的
页码与题号

(20) (本题满分 11 分)

$$\text{设 } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{bmatrix}, \xi_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

(I) 求满足 $A\xi_2 = \xi_1, A^2\xi_3 = \xi_1$ 的所有向量 ξ_2, ξ_3 ;

(II) 对 (I) 中的任意向量 ξ_2, ξ_3 , 证明 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关.

P262, 3 题

(21) (本题满分 11 分)

设二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + (a-1)x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

(I) 求二次型 f 的矩阵的所有特征值;

(II) 若二次型 f 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2$, 求 a 的值.

P292, 1 题

(22) (本题满分 11 分)

袋中有 1 个红球、2 个黑球与 3 个白球. 现有放回地从袋中取两次, 每次取一个球. 以 X, Y, Z 分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数.

(I) 求 $P\{X=1 \mid Z=0\}$;

(II) 求二维随机变量 (X, Y) 的概率分布.

P321, 9 题

(23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中参数 $\lambda (\lambda > 0)$ 未知, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

(I) 求参数 λ 的矩估计量;

(II) 求参数 λ 的最大似然估计量.

P344, 1 题



第三篇

真题解析

第一部分 高等数学

第一章 函数、极限、连续

本章导读

函数是微积分的研究对象,极限是建立微积分理论和方法的基础,连续性是函数的基本性质,是函数可导和可积的基本条件,连续函数是微积分所讨论的函数的主要类型.因此,函数、极限与函数连续性是本章的主要内容,也是微积分的理论基础.

本章主要内容有:

1. 函数的概念,基本性质及复合函数;
2. 极限的概念、性质、存在准则及求极限的方法,无穷小量的概念、性质及阶的比较;
3. 连续的概念,间断点及其分类,连续函数的性质(运算性质及有限闭区间上连续函数性质).

试题特点

本章是微积分的基础,每年必考.而本章的特点是基本概念和基本理论非常多,许多考题重点考查这些基本概念和基本理论,从往年试卷分析情况来看,失分率比较高,因此,望考生重视基本概念和基本理论的复习.

本章常考题型

1. 求极限;
2. 无穷小量及其比较;
3. 求间断点及判别间断点类型.

无穷小量比较实际上就是研究“ $\frac{0}{0}$ ”型极限,而间断点类型判定的关键也是求极限,所以,本章常考的三种题型的核心都是求极限.重点是求极限的常用方法(如有理运算,基本极限,等价无穷



小代换、洛必达法则等).

一、极限的概念与性质

练习题

1. (1999, 数二, 3分) “对任意给定的 $\varepsilon \in (0, 1)$, 总存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - a| \leq 2\varepsilon$ ” 是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的

- (A) 充分条件但非必要条件. (B) 必要条件但非充分条件.
(C) 充分必要条件. (D) 既非充分条件又非必要条件.

2. (1999 年, 数二, 7分) 设 $f(x)$ 是区间 $[0, +\infty)$ 上单调减少且非负的连续函数,

$$a_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

证明数列 $\{a_n\}$ 的极限存在.

3. (2014, 数三, 4分) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 且 $a \neq 0$, 则当 n 充分大时有

- (A) $|a_n| > \frac{|a|}{2}$. (B) $|a_n| < \frac{|a|}{2}$.
(C) $a_n > a - \frac{1}{n}$. (D) $a_n < a + \frac{1}{n}$.

4. (2012, 数二, 4分) 设 $a_n > 0 (n = 1, 2, \dots)$, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, 则数列 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的

- (A) 充分必要条件. (B) 充分非必要条件.
(C) 必要非充分条件. (D) 既非充分也非必要条件.

练习题参考答案

1. 【答案】 C.

【解析】 本题主要考查考生对数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义的理解. 其定义是“对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 总存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$ ”. 显然, 若 $|x_n - a| < \varepsilon$, 则必有 $|x_n - a| \leq 2\varepsilon$, 但反之也成立, 这是由于 ε 的任意性, 对于任意给定的 $\varepsilon_1 > 0$, 取 $|x_n - a| \leq 2\varepsilon$ 中的 $\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{3}$, 则有 $|x_n - a| \leq 2\varepsilon = \frac{2}{3}\varepsilon_1 < \varepsilon_1$, 即, 对任意给定的正数 $\varepsilon_1 > 0$, 总存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - a| < \varepsilon_1$, 故应选(C).

【评注】 到目前为止, 考研试卷中还没考过利用极限定义证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 或 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的试题, 但从本题可看出, 要求考生理解极限的定义.

2. 【分析】 证明数列极限存在最常用的方法是利用“单调有界数列必有极限”的准则.

【证明】 由于 $f(x)$ 单调减少, 则



$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k), x \in [k, k+1]$$

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k), (k=1, 2, \dots)$$

因此

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx = \sum_{k=1}^n f(k) - \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left[f(k) - \int_k^{k+1} f(x) dx \right] + f(n) \geq 0 \end{aligned}$$

即数列 $\{a_n\}$ 下有界, 又

$$a_{n+1} - a_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x) dx \leq 0$$

即数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 故由单调有界准则知数列 $\{a_n\}$ 的极限存在.

【评注】 本题考试的结果很不理想, 有 66% 的考生得零分, 只有 7.5% 的考生得满分, 本题证明中出现的主要问题是考生证明了数列 $\{a_n\}$ 单调减少而没能证明 $a_n \geq 0$, 本题的难度值为 0.17.

3. **【答案】** A.

【解析】 (方法一) 直接法

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 且 $a \neq 0$ 知, $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a| > 0$, 则当 n 充分大时有

$$|a_n| > \frac{|a|}{2}$$

故应选(A).

(方法二) 排除法

若取 $a_n = 2 + \frac{2}{n}$, 显然 $a = 2$, 且(B)和(D)都不正确;

若取 $a_n = 2 - \frac{2}{n}$, 显然 $a = 2$, 且(C)不正确. 故应选(A).

【评注】 本题主要考查数列极限的概念.

4. **【答案】** B.

【解析】 因为 $a_n > 0 (n=1, 2, \dots)$, 所以数列 $\{S_n\}$ 是单调增加的.

如果 $\{S_n\}$ 有界, 则由单调有界准则知 $\{S_n\}$ 的极限存在, 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$. 由此可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

即数列 $\{a_n\}$ 收敛. 反之, 当 $\{a_n\}$ 收敛时, $\{S_n\}$ 却未必有界. 例如, 取 $a_n = 1 (n=1, 2, \dots)$, 显然有 $\{a_n\}$ 收敛, 但 $S_n = n$ 无界. 可见 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分非必要条件.

小结

(1) 极限的概念重点是理解数列极限的 $\epsilon-N$ 定义和函数极限的 $\epsilon-\delta$ 及 $\epsilon-X$ 定义, 而不是用定义证明极限;

(2) 极限的性质重点是: 有界性、保号性及有理运算性质;

(3) 极限的存在准则重点是: 单调有界准则和夹逼定理.



二、求函数的极限

1 (2010, 1 题, 4 分) 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x =$

(A) 1.

(B) e.

(C) e^{a-b} .

(D) e^{b-a} .

【答案】 C.

【解析】 (方法一) 这是一个“ 1^∞ ”型极限, 直接有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left[1 + \frac{(a-b)x+ab}{(x-a)(x+b)} \right]^{\frac{(x-a)(x+b)}{(a-b)x+ab}} \right\}^{\frac{(a-b)x+ab}{(x-a)(x+b)} \cdot x}$$

$$= e^{a-b}$$

(方法二) 原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \ln \frac{x^2}{(x-a)(x+b)}}$, 而

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{x^2}{(x-a)(x+b)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{(a-b)x+ab}{(x-a)(x+b)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \frac{(a-b)x+ab}{(x-a)(x+b)} \quad (\text{等价无穷小代换}) \\ &= a-b \end{aligned}$$

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x = e^{a-b}.$$

(方法三) 对于“ 1^∞ ”型极限可利用基本结论:

若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \beta(x) = \infty$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x)\beta(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \alpha(x))^{\beta(x)} = e^A$, 由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x)\beta(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - (x-a)(x+b)}{(x-a)(x+b)} \cdot x \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a-b)x^2 + abx}{(x-a)(x+b)} = a-b \end{aligned}$$

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x = e^{a-b}.$$

$$\begin{aligned} \text{(方法四)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{(x-a)(x+b)}{x^2} \right]^{-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a}{x} \right)^{-x} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{b}{x} \right)^{-x} \\ &= e^a \cdot e^{-b} = e^{a-b}. \end{aligned}$$

【评注】 本题是一个“ 1^∞ ”型极限. 方法一是将所求极限凑成基本极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ 的形式后求极限; 方法二是将原式改写成指数形式然后用等价无穷小代换(或用洛必达法则); 方法三和方法四都是利用关于“ 1^∞ ”型极限的基本结论求极限, 以上四种方法是求“ 1^∞ ”常用的四种方法, 往往第四种方法最简单, 而第四种方法所用的关于“ 1^∞ ”型极限的结论也很容易证明.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \alpha(x))^{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left[1 + \alpha(x) \right]^{\frac{1}{\alpha(x)}} \right\}^{\alpha(x)\beta(x)} = e^A$$

该结论在以后求“ 1^∞ ”型极限时可直接用.

2 (2011, 15 题, 10 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{e^x-1}}$.

【解】 (方法一) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{e^x-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(\frac{\ln(1+x)}{x})}{e^x-1}}$

$$\text{而 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)}{e^x-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\ln(1+x)-x}{x}\right)}{x} \quad (\text{等价无穷小代换})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \quad (\text{等价无穷小代换})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} \quad (\text{洛必达法则})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{1+x} = -\frac{1}{2},$$

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{e^x-1}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

(方法二) 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{e^x-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\ln(1+x)-x}{x} \right)^{\frac{1}{e^x-1}}$

$$\text{而 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x} \cdot \frac{1}{e^x-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \quad (\text{等价无穷小代换})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = -\frac{1}{2},$$

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{e^x-1}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

【评注】 这是一个“ 1^∞ ”型极限. 方法一是改写成指数形式后用洛必达法则和等价无穷小代换, 方法二中用的就是关于“ 1^∞ ”型极限的基本结论. 显然方法二简单.

本题中的极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$ 也可用泰勒公式求解.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

3 (2014, 15 题, 10 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x \left[t^2 \left(e^{\frac{1}{t}} - 1 \right) - t \right] dt}{x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}$.

【解】 (方法一) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x \left[t^2 \left(e^{\frac{1}{t}} - 1 \right) - t \right] dt}{x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x \left[t^2 \left(e^{\frac{1}{t}} - 1 \right) - t \right] dt}{x^2 \cdot \frac{1}{x}} \quad (\text{等价无穷小代换})$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2(e^{\frac{1}{x}} - 1) - x] \quad (\text{洛必达法则})$$

$$\stackrel{\frac{1}{x}=t}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^t - 1 - t}{t^2} \quad (\text{变量代换})$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^t - 1}{2t} \quad (\text{洛必达法则})$$

$$= \frac{1}{2}.$$

(方法二) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x^2 \cdot \frac{1}{x}} \quad (\text{等价无穷小代换})$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2(e^{\frac{1}{x}} - 1) - x] \quad (\text{洛必达法则})$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2(\frac{1}{x} + \frac{1}{2!x^2} + o(\frac{1}{x^2})) - x] \quad (\text{泰勒公式})$$

$$= \frac{1}{2}.$$

4 (2015, 9 题, 4 分) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $-\frac{1}{2}.$

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[1 + (\cos x - 1)]}{x^2}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2}.$

或 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\tan x}{2x} = -\frac{1}{2}.$

5 (2016, 9 题, 4 分) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t \ln(1 + t \sin t) dt}{1 - \cos x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{1}{2}.$

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t \ln(1 + t \sin t) dt}{1 - \cos x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t \ln(1 + t \sin t) dt}{\frac{1}{2}x^4}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1 + x \sin x)}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin x}{2x^3} = \frac{1}{2}.$

6 (2020, 9 题, 4 分) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{\ln(1 + x)} \right] = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $-1.$

【解析】 (方法一) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{\ln(1 + x)} \right]$ 是一个“ $\infty - \infty$ ”型不定式. 利用等价无穷小量



替换及洛必达法则,得

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right] &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - e^x + 1}{(e^x - 1)\ln(1+x)} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - e^x + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - e^x}{2x} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{(1+x)^2} - e^x}{2} = -1\end{aligned}$$

(方法二) 因为 $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - e^x + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = -1$$

练习题

1. (1999, 数二, 5 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x \ln(1+x) - x^2}$.

2. (2004, 数二, 10 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left[\left(\frac{2+\cos x}{3} \right)^x - 1 \right]$.

3. (2010, 数三, 10 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{\frac{1}{x}} - 1)^{\frac{1}{\ln x}}$.

4. (1994, 数三, 4 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$.

5. (2000, 数二, 4 分) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} \right) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6+f(x)}{x^2}$ 为

(A) 0.

(B) 6.

(C) 36.

(D) ∞ .

6. (2009, 数二, 9 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)[x - \ln(1 + \tan x)]}{\sin^4 x}$.

练习题参考答案

$$\begin{aligned}1. \text{【解】} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x \ln(1+x) - x^2} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x[\ln(1+x) - x][\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x}]} \quad (\text{分子有理化}) \\&= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x(1 - \cos x)}{x[\ln(1+x) - x]} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{\ln(1+x) - x} \quad (\text{等价代换}) \\&= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\frac{1}{1+x} - 1} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{-x} = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

【评注】 本题是一个 $\frac{0}{0}$ 型极限, 主要是利用有理化, 等价无穷小代换和洛必达法则求极限.



2.【分析】 本题是“ $\frac{0}{0}$ ”型极限,由于分子中含有幂指数函数,通常的求解方法是将其化为指数函数形式,然后用等价无穷小($e^x - 1 \sim x$)代换,然后再用洛必达法则.

【解】 (方法一) 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln(\frac{2+\cos x}{3})} - 1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\frac{2+\cos x}{3})}{x^2}$ (等价无穷小代换)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2+\cos x) - \ln 3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2+\cos x} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{1}{6}.$$

(方法二) 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln(\frac{2+\cos x}{3})} - 1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\frac{2+\cos x}{3})}{x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \frac{\cos x - 1}{3})}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} \quad (\text{等价代换})$$

$$= -\frac{1}{6}.$$

【评注】 本题是一个 $\frac{0}{0}$ 型极限,又出现了幂指数函数,第一步将其改写成指数形式后用等价无穷小代换是关键.

3.【分析】 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}}$, 而 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, 则本题是一个“ 0^0 ”型极限,通常是改写成指数形式或取对数后用洛必达法则.

【解】 原式 = $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\frac{1}{x} - 1}{\ln x}}$

又 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^{\frac{1}{x}} - 1)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^{\frac{1}{x}})'}{\frac{1}{x}(x^{\frac{1}{x}} - 1)}$ (洛必达法则)

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(e^{\frac{\ln x}{x}})'}{e^{\frac{\ln x}{x}} - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^{\frac{\ln x}{x}} (\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2})}{e^{\frac{\ln x}{x}} - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \ln x}{x(e^{\frac{\ln x}{x}} - 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \ln x}{\ln x} \quad (e^{\frac{\ln x}{x}} - 1 \sim \frac{\ln x}{x})$$

$$= -1,$$

原式 = $e^{-1} = \frac{1}{e}$.

4.【分析】 这是一个“ $\infty - \infty$ ”型极限,一种方法是作倒代换 $x = \frac{1}{t}$, 然后通分化为 $\frac{0}{0}$ 型;另一种方法是将 $\ln(1 + \frac{1}{x})$ 用泰勒公式展开.



【解】 (方法一) 令 $x = \frac{1}{t}$, 则

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \ln(1+t) \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+t}}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2(1+t)} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(方法二) 由泰勒公式得

$$\begin{aligned}\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) &= \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right] &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} - x^2 \cdot o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right] = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

【评注】 本题所求极限是“ $\infty - \infty$ ”型, 求“ $\infty - \infty$ ”型极限常用有以下三种方法

- (1) 通分化为“ $\frac{0}{0}$ ”(当所求极限为分式差的形式);
- (2) 根式有理化(当所求极限为根式差的形式);
- (3) 变量代换或泰勒公式(当所求极限为其他形式).

5. 【答案】 C.

【解析】 (方法一) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) + \sin 6x}{x^3}$

$$\begin{aligned}&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) + \left[6x - \frac{1}{3!}(6x)^3 + o(x^3) \right]}{x^3} \quad (\text{泰勒公式}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 6}{x^2} - 36 = 0,\end{aligned}$$

$$\text{则} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 6}{x^2} = 36.$$

(方法二)

$$\begin{aligned}\text{由} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) + \sin 6x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[xf(x) + 6x] + (\sin 6x - 6x)}{x^3} = 0 \text{ 知} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 6}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - \sin 6x}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}(6x)^3}{x^3} \quad \left(x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3 \right) \\ &= 36\end{aligned}$$

(方法三) 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) + \sin 6x}{x^3} = 0$ 知, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $xf(x) + \sin 6x = o(x^3)$, 则

$$\begin{aligned}f(x) &= -\frac{\sin 6x}{x} + o(x^2) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 6}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 - \frac{\sin 6x}{x} + o(x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 - \frac{\sin 6x}{x}}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - \sin 6x}{x^3} = 36\end{aligned}$$



(方法四) 排除法

令 $xf(x) + \sin 6x = 0$, 显然有 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) + \sin 6x}{x^3} = 0$,

此时, $f(x) = -\frac{\sin 6x}{x}$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 6}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 - \frac{\sin 6x}{x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - \sin 6x}{x^3} = 36$$

显然(A)(B)(D) 均不正确, 故应选(C).

6.【解】(方法一) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $\sin^4 x \sim x^4$, 则

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)[x - \ln(1 + \tan x)]}{\sin^4 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2[x - \ln(1 + \tan x)]}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1 + \tan x)}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{\sec^2 x}{1 + \tan x}}{4x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \tan x - \sec^2 x}{4x} = \frac{1}{4} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{x} \right] = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

(方法二)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)[x - \ln(1 + \tan x)]}{\sin^4 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2[x - \ln(1 + \tan x)]}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1 + \tan x)}{2x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x - \tan x] - [\ln(1 + \tan x) - \tan x]}{2x^2} \quad \left[(\tan x - x) \sim \frac{1}{3}x^3, x - \ln(1 + x) \sim \frac{1}{2}x^2 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[-\frac{1}{3}x^3\right] - \left[-\frac{1}{2}\tan^2 x\right]}{2x^2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

小结

1. 求函数的极限主要是求未定式 $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, \infty^0, 0^0\right)$ 的极限, 这里的关键是两种, 即“ $\frac{0}{0}$ ”型和“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型, 而后 5 种都可化为前两种, 前两种当中特别是“ $\frac{0}{0}$ ”型考得最多, 求“ $\frac{0}{0}$ ”型极限主要用三种方法:

- (1) 利用洛必达法则: 在处理“ $\frac{0}{0}$ ”型极限问题时, 不要急于用洛必达法则应先进行化简, 常用的方法有极限为非零常数的因子极限先求出来, 等价无穷小代换, 有理化. 化简完后再用洛必达法则;
- (2) 利用等价无穷小代换;
- (3) 利用泰勒公式: 其中 $\sin x, \ln(1+x), e^x, \cos x$ 在 $x=0$ 处的泰勒公式比较常用, 考生应熟悉.



2. “ 1^∞ ”型极限也是一种常考的类型,最简单的方法是利用结论:

若 $\lim \alpha(x) = 0, \lim \beta(x) = \infty$, 且 $\lim \alpha(x)\beta(x) = A$, 则 $\lim (1 + \alpha(x))^{\beta(x)} = e^A$.

三、求数列的极限

7 (2011, 18 题, 10 分) (I) 证明: 对任意的正整数 n , 都有

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

成立.

(II) 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ ($n = 1, 2, \cdots$), 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

【证明】 (I) 由拉格朗日中值定理知, 存在 $\xi \in (n, n+1)$, 使得

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{\xi}$$

$$\text{则 } \frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\xi} < \frac{1}{n}.$$

(II) 由(I)知, 当 $n \geq 1$ 时

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0$$

即数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 又

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \\ &> \ln(1+1) + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln n \\ &= \ln 2 + (\ln 3 - \ln 2) + \cdots + (\ln(n+1) - \ln n) - \ln n \\ &= \ln(n+1) - \ln n > 0 \end{aligned}$$

从而数列 $\{a_n\}$ 下有界, 故该数列收敛.

【评注】 本题中(I)是一个不等式的证明. 高等数学中有两个常用的不等式

$$(1) \sin x < x < \tan x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$$

$$(2) \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x, x \in (0, +\infty).$$

考生应该熟悉, 本题的(I)只要在不等式(2)中令 $x = \frac{1}{n}$ 便可证明. 本题中的(II)主要考查数列的单调有界准则.

8 (2018, 19 题, 10 分) 设数列 $\{x_n\}$ 满足: $x_1 > 0, x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1$ ($n = 1, 2, \cdots$). 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

【证明】 (方法一) 由于当 $x > 0$ 时, $e^x - 1 > x$, 则由 $x_1 > 0$, 知 $e^{x_2} = \frac{e^{x_1} - 1}{x_1} > 1, x_2 > 0$.

若 $x_k > 0$, 则 $e^{x_{k+1}} = \frac{e^{x_k} - 1}{x_k} > 1$ 知 $x_{k+1} > 0$, 即数列 $\{x_n\}$ 下有界.



由 $x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1$ 知 $e^{x_{n+1}} = \frac{e^{x_n} - 1}{x_n}, x_{n+1} = \ln \frac{e^{x_n} - 1}{x_n}$.

$$x_{n+1} - x_n = \ln \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} - \ln e^{x_n} = \ln \frac{e^{x_n} - 1}{x_n e^{x_n}}$$

令 $f(x) = xe^x - (e^x - 1), x \in [0, +\infty)$, 则

$$f(0) = 0$$

$$f'(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x > 0, x \in (0, +\infty)$$

则 $f(x) > 0, xe^x > e^x - 1, x \in (0, +\infty)$.

$$x_{n+1} - x_n = \ln \frac{e^{x_n} - 1}{x_n e^{x_n}} < \ln 1 = 0$$

$\{x_n\}$ 单调减少, 由单调有界准则知, 数列 $\{x_n\}$ 收敛, 令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 等式

$$x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1$$

两端取极限得 $ae^a = e^a - 1$, 由此得 $a = 0$.

(方法二) 由于当 $x > 0$ 时, $e^x - 1 > x$, 则由 $x_1 > 0, e^{x_1} = \frac{e^{x_1} - 1}{x_1} > 1$ 可知, $x_2 > 0$, 由归纳

法可知 $x_n > 0$, 即 $\{x_n\}$ 下有界. 由 $x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1$ 知

$$e^{x_{n+1}} = \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} = \frac{e^{x_n} - e^0}{x_n - 0} = e^{\xi_n} < e^{x_n}, (\text{拉格朗日定理, 其中 } 0 < \xi_n < x_n)$$

由于 e^x 单调增加, 则 $x_{n+1} < x_n$, 即 $\{x_n\}$ 单调减少, 由单调有界准则知 $\{x_n\}$ 收敛. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 等式 $x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1$ 两端取极限得

$$ae^a = e^a - 1$$

由此解得 $a = 0$.

9 (2019, 18 题, 10 分) 设 $a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx (n = 0, 1, 2, \dots)$.

(I) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 且 $a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2} (n = 2, 3, \dots)$;

(II) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$.

【证明】 (I) 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $x^n \sqrt{1-x^2} \geq x^{n+1} \sqrt{1-x^2}$, 则

$$\int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx \geq \int_0^1 x^{n+1} \sqrt{1-x^2} dx$$

即 $a_n \geq a_{n+1}$, 从而数列 $\{a_n\}$ 单调减少.

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx = -\frac{1}{3} \int_0^1 x^{n-1} d(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \\ &= -\frac{1}{3} x^{n-1} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 + \frac{n-1}{3} \int_0^1 x^{n-2} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx \\ &= \frac{n-1}{3} \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{1-x^2} dx - \frac{n-1}{3} \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx \\ &= \frac{n-1}{3} \left[\int_0^1 x^{n-2} \sqrt{1-x^2} dx - \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx \right] \\ &= \frac{n-1}{3} (a_{n-2} - a_n) \end{aligned}$$



从而有 $a_n = \frac{n-1}{n+2}a_{n-2} (n=2,3,\cdots)$.

(II) 由于 $\{a_n\}$ 单调减少, 且 $a_n > 0$, 则

$$\frac{a_n}{a_{n-2}} \leq \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{a_n}{a_n} = 1$$

又

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+2} = 1$$

由夹逼定理知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1$.

练习题

1. (1998, 数四, 6分) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \tan \frac{1}{n} \right)^{n^2} (n \text{ 为自然数})$.

2. (2008, 数四, 4分) 设 $0 < a < b$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a^{-n} + b^{-n})^{\frac{1}{n}} =$

(A) a .

(B) a^{-1} .

(C) b .

(D) b^{-1} .

3. (1995, 数二, 3分) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + n} \right) =$ _____.

4. (1994, 数三, 10分) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{n} \right)$.

5. (2013, 数二, 10分) 设函数 $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$.

(I) 求 $f(x)$ 的最小值;

(II) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1$. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求此极限.

练习题参考答案

1. 【分析】 本题是一个“ 1^∞ ”型极限, 可利用“ 1^∞ ”型极限的基本结论求该极限.

【解】 由于

$$\left(n \tan \frac{1}{n} \right)^{n^2} = \left(\frac{\tan \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \right)^{n^2} = \left[1 + \frac{\tan \frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \right]^{n^2}$$

$$\text{而 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan \frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan \frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n} \right)^3},$$

这是一个“ $\frac{0}{0}$ ”型数列极限, 不能直接用洛必达法则, 通常是化为相应的函数极限后再用洛必

达法则, 为此考虑极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$$



$$\text{则} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan \frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^3} = \frac{1}{3},$$

$$\text{故} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \tan \frac{1}{n} \right)^{n^2} = e^{\frac{1}{3}}.$$

【评注】事实上 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan \frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{n}\right)^3}{\left(\frac{1}{n}\right)^3} = \frac{1}{3}$, 这是利用了等价无穷小代换,

$\tan x - x \sim \frac{1}{3}x^3 (x \rightarrow 0)$, 这也是一个常用的结论.

2.【答案】 B.

【解析】 (方法一) 由于 $0 < a < b$, 则

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a^{-n} + b^{-n})^{\frac{1}{n}} &= a^{-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \left(\frac{a}{b} \right)^n \right]^{\frac{1}{n}} \\ &= a^{-1} \left(\text{其中} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{b} \right)^n = 0 \right) \end{aligned}$$

(方法二) 利用夹逼定理求极限, 由于 $0 < a < b$, 且

$$\begin{aligned} (a^{-n} + b^{-n})^{\frac{1}{n}} &= \sqrt[n]{\left(\frac{1}{a}\right)^n + \left(\frac{1}{b}\right)^n} \\ \frac{1}{a} &= \sqrt[n]{\left(\frac{1}{a}\right)^n} < \sqrt[n]{\left(\frac{1}{a}\right)^n + \left(\frac{1}{b}\right)^n} < \sqrt[n]{2\left(\frac{1}{a}\right)^n} = \frac{1}{a} \cdot \sqrt[n]{2} \end{aligned}$$

又 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 1$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a^{-n} + b^{-n})^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{a}$$

(方法三) 利用此类极限的一个常用结论:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = \max_{1 \leq i \leq m} \{a_i\}, \text{ 其中 } a_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, m)$$

由于 $0 < a < b$, 则 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a^{-n} + b^{-n})^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{a}\right)^n + \left(\frac{1}{b}\right)^n} = \frac{1}{a}$$

【评注】 本题属 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n}$ ($a_i > 0$) 型极限. 方法一是将底数中最大的提出来; 方法二是利用夹逼定理; 方法三是利用此类极限的一个常用结论, 该结论可用方法一和方法二中的两种方法来证明, 以后该结论可直接用, 会给我们带来方便, 如

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + 2^n + 3^n}, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} (x \geq 0)$$

都可用该结论求出.

3.【答案】 $\frac{1}{2}$.

【解析】 这是一个 n 项和的数列极限,常用的是两种方法——夹逼定理和定积分定义. 由于

$$\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n} < \frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n} < \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}$$

$$\text{而 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n} = \frac{1}{2}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1} = \frac{1}{2},$$

$$\text{则 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n} \right) = \frac{1}{2}.$$

【评注】 本题用到一个常用的求和公式 $1+2+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

4.【解】 (方法一) 因为 $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{n}\right) = \frac{1 + \tan \frac{2}{n}}{1 - \tan \frac{2}{n}}$, 所以

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \tan \frac{2}{n}}{1 - \tan \frac{2}{n}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{2 \tan \frac{2}{n}}{1 - \tan \frac{2}{n}} \right]^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2 \tan \frac{2}{n}}{1 - \tan \frac{2}{n}} \right)^{\frac{1 - \tan \frac{2}{n}}{2 \tan \frac{2}{n}} \cdot \frac{4 \tan \frac{2}{n}}{2} \cdot \frac{1}{1 - \tan \frac{2}{n}}} = e^4. \end{aligned}$$

(方法二) 这是一个 1^∞ 型极限.

原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{n}\right) - 1 \right) \right]^n$, 而

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{n}\right) - 1}{\frac{1}{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{n}\right) - \tan \frac{\pi}{4}}{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sec^2 \xi \cdot \frac{2}{n}}{\frac{1}{n}} \quad \left(\frac{\pi}{4} < \xi < \frac{\pi}{4} + \frac{2}{n} \right) \quad (\text{拉格朗日中值定理}) \\ &= 4 \end{aligned}$$

则原式 $= e^4$.

【评注】 显然方法二简单.

5.【解】 (I) $f'(x) = \frac{x-1}{x^2}$, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $f(x)$ 的唯一驻点 $x = 1$.



又 $f''(1) = \frac{2-x}{x^3} \Big|_{x=1} = 1 > 0$, 故 $f(1) = 1$ 是唯一极小值, 即最小值.

(II) 由(I)的结果知 $\ln x + \frac{1}{x} \geq 1$, 从而有

$$\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1 \leq \ln x_n + \frac{1}{x_n}$$

于是 $x_n \leq x_{n+1}$, 即数列 $\{x_n\}$ 单调增加.

又由 $\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1$, 知 $\ln x_n < 1$, 得 $x_n < e$.

从而数列 $\{x_n\}$ 单调增加, 且有上界, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

记 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 可知 $a \geq x_1 > 0$.

在不等式 $\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1$ 两边取极限, 得 $\ln a + \frac{1}{a} \leq 1$.

又 $\ln a + \frac{1}{a} \geq 1$, 则 $\ln a + \frac{1}{a} = 1$, 可得 $a = 1$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.

【评注】 本题是一道综合题, 其难点是(II), 而求解(II)的关键是建立(I)和(II)的联系.

小结

处理数列极限问题的常用方法:

1. 将所求数列极限问题转化为求函数极限(一般是使用了洛必达法则);
2. 利用夹逼定理求极限(更多的是用在 n 项和的数列极限中);
3. 利用定积分定义求极限(一般用在 n 项和的数列极限问题), 该方法的关键是先提一个因子

$\frac{1}{n}$, 然后确定被积函数和积分区间, 一种常见的形式是: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$;

4. 利用单调有界准则求极限(一般用在由递推关系 $x_{n+1} = f(x_n)$ 所定义的数列);

5. 利用结论 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = \max_{1 \leq i \leq m} \{a_i\}$ (其中 $a_i > 0$) 求极限.

四、确定极限中的参数

10 (2009, 1 题, 4 分) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1 - bx)$ 是等价无穷小量, 则

(A) $a = 1, b = -\frac{1}{6}$.

(B) $a = 1, b = \frac{1}{6}$.

(C) $a = -1, b = -\frac{1}{6}$.

(D) $a = -1, b = \frac{1}{6}$.

【答案】 A.

【解析】 (方法一) 由题设知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin ax}{x^2 \ln(1 - bx)} = 1$. 又



$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin ax}{x^2 \ln(1 - bx)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin ax}{-bx^3} \quad (\text{等价无穷小代换}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - a \cos ax}{-3bx^2} \quad (\text{洛必达法则}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{-3bx^2} \quad (a = 1, \text{否则与题设矛盾}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{-3bx^2} \quad (\text{等价无穷小代换}) \\
 &= -\frac{1}{6b} = 1.
 \end{aligned}$$

则 $b = -\frac{1}{6}$, 故应选(A).

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

(方法二) 由泰勒公式知 $\sin ax = ax - \frac{(ax)^3}{3!} + o(x^3)$, 则

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin ax}{x^2 \ln(1 - bx)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \left[ax - \frac{(ax)^3}{3!} + o(x^3) \right]}{x^2 \ln(1 - bx)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-a)x + \frac{a^3}{3!}x^3 + o(x^3)}{-bx^3} \quad (\text{等价无穷小代换}) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

由此可解 $\begin{cases} 1-a=0, \\ \frac{a^3}{3!} = 1, \\ -b=1, \end{cases}$ 解得 $a=1, b=-\frac{1}{6}$. 故应选(A).

(方法三) 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin ax}{x^2 \ln(1 - bx)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin ax}{-bx^3} = 1$ 知 $a=1$, 则

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin ax}{-bx^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{-bx^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^3}{-bx^3}$$

从而 $b = -\frac{1}{6}$.

III (2013, 1 题, 4 分) 已知极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^k} = c$, 其中 k, c 为常数, 且 $c \neq 0$, 则

(A) $k=2, c=-\frac{1}{2}$.

(B) $k=2, c=\frac{1}{2}$.

(C) $k=3, c=-\frac{1}{3}$.

(D) $k=3, c=\frac{1}{3}$.

【答案】 D.

【解析】 (方法一) 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3}{x^k} = c \neq 0$ 知 $k=3, c=\frac{1}{3}$, 故应选(D).

(方法二) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{kx^{k-1}}$ (洛必达法则)



$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{kx^{k-1}}, \left(1 - \frac{1}{1+x^2} = 1 - (1+x^2)^{-1} \sim x^2\right)$$

由题设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^k} = c$, 其中 k, c 为常数, 且 $c \neq 0$, 可知 $k = 3, c = \frac{1}{3}$.

故应选(D).

【评注】 以上两种方法显然方法一简单. 本题用到一个常用的等价无穷小, 当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$x - \arctan x \sim \frac{1}{3}x^3.$$

12 (2018, 9 题, 4 分) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} \right)^{\frac{1}{\sin kx}} = e$, 则 $k =$ _____.

【答案】 -2.

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} \right)^{\frac{1}{\sin kx}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{-2 \tan x}{1 + \tan x} \right)^{\frac{1}{\sin kx}},$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \tan x}{(1 + \tan x) \sin kx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{kx} = -\frac{2}{k}, \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} \right)^{\frac{1}{\sin kx}} = e^{-\frac{2}{k}}$$

$$\text{则 } -\frac{2}{k} = 1, k = -2.$$

练习题

1. (1994, 数二, 4 分) 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - (ax + bx^2)}{x^2} = 2$, 则

(A) $a = 1, b = -\frac{5}{2}$.

(B) $a = 0, b = -2$.

(C) $a = 0, b = -\frac{5}{2}$.

(D) $a = 1, b = -2$.

2. (1998, 数二, 5 分) 确定常数 a, b, c 的值, 使 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt} = c (c \neq 0)$.

3. (2011, 数二, 10 分) 已知函数 $F(x) = \frac{\int_0^x \ln(1+t^2) dt}{x^a}$, 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 0$, 试求 a

的取值范围.

4. (2013, 数二, 10 分) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小, 求 n 与 a 的值.

5. (2014, 数三, 4 分) 设 $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 若 $p(x) - \tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小, 则下列选项中错误的是

(A) $a = 0$.

(B) $b = 1$.

(C) $c = 0$.

(D) $d = \frac{1}{6}$.

练习题参考答案

1. **【答案】** A.

【解析】 (方法一) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - (ax + bx^2)}{x^2} = \frac{1}{1+x} - (a + 2bx)$ (洛必达法则)

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - (1+2bx)}{2x} \quad (a=1, \text{否则原式极限为 } \infty) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{(1+x)^2} - 2b}{2} \quad (\text{洛必达法则}) \\
 &= -\frac{1+2b}{2} = 2
 \end{aligned}$$

则 $b = -\frac{5}{2}$, 故应选(A).

(方法二) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - (ax+bx^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - ax}{x^2} - b$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - a}{2x} - b \quad (\text{洛必达法则}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} - b \quad (a=1, \text{否则原式极限为 } \infty) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{2x(1+x)} - b = -\frac{1}{2} - b = 2
 \end{aligned}$$

则 $b = -\frac{5}{2}$.

(方法三) 由泰勒公式知 $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - (ax+bx^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-a)x - \left(\frac{1}{2} + b\right)x^2 + o(x^2)}{x^2} = 2$$

$$\text{由此可得} \begin{cases} 1-a=0, \\ -\left(\frac{1}{2} + b\right) = 2, \end{cases} \text{解得 } a=1, b=-\frac{5}{2}.$$

2. 【解】 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt} = c \neq 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} (ax - \sin x) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt = 0$,

从而 $b = 0$.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{\int_0^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - \cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}} \quad (\text{洛必达法则}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - \cos x}{x^2} \quad (\text{等价无穷小代换 } \ln(1+x^3) \sim x^3) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad (a=1, \text{否则原式极限为 } \infty) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} \quad (\text{等价无穷小代换}) \\
 &= \frac{1}{2} = c
 \end{aligned}$$



故 $a = 1, b = 0, c = \frac{1}{2}$.

【评注】 本题中用到两个常用的基本结论:

- (1) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 本题中由此结论得 $a = 1$;
 (2) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在但不为零, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$, 本题中由此结论得 $b = 0$.

$$\begin{aligned} 3. \text{【解】} \quad & \text{因为 } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \ln(1+t^2) dt}{x^a} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{ax^{a-1}} \\ & = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{a(a-1)x^{a-1}} = \frac{2}{a(a-1)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{a-1}}, \end{aligned}$$

由题意 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$, 得 $a > 1$.

$$\begin{aligned} \text{又因为 } \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \ln(1+t^2) dt}{x^a} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x^2)}{ax^{a-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{ax^{a-1}} = \frac{1}{a} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{3-a}, \end{aligned}$$

由题意 $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 0$, 得 $a < 3$. 综上所述, $1 < a < 3$.

【评注】 本题主要考查用洛必达法则和等价无穷小代换求极限及变上限积分求导.

4. 【解】 (方法一)

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}{ax^n} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x + 2 \sin 2x \cdot \cos x \cdot \cos 3x + 3 \sin 3x \cdot \cos x \cdot \cos 2x}{na x^{n-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x + 2 \sin 2x \cdot \cos x \cdot \cos 3x + 3 \sin 3x \cdot \cos x \cdot \cos 2x}{2ax} \quad (n=2) \\ &= \frac{1+4+9}{2a} = \frac{7}{a}, \text{ 则 } a = 7. \end{aligned}$$

(方法二)

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}{ax^n} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left[1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right] \left[1 - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2)\right] \left[1 - \frac{(3x)^2}{2} + o(x^2)\right]}{ax^n} \quad (\text{泰勒公式}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(3x)^2}{2} + o(x^2)}{ax^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{14x^2}{2ax^n} \end{aligned}$$

则 $n = 2, a = 7$.



(方法三)

$$\begin{aligned}
 1 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}{ax^n} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) + \cos x(1 - \cos 2x) + \cos x \cos 2x(1 - \cos 3x)}{ax^n} \\
 &= \frac{1}{a} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x(1 - \cos 2x)}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos 2x(1 - \cos 3x)}{x^2} \right] \quad (n=2) \\
 &= \frac{1}{a} \left[\frac{1}{2} + \frac{2^2}{2} + \frac{3^2}{2} \right] = \frac{7}{a}, \text{ 则 } a = 7.
 \end{aligned}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

5. 【答案】 D.

【解析】 (方法一) 由 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x - x \sim \frac{1}{3}x^3$ 知, $\tan x$ 的泰勒公式为

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{p(x) - \tan x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a + (b-1)x + cx^2 + \left(d - \frac{1}{3}\right)x^3 + o(x^3)}{x^3} = 0,$$

所以 $a = 0, b = 1, c = 0, d = \frac{1}{3}$, 故应选(D).

(方法二) 显然, $a = 0$, 此时

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{p(x) - \tan x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx + cx^2 + dx^3 - \tan x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b + 2cx + 3dx^2 - \sec^2 x}{3x^2}$$

由上式可知, $b = 1$, 否则, 等式右端极限为 ∞ , 则左端极限也为 ∞ , 与题设矛盾.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{p(x) - \tan x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2cx + 3dx^2 - \sec^2 x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2c}{3x} + d - \frac{1}{3}$$

则 $c = 0, d = \frac{1}{3}$. 故应选(D).

小结

对于确定极限中参数的问题, 一般方法是求所给的极限, 确定题中的参数. 有些参数在求极限的过程中可确定, 有些参数在求得极限以后可确定出来. 求极限的方法要根据题中所给极限类型来确定, 一种最常见的类型是“ $\frac{0}{0}$ ”型, 常用的方法有三种: 洛必达法则、等价无穷小代换和泰勒公式.

五、无穷小量及其阶的比较

13 (2019, 1 题, 4 分) 当 $x \rightarrow 0$ 时, 若 $x - \tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小, 则 $k =$

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

【答案】 C.



【解析】 由于当 $x \rightarrow 0$ 时, $x - \tan x \sim -\frac{1}{3}x^3$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x^3} = -\frac{1}{3}$$

所以 $k = 3$, 故应选(C).

14 (2020, 1 题, 4 分) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 下列无穷小量中最高阶是

(A) $\int_0^x (e^{t^2} - 1) dt.$

(B) $\int_0^x \ln(1 + \sqrt{t^3}) dt.$

(C) $\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt.$

(D) $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t} dt.$

【答案】 D.

【解析】 (方法一) 利用结论: 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x = 0$ 某邻域内连续, 且当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \sim g(x)$, 则 $\int_0^x f(t) dt \sim \int_0^x g(t) dt$.

(A) $\int_0^x (e^{t^2} - 1) dt \sim \int_0^x t^2 dt = \frac{1}{3}x^3.$

(B) $\int_0^x \ln(1 + \sqrt{t^3}) dt \sim \int_0^x t^{\frac{3}{2}} dt = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}.$

(C) $\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt \sim \int_0^{\sin x} t^2 dt \sim \int_0^x t^2 dt = \frac{1}{3}x^3.$

(D) $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t} dt \sim \int_0^{1-\cos x} t^{\frac{3}{2}} dt \sim \int_0^{\frac{1}{2}x^2} t^{\frac{3}{2}} dt = \frac{2}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}} x^5.$

故应选(D).

(方法二) 设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $x = 0$ 某邻域内连续, 且当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 分别是 x 的 m 阶和 n 阶无穷小, 则 $\int_0^{\varphi(x)} f(t) dt$ 是 $x \rightarrow 0$ 时的 $n(m+1)$ 阶无穷小.

(A) $\int_0^x (e^{t^2} - 1) dt, m = 2, n = 1$, 则 $n(m+1) = 3.$

(B) $\int_0^x \ln(1 + \sqrt{t^3}) dt, m = \frac{3}{2}, n = 1$, 则 $n(m+1) = \frac{5}{2}.$

(C) $\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt, m = 2, n = 1$, 则 $n(m+1) = 3.$

(D) $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t} dt, m = \frac{3}{2}, n = 2$, 则 $n(m+1) = 5.$

故应选(D).

(方法三) 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (e^{t^2} - 1) dt}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

所以, 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $\int_0^x (e^{t^2} - 1) dt$ 是 3 阶无穷小量.

同理,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \ln(1 + \sqrt{t^3}) dt}{\sqrt{x^5}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + \sqrt{x^3})}{\frac{5}{2} \sqrt{x^3}} = \frac{2}{5}$$

故当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $\int_0^x \ln(1 + \sqrt{t^3}) dt$ 是 $\frac{5}{2}$ 阶无穷小量;

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin^2 x) \cos x}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

故当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt$ 是 3 阶无穷小量;

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t} dt}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\sin^3(1-\cos x)} \sin x}{5x^4} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1-\cos x)^{\frac{3}{2}} x}{5x^4} = \frac{\sqrt{2}}{20}$$

故当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t} dt$ 是 5 阶无穷小量.

综上所述, 正确选项为 (D).

练习题

1. (2011, 数二, 4 分) 已知当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = 3\sin x - \sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小, 则

(A) $k = 1, c = 4$.

(B) $k = 1, c = -4$.

(C) $k = 3, c = 4$.

(D) $k = 3, c = -4$.

2. (2012, 数二, 10 分) 已知函数 $f(x) = \frac{1+x}{\sin x} - \frac{1}{x}$, 记 $a = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

(I) 求 a 的值;

(II) 若当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) - a$ 与 x^k 是同阶无穷小, 求常数 k 的值.

3. (2013, 数二, 4 分) 设 $\cos x - 1 = x \sin \alpha(x)$, 其中 $|\alpha(x)| < \frac{\pi}{2}$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $\alpha(x)$ 是

(A) 比 x 高阶的无穷小.

(B) 比 x 低阶的无穷小.

(C) 与 x 同阶但不等价的无穷小.

(D) 与 x 等价的无穷小.

4. (2014, 数二, 4 分) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 若 $\ln^a(1+2x), (1-\cos x)^{\frac{1}{a}}$ 均是比 x 高阶的无穷小, 则 a 的取值范围是

(A) $(2, +\infty)$.

(B) $(1, 2)$.

(C) $(\frac{1}{2}, 1)$.

(D) $(0, \frac{1}{2})$.

练习题参考答案

1. 【答案】 C.

【解析】 (方法一) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x - \sin 3x}{cx^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\cos x - 3\cos 3x}{ckx^{k-1}}$ (洛必达法则)

$$= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + 3\sin 3x}{ck(k-1)x^{k-2}} \quad (\text{洛必达法则})$$

$$= \frac{1}{c} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin 3x}{2x} \right) \quad (k=3)$$

$$= \frac{1}{c} \left(-\frac{1}{2} + \frac{9}{2} \right) = 1$$



由此得 $c = 4$.

(方法二) 由泰勒公式知

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\sin 3x = 3x - \frac{(3x)^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\begin{aligned} \text{则 } f(x) &= 3\sin x - \sin 3x = 3x - \frac{x^3}{2} - 3x + \frac{(3x)^3}{3!} + o(x^3) \\ &= 4x^3 + o(x^3) \sim 4x^3 \quad (\text{当 } x \rightarrow 0 \text{ 时}). \end{aligned}$$

故 $k = 3, c = 4$.

2. 【解】 (I) 由题意

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+x^2 - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x - \sin x}{x^2} \\ &= 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2} = 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6} \cdot x^3}{x^2} = 1, \quad (x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3) \end{aligned}$$

$$(II) \text{ 因为 } f(x) - a = \frac{1+x}{\sin x} - \frac{1}{x} - 1 = \frac{x+x^2 - \sin x - x \sin x}{x \sin x},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - a}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)(x - \sin x)}{x^{k+2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^3}{x^{k+2}}, \quad (x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3)$$

$$\text{所以当 } k = 1 \text{ 时, 有 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - a}{x^k} = \frac{1}{6}.$$

此时 $f(x) - a$ 与 x 是同阶无穷小 ($x \rightarrow 0$), 因此 $k = 1$.

【评注】 本题中用到一个常用的等价无穷小, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3$. 它给本题的求解带来方便.

3. 【答案】 C.

【解析】 因为 $\cos x - 1 = x \sin \alpha(x)$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

则有 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \alpha(x) = 0$, 又 $|\alpha(x)| < \frac{\pi}{2}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \alpha(x) = 0$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{x} = -\frac{1}{2}$$

故应选(C).

4. 【答案】 B.

【解析】 因为 $\ln^a(1+2x)$, $(1 - \cos x)^{\frac{1}{a}}$ 均是比 x 高阶的无穷小, 且当 $x \rightarrow 0^+$ 时

$$\ln^a(1+2x) \sim (2x)^a = 2^a x^a$$


$$(1 - \cos x)^{\frac{1}{\alpha}} \sim \left(\frac{1}{2}x^2\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} x^{\frac{2}{\alpha}}$$

则 $\alpha > 1$, 且 $\frac{2}{\alpha} > 1$. 由此可得 $1 < \alpha < 2$, 故应选(B).

小结

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

有关无穷小量及其阶的比较主要是两类问题:

1. 无穷小量的比较, 也就是判断一个无穷小量是另外一个无穷小量的高阶、同阶、等价或低阶无穷小;

2. 由两个无穷小量之间的关系(等价、同阶等), 转化为确定极限中的参数问题.

以上两类问题的实质是“ $\frac{0}{0}$ ”型极限问题, 常用方法有以下三种:

(1) 洛必达法则; (2) 等价无穷小代换; (3) 泰勒公式.

六、函数的连续性及间断点类型

15 (2016, 4 题, 4 分) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots, \end{cases}$ 则

(A) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点.

(B) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

(C) $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续但不可导.

(D) $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导.

【答案】 D.

【解析】 $f'_-(0) = 1, f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \quad \left(\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}\right)$

$$1 \leftarrow \frac{1}{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{x} < \frac{1}{\frac{1}{n+1}} \rightarrow 1$$

则 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = 1$.

故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导.

16 (2017, 1 题, 4 分) 若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{ax}, & x > 0, \\ b, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则

(A) $ab = \frac{1}{2}$.

(B) $ab = -\frac{1}{2}$.

(C) $ab = 0$.

(D) $ab = 2$.

【答案】 A.



【解析】要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则需

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{ax} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2}{ax} = \frac{1}{2a}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} b = b$$

即 $\frac{1}{2a} = b$, 从而有 $ab = \frac{1}{2}$.

故应选(A).

练习题

1. (2003, 数二, 10 分) 设函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+ax^3)}{x - \arcsin x}, & x < 0, \\ 6, & x = 0, \\ \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x \sin \frac{x}{4}}, & x > 0 \end{cases}$$

问 a 为何值时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, a 为何值时, $x=0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点?

2. (2001, 数二, 7 分) 求 $\lim_{t \rightarrow x} \left(\frac{\sin t}{\sin x} \right)^{\frac{x}{\sin t - \sin x}}$, 记此极限为 $f(x)$, 求 $f(x)$ 的间断点并指出其类型.

3. (2008, 数二, 4 分) 设函数 $f(x) = \frac{\ln|x|}{|x-1|} \sin x$, 则 $f(x)$ 有

- (A) 1 个可去间断点, 1 个跳跃间断点. (B) 1 个可去间断点, 1 个无穷间断点.
(C) 2 个跳跃间断点. (D) 2 个无穷间断点.

4. (2013, 数三, 4 分) 函数 $f(x) = \frac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

练习题参考答案

1. 【解】 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+ax^3)}{x - \arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax^3}{x - \arcsin x}$ (等价代换)

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3ax^2}{1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \quad (\text{洛必达法则})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3ax^2}{-\frac{1}{2}x^2} \quad (\text{等价无穷小代换})$$

$$= -6a.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x \sin \frac{x}{4}} = 4 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x^2} \quad (\text{等价代换})$$

$$\begin{aligned}
 &= 4 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ae^{ax} + 2x - a}{2x} \quad (\text{洛必达法则}) \\
 &= 4 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a^2 e^{ax} + 2}{2} \quad (\text{洛必达法则}) \\
 &= 2a^2 + 4.
 \end{aligned}$$

令 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, 得 $-6a = 2a^2 + 4$, 解得 $a = -1$ 或 $a = -2$,

当 $a = -1$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 6 = f(0)$, 即 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续,

当 $a = -2$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 12 \neq f(0)$, 则 $x = 0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点.

【评注】 本题求解中用到一个等价无穷小代换, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sim -\frac{1}{2}x^2$, 事实上

$$1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 - (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \sim -\frac{1}{2}x^2.$$

2. **【解】** 先求极限得到 $f(x)$ 的表达式, 这是一个“ 1^∞ ”型极限, 由于

$$\left(\frac{\sin t}{\sin x} \right) = \left(1 + \frac{\sin t - \sin x}{\sin x} \right)$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow x} \frac{\sin t - \sin x}{\sin x} \cdot \frac{x}{\sin t - \sin x} &= \lim_{t \rightarrow x} \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} \\
 \lim_{t \rightarrow x} \left(\frac{\sin t}{\sin x} \right)^{\frac{x}{\sin t - \sin x}} &= e^{\frac{x}{\sin x}}
 \end{aligned}$$

由 $f(x)$ 表达式知 $x = 0$ 及 $x = k\pi (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$ 都是 $f(x)$ 的间断点.

由于 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{x}{\sin x}} = e$, 则 $x = 0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点; 而在 $x = k\pi (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$ 处 $f(x)$ 有一个单侧极限是无穷大, 则 $x = k\pi (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$ 均为第二类间断点, 如在 $x = \pi$ 处, $\lim_{x \rightarrow \pi^-} e^{\frac{x}{\sin x}} = +\infty$, 但 $\lim_{x \rightarrow \pi^+} e^{\frac{x}{\sin x}} = 0$, 显然 $\lim_{x \rightarrow \pi} e^{\frac{x}{\sin x}} = \infty$ 是典型的错误.

3. **【答案】** A.

【解析】 显然 $f(x)$ 只有两个间断点 $x = 0$ 和 $x = 1$, 因为

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln |x|}{|x-1|} \sin x = \lim_{x \rightarrow 0} \ln |x| \cdot \sin x \quad \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x-1|} = 1 \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \ln |x| \cdot x \quad (\text{等价无穷小代换}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln |x|}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \quad (\text{洛必达法则}) \\
 &= -\lim_{x \rightarrow 0} x = 0
 \end{aligned}$$

则 $x = 0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点, 又

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln |x|}{|x-1|} \sin x = \sin 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln [1 + (x-1)]}{x-1} \\
 &= \sin 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-1} \quad (\text{等价无穷小代换}) \\
 &= \sin 1
 \end{aligned}$$



$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln |x|}{|x-1|} \sin x = \sin 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln[1+(x-1)]}{-(x-1)} = \sin 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{-(x-1)} = -\sin 1$,
则 $x=1$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点, 故应选(A).

【评注】 部分考生只考虑 $x=1$ 时 $f(x)$ 的分母为零和 $\lim_{x \rightarrow 0} \ln |x| = -\infty$, 没有仔细分析就选择了(B) 或(D). 判断间断点类型一定要在求出极限后再下结论.

4. 【答案】 C.

【解析】 $f(x) = \frac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|}$ 在 $x=-1, 0, 1$ 处没定义,

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^{x \ln|x|} - 1}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x \ln|x|}{x(x+1)\ln|x|} \\ = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln|x|} - 1}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln|x|}{x(x+1)\ln|x|} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+1} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x \ln|x|} - 1}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln|x|}{x(x+1)\ln|x|} \\ = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2},$$

故 $x=0$ 和 $x=1$ 为可去间断点, 故应选(C).

【评注】 本题主要考查间断点的概念、间断点的分类及求极限的方法.

小结

这里主要有以下三类问题:

1. 讨论函数的连续性

常用的方法有:

- (1) 利用连续的定义(特别是分段函数的分界点);
- (2) 利用连续函数的运算法则(四则、复合及反函数);
- (3) 利用初等函数在其定义区间内都是连续的.

2. 求已知表达式函数的间断点并判别类型

首先求出函数没有定义的点(必为间断点)和分段函数分界点(可疑间断点), 再对以上点按间断点的分类判别其类型.

3. 求由极限式定义的函数的间断点并判别其类型

此类问题首先求出极限得到所要讨论的函数 $f(x)$ 的表达式, 然后再求间断点并判别其类型.

第二章 一元函数微分学

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

本章导读

导数与微分是微分学的两个基本概念,是研究函数局部性态的基础.微分中值定理建立了函数和导数之间的联系,是利用导数研究函数基本性态的理论基础.

其主要内容有:

1. 导数与微分的概念及其几何意义;
2. 连续、可导、可微之间的关系;
3. 微分法(有理运算,复合函数,隐函数,参数方程等);
4. 微分中值定理(罗尔,拉格朗日,柯西,泰勒);
5. 函数基本性态及判定(单调性,极值与最值,曲线的凹凸性与拐点,渐近线).

试题特点

本章考试内容多,考题比例高(一般 20 分左右),有基本概念——导数与微分;基本方法——微分法;基本理论——微分中值定理;应用——函数性态.

本章常考题型

1. 导数概念;
2. 微分法(复合函数,隐函数,参数方程);
3. 函数的单调性与极值;
4. 曲线的凹向与拐点;
5. 方程的根;
6. 证明函数不等式;
7. 微分中值定理证明题.

后三种题型是难点,考研试卷最难的题经常出在这一章,那就是与微分中值定理有关的证明题.

考题详析

一、导数与微分的概念

I (2015, 18 题, 10 分) (I) 设函数 $u(x), v(x)$ 可导, 利用导数定义证明

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

(II) 设函数 $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ 可导, $f(x) = u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$, 写出 $f(x)$ 的求导公式.



【解】(I) 令 $f(x) = u(x)v(x)$, 由导数定义知

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x+\Delta x) + u(x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} v(x+\Delta x) + u(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} \\ &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x). \end{aligned}$$

(II) $f'(x) = u'_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x) + u_1(x)u'_2(x)\cdots u_n(x) + \cdots + u_1(x)u_2(x)\cdots u'_n(x)$.

2 (2018, 1 题, 4 分) 下列函数中, 在 $x=0$ 处不可导的是

(A) $f(x) = |x| \sin |x|$.

(B) $f(x) = |x| \sin \sqrt{|x|}$.

(C) $f(x) = \cos |x|$.

(D) $f(x) = \cos \sqrt{|x|}$.

【答案】 D.

【解析】 由导数定义知

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos \sqrt{|x|} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{2}|x|}{x} = -\frac{1}{2}$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos \sqrt{|x|} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\frac{1}{2}|x|}{x} = \frac{1}{2}$$

则 $f(x) = \cos \sqrt{|x|}$ 在 $x=0$ 处不可导, 故应选(D).

3 (2020, 2 题, 4 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 则

(A) 当 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = 0$, $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

(B) 当 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$, $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

(C) 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = 0$.

(D) 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$.

【答案】 C.

【解析】 (方法一) 直接法

若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 又因为 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 所以 $f(0) = 0$.

而极限条件 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = 0$ 和 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$ 与 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的值没有任何关系, 所以选项

(A) 和 (B) 不是正确答案.

当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时, 由题设条件知 $f(0) = 0$, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0)$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x)}{x} \cdot \frac{x}{\sqrt{|x|}} \right] = f'(0) \cdot 0 = 0$$

综上所述, 应选(C).

(方法二) 排除法

取 $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sqrt{|x|}} = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2} = 0$$

但 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导, 因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续, 则排除选项(A)(B).

若取 $f(x) = x$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 但

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \neq 0$$

排除(D), 故应选(C).

练习题

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

1. (2011, 数二, 4分) 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f(0)=0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} =$

(A) $-2f'(0)$. (B) $-f'(0)$. (C) $f'(0)$. (D) 0.

2. (1996, 数三, 4分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\delta, \delta)$ 内有定义, 若当 $x \in (-\delta, \delta)$ 时, 恒有 $|f(x)| \leq x^2$, 则 $x=0$ 必是 $f(x)$ 的

(A) 间断点. (B) 连续而不可导的点.
(C) 可导的点, 且 $f'(0)=0$. (D) 可导的点, 且 $f'(0) \neq 0$.

3. (1996, 数三, 10分) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - e^{-x}}{x}, & \text{若 } x \neq 0, \\ 0, & \text{若 } x = 0, \end{cases}$ 其中 $g(x)$ 有二阶连续导数, 且

$g(0)=1, g'(0)=-1$.

(1) 求 $f'(x)$;
(2) 讨论 $f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续性.

练习题参考答案

1. 【答案】 B.

【解析】 (方法一) 加项减项凑 $x=0$ 处导数定义

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - x^2 f(0) - 2f(x^3) + 2f(0)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x) - f(0)}{x} - 2 \frac{f(x^3) - f(0)}{x^3} \right] \\ &= f'(0) - 2f'(0) = -f'(0) \end{aligned}$$

(方法二) 拆项用导数定义

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^3)}{x^3}$$

由于 $f(0)=0$, 由导数定义知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0), \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^3)}{x^3} = f'(0)$$



$$\text{则} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} = f'(0) - 2f'(0) = -f'(0).$$

(方法三) 排除法: 选择符合条件的具体函数 $f(x)$, 令 $f(x) = x$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x^3}{x^3} = -1$$

而对于 $f(x) = x, f'(0) = 1$, 显然选项(A)(C)(D) 都是错误的, 故应选(B).

(方法四) 由于 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 则

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x) = f'(0)x + o(x)$$

$$f(x^3) = f'(0)x^3 + o(x^3)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 [f'(0)x + o(x)] - 2[f'(0)x^3 + o(x^3)]}{x^3} \\ &= f'(0) - 2f'(0) = -f'(0) \end{aligned}$$

2. 【答案】 C.

【解析】 (方法一) 直接法:

由 $|f(x)| \leq x^2$ 可知, $f(0) = 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

$$\text{又} \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \frac{x^2}{|x|}, \text{则} \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x)}{x} \right| = 0.$$

那么 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, 即 $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, 故应选(C).

(方法二) 排除法: 取 $f(x) \equiv 0$, 显然符合题设条件, 此时, 选项(A)(B)(D) 显然不正确, 故应选(C).

3. 【解】 (1) 当 $x \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x[g'(x) + e^{-x}] - g(x) + e^{-x}}{x^2} \\ &= \frac{xg'(x) - g(x) + (x+1)e^{-x}}{x^2} \end{aligned}$$

当 $x = 0$ 时,

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x) + e^{-x}}{2x} \quad (\text{洛必达法则}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g''(x) - e^{-x}}{2} = \frac{g''(0) - 1}{2} \end{aligned}$$

所以

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{xg'(x) - g(x) + (x+1)e^{-x}}{x^2}, & x \neq 0, \\ \frac{g''(0) - 1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

(2) 在 $x = 0$ 处

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xg'(x) - g(x) + (x+1)e^{-x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xg''(x) - xe^{-x}}{2x} \\ &= \frac{g''(0) - 1}{2} = f'(0). \end{aligned}$$



所以 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 又 $f'(x)$ 在 $x \neq 0$ 处连续, 故 $f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续.

小结

这里常见的是以下两种问题:

(1) 已知 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 求与 $f(x)$ 在 x_0 点导数定义 $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 有关的极限;

(2) 第(1)种问题的反问题, 即已知与 $f(x)$ 在 x_0 点导数定义 $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 有关的极限存在, 问 $f(x)$ 在 x_0 处是否可导.

二、导数与微分计算

4 (2010, 9 题, 4 分) 设 $\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = \int_0^t \ln(1+u^2) du, \end{cases}$ 则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 0.

【解析】 (方法一) $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\ln(1+t^2)}{-e^{-t}} = -e^t \ln(1+t^2),$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dt} [-e^t \ln(1+t^2)] \cdot \frac{1}{x'(t)} = e^{2t} \left[\frac{2t}{1+t^2} + \ln(1+t^2) \right]$$

$$\text{则 } \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0} = 0.$$

(方法二) 由参数方程求导公式知

$$\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0} = \frac{y''(0)x'(0) - x''(0)y'(0)}{[x'(0)]^3}$$

$$x'(t) = -e^{-t}, x''(t) = e^{-t}, x'(0) = -1, x''(0) = 1$$

$$y'(t) = \ln(1+t^2), y''(t) = \frac{2t}{1+t^2}, y'(0) = 0, y''(0) = 0$$

$$\text{代入上式得 } \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0} = 0.$$

(方法三) 由 $x = e^{-t}$ 得, $t = -\ln x$, 则

$$y = \int_0^{-\ln x} \ln(1+u^2) du$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x} \ln(1+\ln^2 x)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{x^2} \left[\ln(1+\ln^2 x) - \frac{2 \ln x}{1+\ln^2 x} \right]$$

$$\text{当 } t=0 \text{ 时 } x=1, \text{ 则 } \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0} = 0.$$



【评注】 本题是一道参数方程求导的试题,本题中前两种方法是常用的方法.

- 5 (2012, 2 题, 4 分) 设函数 $f(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)$, 其中 n 为正整数, 则 $f'(0) =$
- (A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$. (B) $(-1)^n(n-1)!$.
- (C) $(-1)^{n-1}n!$. (D) $(-1)^nn!$.

【答案】 A.

【解析】 (方法一) 令 $g(x) = (e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)$, 则

$$f(x) = (e^x - 1)g(x)$$

$$f'(x) = e^x g(x) + (e^x - 1)g'(x)$$

$$f'(0) = g(0) = (-1) \cdot (-2) \cdot \cdots \cdot (-(n-1)) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

故应选(A).

(方法二) 由于 $f(0) = 0$, 由导数定义知

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n) \\ &= (-1) \cdot (-2) \cdot \cdots \cdot (-(n-1)) = (-1)^{n-1}(n-1)! \end{aligned}$$

(方法三) 排除法, 令 $n = 2$, 则

$$f(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2)$$

$$f'(x) = e^x(e^{2x} - 2) + 2e^{2x}(e^x - 1)$$

$$f'(0) = (1 - 2) = -1$$

显然(B)(C)(D) 均不正确, 故应选(A).

- 6 (2013, 11 题, 4 分) 设 $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = t \sin t + \cos t, \end{cases}$ (t 为参数), 则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} =$ _____.

【答案】 $\sqrt{2}$.

【解析】 $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t + t \cos t - \sin t}{\cos t} = t,$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 1 \cdot \frac{1}{\cos t} = \frac{1}{\cos t}$$

$$\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}$$

【评注】 本题主要考查参数方程求导, 是一道基本题. 但仍有不少考生填写了错误结果

$\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = 1$. 究其原因, 应该是从 $\frac{dy}{dx} = t$ 得出了错误的结果 $\frac{d^2 y}{dx^2} = 1$. 这是考生在求参数方程所

确定函数二阶导数时常见的错误.

- 7 (2013, 9 题, 4 分) 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $y - x = e^{x(1-y)}$ 确定, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right] =$ _____.

【答案】 1.

【解析】 由 $y - x = e^{x(1-y)}$ 知, $x = 0$ 时, $y = 1$,

$$y' - 1 = e^{x(1-y)} [(1-y) - xy']$$

则当 $x=0$ 时, $y'=1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)}{\frac{1}{n}} = f'(0) = 1$.

【评注】 本题主要考查隐函数求导和导数定义.

8 (2014, 10 题, 4 分) 设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数, 且 $f'(x) = 2(x-1)$, $x \in [0, 2]$, 则 $f(7) =$ _____.

【答案】 1.

【解析】 由 $f'(x) = 2(x-1)$, $x \in [0, 2]$ 知, $f(x) = (x-1)^2 + C$. 又 $f(x)$ 为奇函数, 则 $f(0) = 0$, $C = -1$. $f(x) = (x-1)^2 - 1$

由于 $f(x)$ 以 4 为周期, 则

$$f(7) = f[8 + (-1)] = f(-1) = -f(1) = 1$$

9 (2016, 12 题, 4 分) 设函数 $f(x) = \arctan x - \frac{x}{1+ax^2}$, 且 $f'''(0) = 1$, 则 $a =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{2}$.

【解析】 利用幂级数展开

$$\begin{aligned} f(x) &= \arctan x - \frac{x}{1+ax^2} = \left(x - \frac{x^3}{3} + \cdots\right) - x(1 - ax^2 + \cdots) \\ &= \left(a - \frac{1}{3}\right)x^3 + \cdots \end{aligned}$$

由幂级数展开式的唯一性可知 $a - \frac{1}{3} = \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{1}{6}$, 则 $a = \frac{1}{2}$.

10 (2017, 9 题, 4 分) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, 则 $f^{(3)}(0) =$ _____.

【答案】 0.

【解析】 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 是偶函数, 则 $f'(x)$ 为奇函数, $f''(x)$ 为偶函数, $f^{(3)}(x)$ 为奇函数, 则 $f^{(3)}(0) = 0$.

11 (2020, 10 题, 4 分) 设 $\begin{cases} x = \sqrt{t^2+1}, \\ y = \ln(t + \sqrt{t^2+1}), \end{cases}$ 则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=1} =$ _____.

【答案】 $-\sqrt{2}$.

【解析】 (方法一) 由于

$$dy = \frac{1}{t + \sqrt{t^2+1}} \left(1 + \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right) dt = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt, dx = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt$$

所以 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{t}$, 故

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{t^2} \cdot \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}$$

从而 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=1} = -\sqrt{2}$.



(方法二) 由题意,可只考虑 $t > 0$,从而 $t = \sqrt{x^2 - 1}$,于是 $y = \ln(\sqrt{x^2 - 1} + x)$. 故

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} + 1 \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -x(x^2 - 1)^{-\frac{3}{2}}$$

由于当 $t = 1$ 时, $x = \sqrt{2}$, 所以

$$\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=1} = \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

练习题

1. (2007, 数二, 4 分) 设函数 $y = \frac{1}{2x+3}$, 则 $y^{(n)}(0) =$ _____.

2. (2012, 数三, 4 分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \ln \sqrt{x}, & x \geq 1, \\ 2x-1, & x < 1, \end{cases}$ $y = f(f(x))$, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=e} =$ _____.

3. (2013, 数二, 4 分) 设函数 $f(x) = \int_{-1}^x \sqrt{1-e^t} dt$, 则 $y = f(x)$ 的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 在 $y = 0$ 处的导数 $\left. \frac{dx}{dy} \right|_{y=0} =$ _____.

4. (2007, 数二, 10 分) 已知函数 $f(u)$ 具有二阶导数, 且 $f'(0) = 1$, 函数 $y = y(x)$ 由方程 $y - xe^{y-1} = 1$ 所确定. 设 $z = f(\ln y - \sin x)$, 求 $\left. \frac{dz}{dx} \right|_{x=0}$, $\left. \frac{d^2 z}{dx^2} \right|_{x=0}$.

练习题参考答案

1. 【答案】 $\frac{(-1)^n 2^n n!}{3^{n+1}}$.

【解析】 (方法一) 先求一阶导数 y' , 二阶导数 y'' , 然后归纳 n 阶导数.

$$y = \frac{1}{2x+3} = (2x+3)^{-1}$$

则

$$y' = (-1)(2x+3)^{-2} \cdot 2$$

$$y'' = (-1) \cdot (-2)(2x+3)^{-3} \cdot 2^2$$

由此可归纳得

$$y^{(n)} = (-1)^n n! (2x+3)^{-(n+1)} \cdot 2^n$$

则

$$y^{(n)}(0) = \frac{(-1)^n 2^n n!}{3^{n+1}}$$

(方法二) 利用幂级数展开, 为求 $y^{(n)}(0)$ 将 $y = \frac{1}{2x+3}$ 在 $x = 0$ 处展开为幂级数, 则其展开

式中 x 的 n 次幂项的系数为 $\frac{y^{(n)}(0)}{n!}$, 即可求得 $y^{(n)}(0)$.



$$\begin{aligned}\frac{1}{2x+3} &= \frac{1}{3} \frac{1}{1+\frac{2}{3}x} \\ &= \frac{1}{3} \left[1 - \frac{2}{3}x + \left(\frac{2}{3}x\right)^2 + \cdots + (-1)^n \left(\frac{2}{3}x\right)^n + \cdots \right]\end{aligned}$$

等式右端 x^n 的系数为 $(-1)^n \frac{2^n}{3^{n+1}}$, 则

$$\frac{y^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^n \frac{2^n}{3^{n+1}}$$

$$\text{故 } y^{(n)}(0) = \frac{(-1)^n 2^n n!}{3^{n+1}}.$$

【评注】 本题属于高阶导数计算. 计算高阶导数通常有三种方法

1. 求一阶, 二阶, 然后归纳 n 阶导数;
2. 利用泰勒公式 (适合求具体点高阶导数);
3. 利用已有高阶导数公式:

$$\text{i) } (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\text{ii) } (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\text{iii) } (uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}.$$

$$2. \text{【答案】 } \frac{1}{e}.$$

【解析】 函数 $y = f(f(x))$ 可看做 $y = f(u)$, $u = f(x)$ 的复合, 当 $x = e$ 时,

$$u = f(e) = \ln \sqrt{e} = \frac{1}{2}$$

由复合函数求导法知

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot f'(x)$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=e} = f'\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f'(e) = 2 \cdot \frac{1}{2e} = \frac{1}{e}$$

【评注】 本题主要考查复合函数求导法, 以上解法是直接利用复合函数求导法. 而如果先求出复合函数 $y = f(f(x))$ 的表达式, 然后再求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=e}$, 显然就麻烦多了.

$$3. \text{【答案】 } \frac{1}{\sqrt{1-e^{-1}}}.$$

【解析】 由 $y = f(x) = \int_{-1}^x \sqrt{1-e^t} dt$, 知 $y = 0$ 时, $x = -1$, 根据反函数的求导法则有

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y_x} = \frac{1}{\sqrt{1-e^x}}, \left. \frac{dx}{dy} \right|_{y=0} = \frac{1}{\sqrt{1-e^{-1}}}$$



4. 【解】 在 $y - xe^{y-1} = 1$ 中, 令 $x = 0$ 得 $y = 1$.

等式 $y - xe^{y-1} = 1$ 两边对 x 求导得

$$y' - e^{y-1} - xy'e^{y-1} = 0$$

由 $y - xe^{y-1} = 1$ 可得 $xe^{y-1} = y - 1$, 代入上式得

$$(2 - y)y' - e^{y-1} = 0 \quad (*)$$

由 $x = 0, y = 1$, 得 $y'|_{x=0} = 1$.

在 $(*)$ 式两边对 x 求导得

$$(2 - y)y'' - y'^2 - e^{y-1}y' = 0$$

由 $x = 0, y = 1, y'|_{x=0} = 1$ 得 $y''|_{x=0} = 2$. 因为

$$\frac{dz}{dx} = f'(\ln y - \sin x) \left(\frac{y'}{y} - \cos x \right)$$

故 $\frac{dz}{dx}|_{x=0} = 0$. 又

$$\frac{d^2z}{dx^2} = f''(\ln y - \sin x) \left(\frac{y'}{y} - \cos x \right)^2 + f'(\ln y - \sin x) \left(\frac{y''}{y} - \frac{(y')^2}{y^2} + \sin x \right)$$

所以 $\frac{d^2z}{dx^2}|_{x=0} = f'(0)(2 - 1) = 1$.

微信公众号【顶尖考研】

小结

导数与微分计算属基本运算, 几乎年年都考, 主要有以下几种题型:

1. 复合函数求导;
2. 隐函数求导;
3. 参数方程求导;
4. 高阶导数计算;
5. 分段函数的导数.

三、导数的几何意义

12 (2015, 16 题, 10 分) 设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零. 若对任意的 $x_0 \in I$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线与直线 $x = x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4, 且 $f(0) = 2$, 求 $f(x)$ 的表达式.

【解】 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程为

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

令 $y = 0$ 得, $x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

切线 $x = x_0$ 及 x 轴所围区域的面积为

$$S = \frac{1}{2} f(x_0) \left[x_0 - \left(x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right) \right] = 4$$



$$\text{即 } \frac{1}{2} \frac{f^2(x_0)}{f'(x_0)} = 4 \Rightarrow \frac{1}{2} y^2 = 4y', \frac{8dy}{y^2} = dx \Rightarrow -\frac{8}{y} = x + C,$$

由 $y(0) = 2$ 知, $C = -4$.

则所求曲线为 $y = \frac{8}{4-x}, x \in I$.

练习题

1. (2010, 数二, 4 分) 曲线 $y = x^2$ 与曲线 $y = a \ln x (a \neq 0)$ 相切, 则 $a =$
(A) $4e$. (B) $3e$. (C) $2e$. (D) e .

2. (2002, 数二, 6 分) 已知曲线的极坐标方程是 $r = 1 - \cos \theta$, 求该曲线上对应于 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 处的切线与法线的直角坐标方程.

3. (2013, 数二, 4 分) 曲线 $\begin{cases} x = \arctan t, \\ y = \ln \sqrt{1+t^2} \end{cases}$ 上对应于 $t = 1$ 的点处的法线方程为_____.

4. (2013, 数三, 4 分) 设曲线 $y = f(x)$ 与 $y = x^2 - x$ 在点 $(1, 0)$ 处有公共切线, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n f\left(\frac{n}{n+2}\right) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

练习题参考答案

1. 【答案】 C.

【解析】 设曲线 $y = x^2$ 与曲线 $y = a \ln x (a \neq 0)$ 的公切点为 (x_0, y_0) , 则

$$\begin{cases} x_0^2 = a \ln x_0, \\ 2x_0 = \frac{a}{x_0} \end{cases}$$

由此可得 $x_0 = \sqrt{e}, a = 2e$, 故应选(C).

【评注】 本题主要考查导数的几何意义. 两曲线相切在切点处不仅导数值相同而且函数值相同. 部分考生未能得到正确选项, 可能是只注意到在切点处导数值相等, 而未利用函数值也相等的条件.

2. 【分析】 此类问题的一般方法是将方程 $r = 1 - \cos \theta$ 代入 $\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \end{cases}$ 便可得到曲线的参数方程(θ 为参数), 然后用参数方程求导法求出切线斜率.

【解】 曲线 $r = 1 - \cos \theta$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = (1 - \cos \theta) \cos \theta = \cos \theta - \cos^2 \theta, \\ y = (1 - \cos \theta) \sin \theta = \sin \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \end{cases}$$

令 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 得切点坐标为 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

切线斜率为



$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = \left. \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)} \right|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = \left. \frac{\cos \theta - \cos 2\theta}{-\sin \theta + \sin 2\theta} \right|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = 1$$

则所求切线直角坐标方程为 $y - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = x - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} \right)$, 即

$$x - y + \frac{5}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4} = 0$$

法线的直角坐标方程为 $y - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = - \left[x - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} \right) \right]$, 即

$$x + y + \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$$

3. 【答案】 $y + x = \frac{\pi}{4} + \ln \sqrt{2}$.

【解析】 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}} = t$,

曲线上对应 $t = 1$ 的点处的切线斜率为 1, 因而该点处法线的斜率为 -1 , 于是所求的法线方程为

$$y - \ln \sqrt{2} = - \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$$

即 $y + x = \frac{\pi}{4} + \ln \sqrt{2}$.

【评注】 本题主要考查导数的几何意义和参数方程求导法.

4. 【答案】 -2 .

【解析】 由曲线 $y = f(x)$ 与 $y = x^2 - x$ 在点 $(1, 0)$ 处有公共切线知

$$f(1) = 0, f'(1) = (2x - 1) \Big|_{x=1} = 1$$

$$\text{则 } \lim_{n \rightarrow \infty} n f \left(\frac{n}{n+2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n}{n+2} \cdot \frac{f \left(1 + \frac{-2}{n+2} \right) - f(1)}{\frac{-2}{n+2}} = -2f'(1) = -2.$$

小结

导数的几何意义是切线的斜率. 有关的考题通常是建立曲线的切线方程或法线方程, 其关键是求切线的斜率 k .

1. 若曲线由显式方程 $y = f(x)$ 给出, 则该曲线在 $x = x_0$ 处切线斜率为: $k = f'(x_0)$.

2. 若曲线由 $F(x, y) = 0$ 给出, 则可用隐函数求导法求得: $k = y'(x_0)$.

3. 若曲线由参数方程 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$ 给出, 则曲线对应 $t = t_0$ 处切线斜率为



$$k = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=t_0} = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$$

4. 若曲线由极坐标方程 $r = r(\theta)$ 给出, 此时可得到该曲线参数方程 $\begin{cases} x = r(\theta) \cos \theta, \\ y = r(\theta) \sin \theta, \end{cases}$

$$k = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)}$$

四、函数的单调性、极值与最值

13 (2010, 16 题, 10 分) 求函数 $f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t)e^{-t^2} dt$ 的单调区间与极值.

【解】 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 且

$$f(x) = x^2 \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt - \int_1^{x^2} te^{-t^2} dt$$

$$f'(x) = 2x \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt + 2x^3 e^{-x^4} - 2x^3 e^{-x^4} = 2x \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt$$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 0, x = \pm 1$, 列表如下:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	极小	$\nearrow$	极大	$\searrow$	极小	$\nearrow$

由以上表格可知, $f(x)$ 单调增加区间为 $(-1, 0)$ 和 $(1, +\infty)$; $f(x)$ 单调减少区间为 $(-\infty, -1)$ 和 $(0, 1)$.

$f(x)$ 的极小值为 $f(\pm 1) = \int_1^1 (1-t)e^{-t^2} dt = 0$, 极大值为 $f(0)$,

$$f(0) = - \int_1^0 te^{-t^2} dt = \int_0^1 te^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right)$$

【评注】 本题主要考查变上限积分求导和定积分计算, 以及求函数单调区间与极值的方法. 考的是基本内容和常见问题, 但该题的得分率并不高, 考生的主要问题是

- 1) 不能正确求出 $f'(x) = 2x \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt$ 是最普通的错误;
- 2) 部分考生由于粗心只求出一个驻点 $x = 0$, 漏掉了驻点 $x = \pm 1$;
- 3) 部分考生不能正确表示单调区间, 将单调增加区间写成了 $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$, 单调减少区间写成了 $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.

14 (2014, 16 题, 10 分) 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $y^3 + xy^2 + x^2y + 6 = 0$ 确定, 求 $f(x)$ 的极值.

【解】 方程 $y^3 + xy^2 + x^2y + 6 = 0$ 两端对 x 求导得

$$3y^2y' + y^2 + 2xyy' + 2xy + x^2y' = 0 \quad (1)$$

在(1)式中令 $y' = 0$, 得 $y^2 + 2xy = 0$, 由此可得, $y = 0, y = -2x$, 显然 $y = 0$ 不满足原方程.

将 $y = -2x$ 代入原方程 $y^3 + xy^2 + x^2y + 6 = 0$, 得 $-6x^3 + 6 = 0$, 解得 $x_0 = 1, f(1) = -2, f'(1) = 0$.



对(1)式两端再对 x 求导得

$$6yy'^2 + 3y^2y'' + 4yy' + 2xy'^2 + 2xyy'' + 2y + 4xy' + x^2y'' = 0$$

将 $x = 1, f(1) = -2, f'(1) = 0$ 代入上式得 $f''(1) = \frac{4}{9} > 0$.

则函数 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极小值, 且 $f(1) = -2$.

15 (2017, 2 题, 4 分) 设函数 $f(x)$ 可导, 且 $f(x)f'(x) > 0$, 则

(A) $f(1) > f(-1)$.

(B) $f(1) < f(-1)$.

(C) $|f(1)| > |f(-1)|$.

(D) $|f(1)| < |f(-1)|$.

【答案】 C.

【解析】 (方法一) 直接法

由 $f(x)f'(x) > 0$ 知

$$\left[\frac{1}{2}f^2(x)\right]' = f(x)f'(x) > 0,$$

则 $\frac{1}{2}f^2(x)$ 单调递增, 从而 $f^2(x)$ 单调递增, 由此可知

$$f^2(1) > f^2(-1)$$

上式两端开方得

$$|f(1)| > |f(-1)|$$

(方法二) 排除法

若取 $f(x) = e^x$, 则 $f'(x) = e^x, f(x)f'(x) = e^{2x} > 0, f(1) = e, f(-1) = \frac{1}{e}$.

显然 $f(1) > f(-1), |f(1)| > |f(-1)|$.

由此可知, (B)(D) 选项是错误的.

若取 $f(x) = -e^x$, 则 $f'(x) = -e^x, f(x)f'(x) = e^{2x} > 0, f(1) = -e, f(-1) = -\frac{1}{e}$.

由此知, $f(1) < f(-1)$, (A) 选项是错误的, 故应选(C).

16 (2017, 17 题, 10 分) 已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3 + y^3 - 3x + 3y - 2 = 0$ 确定, 求 $y(x)$ 的极值.

【解】 将方程 $x^3 + y^3 - 3x + 3y - 2 = 0$ 两端对 x 求导得

$$3x^2 + 3y^2y' - 3 + 3y' = 0 \quad ①$$

令 $y' = 0$ 得 $x = \pm 1$, 将 $x = \pm 1$ 代入原方程得 $\begin{cases} x = 1, \\ y = 1, \end{cases} \begin{cases} x = -1, \\ y = 0. \end{cases}$

①式两端再对 x 求导得

$$6x + 6y(y')^2 + 3y^2y'' + 3y'' = 0 \quad ②$$

将 $\begin{cases} x = 1, \\ y = 1, \end{cases} \begin{cases} x = -1, \\ y = 0, \end{cases}$ 及 $y' = 0$ 代入 ② 式得

$y''(1) = -1 < 0, y''(-1) = 2 > 0$, 则 $y = y(x)$ 在 $x = 1$ 处取极大值, $y(1) = 1$, 在 $x = -1$ 处取极小值, $y(-1) = 0$.

17 (2019, 2 题, 4 分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} x|x|, & x \leq 0, \\ x \ln x, & x > 0, \end{cases}$ 则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的

(A) 可导点, 极值点.

(B) 不可导点, 极值点.

(C) 可导点, 非极值点.

(D) 不可导点, 非极值点.

【答案】 B.

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = \infty$ 则 $f'_+(0)$ 不存在, 从而 $x = 0$ 是 $f(x)$ 不可导点.又在 $x = 0$ 的左半邻域 $f(x) = x|x| < 0 = f(0)$, 在 $x = 0$ 的右半邻域 $f(x) = x \ln x < 0 = f(0)$, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取极大值, 故应选(B).

练习题

1. (2009, 数二, 4分) 函数 $y = x^{2x}$ 在区间 $(0, 1]$ 上的最小值为_____.2. (2014, 数二, 10分) 已知函数 $y = y(x)$ 满足微分方程 $x^2 + y^2 y' = 1 - y'$, 且 $y(2) = 0$. 求 $y(x)$ 的极大值与极小值.

练习题参考答案

1. 【答案】 $e^{-\frac{2}{e}}$.

【解析】 因为 $y' = x^{2x}(2 \ln x + 2)$, 令 $y' = 0$ 得驻点 $x = \frac{1}{e}$, 当 $x \in (0, \frac{1}{e})$ 时, $y' < 0$, $y(x)$ 单调减少; 当 $x \in (\frac{1}{e}, 1]$ 时, $y' > 0$, $y(x)$ 单调增加, 则 $y(x)$ 在 $x = \frac{1}{e}$ 处取到区间 $(0, 1]$ 上的最小值, 最小值为 $y(\frac{1}{e}) = e^{-\frac{2}{e}}$.

2. 【解】 由 $x^2 + y^2 y' = 1 - y'$, 得 $y' = \frac{1 - x^2}{1 + y^2}$. 令 $y' = 0$, 得 $x = \pm 1$, 且当 $x < -1$ 时, $y' < 0$; 当 $-1 < x < 1$ 时, $y' > 0$; 当 $x > 1$ 时, $y' < 0$.所以, 函数 $y = y(x)$ 在 $x = -1$ 处取得极小值, 在 $x = 1$ 处取得极大值. 由方程 $x^2 + y^2 y' = 1 - y'$ 得

$$(1 + y^2)y' = 1 - x^2 \quad (1)$$

$$\int (1 + y^2) dy = \int (1 - x^2) dx$$

$$x^3 + y^3 - 3x + 3y = C$$

由 $y(2) = 0$ 得 $C = 2$.

$$x^3 + y^3 - 3x + 3y = 2 \quad (2)$$

由(2)式得

$$y(-1) = 0, y(1) = 1$$

小结

这里主要是三个基本问题:

1. 判断函数单调性的常用的结论有

(1) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导1) 若在 (a, b) 内 $f'(x) > 0 (< 0)$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加(减少);2) 若在 (a, b) 内 $f'(x) \geq 0 (\leq 0)$, 且在 (a, b) 的任意子区间上 $f'(x) \neq 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上

单调增加(减少).

(2) 设 $f(x)$ 在区间 I 上可导, 则 $f(x)$ 在区间 I 上单调不减(增) $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0 (\leq 0)$.

2. 求函数的极值分两步进行

(1) 求出可能的极值点, 即驻点和导数不存在的点;

(2) 对以上两种点用极值充分条件作判定.

3. 求最大最小值这里主要是两类问题

(1) 求连续函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上的最值.

首先求出 $f(x)$ 在 (a, b) 内可能的极值点, 即驻点和导数不存在的点, 然后将可能的极值点上的函数值与两端点函数值 $f(a), f(b)$ 比较, 便可得到 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最值.

若 $f(x)$ 在 (a, b) 内只有唯一的极值点, 且在该点取得极值, 则该极值必为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最值.

(2) 最值的应用题

首先建立目标函数并确定其定义域, 此时问题转化为(1)进一步求解.

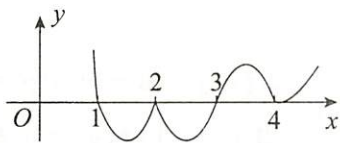
五、曲线的凹向, 拐点及渐近线

18 (2011, 1 题, 4 分) 曲线 $y = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是

(A) $(1, 0)$. (B) $(2, 0)$. (C) $(3, 0)$. (D) $(4, 0)$.

【答案】 C.

【解析】 (方法一) 图示法: 由曲线方程 $y = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 可知, 该曲线和 x 轴有四个交点, 即 $x=1, x=2, x=3, x=4$, 且在 $x=2$ 取极大值, $x=4$ 取极小值, 则拐点只能在另外两个点上, 由右图不难看出 $(3, 0)$ 为拐点, 故应选(C).



(方法二) 记 $g(x) = (x-1)(x-2)^2(x-4)^4$, 则

$$y = (x-3)^3 g(x)$$

设 $g(x)$ 在 $x=3$ 处的泰勒展开式为

$$g(x) = a_0 + a_1(x-3) + \dots$$

则 $y = a_0(x-3)^3 + a_1(x-3)^4 + \dots$, 由该式可知

$$y''(3) = 0, y'''(3) = a_0 \cdot 3! \neq 0$$

因为 $a_0 = g(3) \neq 0$, 由拐点的第二充分条件知 $(3, 0)$ 为拐点.

19 (2012, 1 题, 4 分) 曲线 $y = \frac{x^2+x}{x^2-1}$ 的渐近线的条数为

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

【答案】 C.

【解析】 由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x}{x^2-1} = 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+x}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 1$,

得 $y=1$ 是曲线的一条水平渐近线且曲线没有斜渐近线.

由 $\lim_{x \rightarrow 1} y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x}{x^2-1} = \infty$, 得 $x=1$ 是曲线的一条垂直渐近线,



由 $\lim_{x \rightarrow -1} y = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}$, 得 $x = -1$ 不是曲线的渐近线,

所以曲线有两条渐近线, 故应选(C).

20 (2014, 1 题, 4 分) 下列曲线中有渐近线的是

(A) $y = x + \sin x$.

(B) $y = x^2 + \sin x$.

(C) $y = x + \sin \frac{1}{x}$.

(D) $y = x^2 + \sin \frac{1}{x}$.

【答案】 C.

【解析】 (方法一) 由于 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin \frac{1}{x}}{x} = 1 = a$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x + \sin \frac{1}{x} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} = 0 = b$$

所以曲线 $y = x + \sin \frac{1}{x}$ 有斜渐近线 $y = x$, 故应选(C).

(方法二) 考虑曲线 $y = x + \sin \frac{1}{x}$ 与直线 $y = x$ 纵坐标之差在 $x \rightarrow \infty$ 时的极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x + \sin \frac{1}{x} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} = 0$$

则直线 $y = x$ 是曲线 $y = x + \sin \frac{1}{x}$ 的一条斜渐近线, 故应选(C).

【评注】 由渐近线的定义可知, 直线 $y = ax + b$ 是曲线 $y = f(x)$ 的渐近线的充要条件是 $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax - b] = 0$, 方法二直接利用了该结论.

21 (2015, 1 题, 4 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其二阶导函数 $f''(x)$ 的图形如图所示, 则曲线 $y = f(x)$ 的拐点个数为

(A) 0.

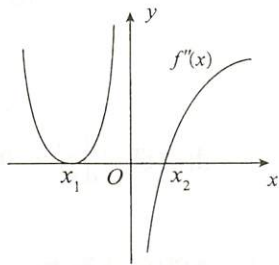
(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

【答案】 C.

【解析】 由如图知 $f''(x_1) = f''(x_2) = 0$, $f''(0)$ 不存在, 其余点上二阶导数 $f''(x)$ 存在且非零, 则曲线 $y = f(x)$ 最多有三个拐点, 但在 $x = x_1$ 的两侧二阶导数不变号, 因此不是拐点, 而在 $x = 0$ 和 $x = x_2$ 的两侧二阶导数变号, 则曲线 $y = f(x)$ 有两个拐点, 故应选(C).



练习题

1. (2000, 数二, 3 分) 设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x) + [f'(x)]^2 = x$, 且 $f'(0) = 0$, 则

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

(C) 点 $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, 点 $(0, f(0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

2. (2004, 数二, 4 分) 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1, \\ y = t^3 - 3t + 1 \end{cases}$ 确定, 则曲线 $y = y(x)$ 向



上凸的 x 取值范围为_____.

3. (2007, 数三, 10 分) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $y \ln y - x + y = 0$ 确定, 试判断曲线 $y = y(x)$ 在点 $(1, 1)$ 附近的凹凸性.

4. (2011, 数二, 10 分) 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \frac{1}{3}t^3 + t + \frac{1}{3}, \\ y = \frac{1}{3}t^3 - t + \frac{1}{3} \end{cases}$ 确定, 求函数 $y = y(x)$

的极值和曲线 $y = y(x)$ 的凹凸区间及拐点.

练习题参考答案

1. 【答案】 C.

【解析】 在关系式 $f''(x) + [f'(x)]^2 = x$ 中令 $x = 0$, 得 $f''(0) = 0$, 等式 $f''(x) + [f'(x)]^2 = x$ 两端对 x 求导得

$$f'''(x) + 2f'(x)f''(x) = 1$$

在上式中令 $x = 0$, 得 $f'''(0) = 1 \neq 0$, 由拐点的第二充分条件得 $(0, f(0))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点, 故应选 (C).

【评注】 1) 从题设可知 $f(x)$ 的三阶导数存在, 这是因为 $f''(x) = -[f'(x)]^2 + x$ 右端可导;

2) 设 $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, 但 $f^{(n)}(x_0) \neq 0 (n \geq 2)$, 则

i) 当 n 是奇数时, 点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点;

ii) 当 n 是偶数时, $x = x_0$ 为函数 $f(x)$ 的极值点, 其中当 $f^{(n)}(x_0) < 0$ 时, $x = x_0$ 为 $f(x)$ 的极大值点, 当 $f^{(n)}(x_0) > 0$ 时, $x = x_0$ 为 $f(x)$ 的极小值点.

2. 【答案】 $(-\infty, 1)$ (或 $(-\infty, 1]$).

【解析】 由于 $\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2 - 3}{3t^2 + 3} = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} = 1 + \frac{-2}{t^2 + 1}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left[1 + \frac{-2}{t^2 + 1} \right] \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4t}{3(t^2 + 1)^3}$$

由题设知 $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, 则 $t < 0$, 又 $x'(t) = 3t^2 + 3 > 0$, 则 $x(t)$ 是 t 的单调增加函数,

$$x(0) = 1, \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} (t^3 + 3t + 1) = -\infty$$

故 x 的取值范围为 $(-\infty, 1)$ (或 $(-\infty, 1]$).

3. 【分析】 问题的关键是要确定在点 $(1, 1)$ 附近函数 $y = y(x)$ 的二阶导数 $y''(x)$ 的正负.

【解】 (方法一) 方程 $y \ln y - x + y = 0$ 两端对 x 求导, 得

$$y' \ln y + 2y' - 1 = 0$$

解得 $y' = \frac{1}{2 + \ln y}$, 再对 x 求导得

$$y'' = \frac{-y'}{y(2 + \ln y)^2} = \frac{-1}{y(2 + \ln y)^3}$$



将 $(x, y) = (1, 1)$ 代入上式得 $y''|_{y=1} = -\frac{1}{8} < 0$.

由于二阶导数 $y''(x)$ 在 $x = 1$ 附近连续, 因此, 在 $x = 1$ 附近 $y''(x) < 0$, 故曲线 $y = y(x)$ 在 $(1, 1)$ 附近是凸的.

(方法二) 方程 $y \ln y - x + y = 0$ 两端对 x 求导, 得

$$y' \ln y + 2y' - 1 = 0$$

再对 x 求导得

$$y'' \ln y + \frac{y'^2}{y} + 2y'' = 0$$

将 $x = 1, y = 1$ 代入以上两式得 $y''(1) = -\frac{1}{8} < 0$.

由于二阶导数 $y''(x)$ 在 $x = 1$ 附近连续, 因此在 $x = 1$ 附近 $y''(x) < 0$, 则曲线 $y = y(x)$ 在点 $(1, 1)$ 附近是凸的.

4. **【解】** 令 $\frac{dy}{dx} = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} = 0$, 得 $t = \pm 1$. 当 $t = 1$ 时, $x = \frac{5}{3}$; 当 $t = -1$ 时, $x = -1$.

令 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4t}{(t^2 + 1)^2} = \frac{4t}{(t^2 + 1)^3} = 0$, 得 $t = 0$, 即 $x = \frac{1}{3}$. 列表如下:

t	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, \frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3}, \frac{5}{3})$	$\frac{5}{3}$	$(\frac{5}{3}, +\infty)$
y'	+	0	-	-	-	0	+
y''	-	-	-	0	+	+	+

由此可知, 函数 $y(x)$ 的极大值为 $y(-1) = y|_{t=-1} = 1$, 极小值为 $y(\frac{5}{3}) = y|_{t=1} = -\frac{1}{3}$.

曲线 $y = y(x)$ 的凹区间为 $(\frac{1}{3}, +\infty)$, 凸区间为 $(-\infty, \frac{1}{3})$.

由于 $y(\frac{1}{3}) = y|_{t=0} = \frac{1}{3}$, 所以曲线 $y = y(x)$ 的拐点为 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

【评注】 本题主要考查由参数方程所确定的函数的极值及所对应的曲线的凹向和拐点.

小结

这里主要是三个基本问题:

1. 确定曲线 $y = f(x)$ 的凹凸区间

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内二阶可导, 那么若在 (a, b) 内 $f''(x) > 0 (< 0)$, 则曲线 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上是凹(凸)的.



2. 求曲线的拐点

拐点只可能出现在两种点处,即二阶导数为零和二阶导数不存在的点处.

(1) 设 $f''(x_0) = 0$ 或 $f''(x_0)$ 不存在,若 $f''(x)$ 在 x_0 点两侧变号,则点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点;若 $f''(x)$ 在 x_0 点两侧不变号,则点 $(x_0, f(x_0))$ 不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(2) 若 $f''(x_0) = 0, f'''(x_0) \neq 0$, 则点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

3. 求曲线的渐近线

渐近线有三种:

(1) 垂直渐近线:若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ (或 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$, 或 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$), 则 $x = x_0$ 为曲线 $y = f(x)$ 的一条垂直渐近线.

(2) 水平渐近线:若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ (或 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$, 或 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$), 则 $y = A$ 为曲线 $y = f(x)$ 的一条水平渐近线.

(3) 斜渐近线:若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b$, 则 $y = ax + b$ 为曲线 $y = f(x)$ 的一条斜渐近线 (若 $x \rightarrow -\infty$ 或 $x \rightarrow +\infty$ 时, 以上两个极限存在, 则该曲线也有斜渐近线 $y = ax + b$).

六、证明函数不等式

22 (2012, 15 题, 10 分) 证明: $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq 1 + \frac{x^2}{2} (-1 < x < 1)$.

【证明】 (方法一) 记 $f(x) = x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x - \frac{x^2}{2} - 1$, 则

$$f'(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{2x}{1-x^2} - \sin x - x$$

$$f''(x) = \frac{4}{1-x^2} + \frac{4x^2}{(1-x^2)^2} - 1 - \cos x = \frac{4}{(1-x^2)^2} - 1 - \cos x$$

当 $-1 < x < 1$ 时, 由于 $\frac{4}{(1-x^2)^2} \geq 4, 1 + \cos x \leq 2$,

所以 $f''(x) \geq 2 > 0$, 从而 $f'(x)$ 单调增加.

又因为 $f'(0) = 0$, 所以, 当 $-1 < x < 0$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $0 < x < 1$, $f'(x) > 0$, 于是 $f(0) = 0$ 是函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内的最小值.

从而当 $-1 < x < 1$ 时, $f(x) \geq f(0) = 0$, 即 $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq 1 + \frac{x^2}{2}$.

(方法二) 令 $f(x) = x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x - \frac{x^2}{2} - 1, (-1 < x < 1)$.

显然, $f(x)$ 是偶函数, 因此, 只要证明

$$f(x) \geq 0, x \in [0, 1)$$

由于 $f'(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{2x}{1-x^2} - \sin x - x, x \in (0, 1)$.

$$\ln \frac{1+x}{1-x} > 0$$



$$\frac{2x}{1-x^2} > 2x = x+x > \sin x + x$$

从而有 $f'(x) > 0, x \in (0,1)$, 又 $f(0) = 0$, 则

$$f(x) \geq 0, x \in [0,1]$$

23 (2014, 2 题, 4 分) 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数, $g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$, 则在区间 $[0,1]$ 上

(A) 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$. (B) 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$.

(C) 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$. (D) 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$.

【答案】 D.

【解析】 (方法一) 由于 $g(0) = f(0), g(1) = f(1)$, 则直线 $y = f(0)(1-x) + f(1)x$ 过点 $(0, f(0))$ 和 $(1, f(1))$, 当 $f''(x) \geq 0$ 时, 曲线 $y = f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上是凹的, 曲线 $y = f(x)$ 应位于过两个端点 $(0, f(0))$ 和 $(1, f(1))$ 的弦 $y = f(0)(1-x) + f(1)x$ 的下方, 即 $f(x) \leq g(x)$. 故应选(D).

(方法二) 令 $F(x) = f(x) - g(x) = f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x$, 则

$$F'(x) = f'(x) + f(0) - f(1), F''(x) = f''(x)$$

当 $f''(x) \geq 0$ 时, $F''(x) \geq 0$, 则曲线 $y = F(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上是凹的. 又 $F(0) = F(1) = 0$, 从而, 当 $x \in [0,1]$ 时, $F(x) \leq 0$, 即 $f(x) \leq g(x)$, 故应选(D).

(方法三) 令 $F(x) = f(x) - g(x) = f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x$, 则

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x)[(1-x)+x] - f(0)(1-x) - f(1)x \\ &= (1-x)[f(x) - f(0)] - x[f(1) - f(x)] \\ &= x(1-x)f'(\xi) - x(1-x)f'(\eta) \quad (\xi \in (0,x), \eta \in (x,1)) \\ &= x(1-x)[f'(\xi) - f'(\eta)] \end{aligned}$$

当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f'(x)$ 单调增加, $f'(\xi) \leq f'(\eta)$, 从而, 当 $x \in [0,1]$ 时, $F(x) \leq 0$, 即 $f(x) \leq g(x)$, 故应选(D).

练习题

1. (1995, 数二, 8 分) 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, 且 $f''(x) > 0$, 证明 $f(x) \geq x$.

2. (2002, 数二, 8 分) 设 $0 < a < b$, 证明不等式

$$\frac{2a}{a^2 + b^2} < \frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{\sqrt{ab}}$$

3. (2006, 数二, 10 分) 证明: 当 $0 < a < b < \pi$ 时,

$$b \sin b + 2 \cos b + \pi b > a \sin a + 2 \cos a + \pi a$$

练习题参考答案

1. **【证明】** (方法一) 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$, 从而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 1$$



由泰勒公式得

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2!}x^2 \quad (\xi \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间}) \\ &= x + \frac{f''(\xi)}{2!}x^2 \end{aligned}$$

又 $f''(x) > 0$, 则 $f(x) \geq x$.

(方法二) 同方法一, 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ 得, $f(0) = 0, f'(0) = 1$, 则

$$f(x) = f(x) - f(0) = f'(c)x, (c \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

由于 $f''(x) > 0$, 则 $f'(x)$ 单调增加,

若 $x > 0$, 则 $f'(c) > f'(0) = 1$, 从而 $f'(c)x \geq f'(0)x = x$,

若 $x < 0$, 则 $f'(c) < f'(0) = 1$, 从而 $f'(c)x \geq f'(0)x = x$, 则对一切 x 有 $f(x) \geq x$.

(方法三) 令 $F(x) = f(x) - x$, 只要证明 $F(x) \geq 0$,

由于 $F'(x) = f'(x) - 1$, 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ 知, $f(0) = 0, f'(0) = 1$, 则 $F'(0) = f'(0) - 1 = 0$.

又 $F''(x) = f''(x) > 0$, 则 $F'(x)$ 单调增加, 从而 $x = 0$ 为 $F(x)$ 唯一的驻点,

又 $F''(0) = f''(0) > 0$, 则 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处取极小值,

且 $x = 0$ 为 $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上唯一的极值点, 则有 $F(0)$ 为 $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的最小值, 又 $F(0) = f(0) - 0 = 0$, 则对一切 x 有 $f(x) \geq x$.

(方法四) 由 $f''(x) > 0$ 知, 曲线 $y = f(x)$ 是凹的, 则曲线在其任一点的切线上方.

由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ 知, $f(0) = 0, f'(0) = 1$, 则曲线在 $(0, 0)$ 点的切线方程为 $y = x$,

从而有 $f(x) \geq x$.

2. 【证明】 先证右边不等式. 设

$$\varphi(x) = \ln x - \ln a - \frac{x-a}{\sqrt{ax}} \quad (x > a > 0)$$

因为

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{a}{2x\sqrt{x}} \right) \\ &= -\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})^2}{2x\sqrt{ax}} < 0 \end{aligned}$$

故当 $x > a$ 时, $\varphi(x)$ 单调减少. 又 $\varphi(a) = 0$, 所以当 $x > a$ 时, $\varphi(x) < \varphi(a) = 0$, 即

$$\ln x - \ln a < \frac{x-a}{\sqrt{ax}}$$

从而当 $b > a$ 时, $\ln b - \ln a < \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$, 即

$$\frac{\ln b - \ln a}{b-a} < \frac{1}{\sqrt{ab}}$$

再证左边不等式.



【证明】(方法一) 设函数 $f(x) = \ln x (x > a > 0)$. 由拉格朗日中值定理知, 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使

$$\frac{\ln b - \ln a}{b - a} = (\ln x)' \Big|_{x=\xi} = \frac{1}{\xi}$$

由于 $0 < a < \xi < b$, 故 $\frac{1}{\xi} > \frac{1}{b} > \frac{2a}{a^2 + b^2}$, 从而

$$\frac{\ln b - \ln a}{b - a} > \frac{2a}{a^2 + b^2}$$

(方法二) 设 $f(x) = (x^2 + a^2)(\ln x - \ln a) - 2a(x - a) (x > a > 0)$, 因为

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x(\ln x - \ln a) + (x^2 + a^2) \frac{1}{x} - 2a \\ &= 2x(\ln x - \ln a) + \frac{(x - a)^2}{x} > 0 \end{aligned}$$

故当 $x > a$ 时 $f(x)$ 单调增加.

又 $f(a) = 0$, 所以当 $x > a$ 时, $f(x) > f(a) = 0$, 即

$$(x^2 + a^2)(\ln x - \ln a) - 2a(x - a) > 0$$

从而当 $b > a > 0$ 时 $(a^2 + b^2)(\ln b - \ln a) - 2a(b - a) > 0$, 即

$$\frac{2a}{a^2 + b^2} < \frac{\ln b - \ln a}{b - a}$$

【评注】 本题主要考查利用函数的单调性和拉格朗日中值定理证明函数不等式.

3. 【证明】 设 $f(x) = x \sin x + 2 \cos x + \pi x, x \in [0, \pi]$, 则

$$f'(x) = \sin x + x \cos x - 2 \sin x + \pi = x \cos x - \sin x + \pi$$

$$f''(x) = \cos x - x \sin x - \cos x = -x \sin x < 0, x \in (0, \pi)$$

故 $f'(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上单调减少, 从而

$$f'(x) > f'(\pi) = 0, x \in (0, \pi)$$

因此, $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上单调增加, 当 $0 < a < b < \pi$ 时, $f(b) > f(a)$, 即

$$b \sin b + 2 \cos b + \pi b > a \sin a + 2 \cos a + \pi a$$

小结

证明函数不等式常用的有以下五种方法:

1. 利用函数单调性;
2. 利用函数的最值;
3. 利用拉格朗日中值定理;
4. 利用泰勒公式;
5. 利用凹凸性(定义或性质).



七、方程根的存在性与个数

24 (2011, 17 题, 10 分) 求方程 $k \arctan x - x = 0$ 不同实根的个数, 其中 k 为参数.

【解】 (方法一) 令 $f(x) = k \arctan x - x$, 则 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数, 则其零点关于原点对称, 因此, 只须讨论 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的零点个数.

$$\text{又 } f(0) = 0, f'(x) = \frac{k}{1+x^2} - 1 = \frac{k-1-x^2}{1+x^2}.$$

(1) 当 $k-1 \leq 0$, 即 $k \leq 1$, $f'(x) < 0 (x > 0)$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上无零点.

(2) 当 $k-1 > 0$, 即 $k > 1$ 时, 在 $(0, \sqrt{k-1})$ 内 $f'(x) > 0$, 又 $f(0) = 0$, 则 $f(\sqrt{k-1}) > 0$, 在 $(\sqrt{k-1}, +\infty)$ 内 $f'(x) < 0$, 又

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (k \arctan x - x) = -\infty$$

则 $f(x)$ 在 $(\sqrt{k-1}, +\infty)$ 内有一个零点.

综上所述, 当 $k \leq 1$ 时原方程有一个实根, 当 $k > 1$ 时, 原方程有三个实根.

(方法二) $f(x) = k \arctan x - x$ 是奇函数, 只需讨论 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内零点个数, 为此, 令

$$g(x) = \frac{x}{\arctan x} - k, x \in (0, +\infty)$$

$g(x)$ 与 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内零点个数相同, 又

$$g'(x) = \frac{\arctan x - \frac{x}{1+x^2}}{(\arctan x)^2} = \frac{(1+x^2)\arctan x - x}{(1+x^2)(\arctan x)^2}$$

令 $\varphi(x) = (1+x^2)\arctan x - x$, 则 $\varphi'(x) = 2x\arctan x > 0, x \in (0, +\infty)$.

$\varphi(0) = 0$, 则 $\varphi(x) > 0$, 从而 $g'(x) > 0$, $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调增加, 又

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{\arctan x} - k \right) = 1 - k$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\arctan x} - k \right) = +\infty$$

(1) 若 $k \leq 1$, $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 无零点, 原方程有唯一实根 $x = 0$;

(2) 若 $k > 1$, $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有唯一零点, 原方程有三个实根.

25 (2017, 18 题, 10 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(1) > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} < 0$, 证明:

0, 证明:

(I) 方程 $f(x) = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内至少存在一个实根;

(II) 方程 $f(x)f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内至少存在两个不同实根.

【证明】 (I) 由 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} < 0$ 及极限保号性知, 存在 $\epsilon > 0$, 在 $(0, \epsilon)$ 内 $\frac{f(x)}{x} < 0$, 则存在 $x_1 \in$

$(0, \epsilon)$ 使 $f(x_1) < 0$, 又 $f(1) > 0$, 由连续函数零点定理知至少存在 $\xi \in (x_1, 1)$, 使 $f(\xi) = 0$, 即方程 $f(x) = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内至少存在一个实根.

(II) 令 $F(x) = f(x)f'(x)$, 则



$$F'(x) = f(x)f''(x) + [f'(x)]^2$$

又由 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 且分母趋于零, 则 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0$, 又 $f(\xi) = 0$,

由罗尔定理知存在 $\eta \in (0, \xi)$, 使 $f'(\eta) = 0$,

则 $F(0) = f(0)f'(0) = 0, F(\eta) = f(\eta)f'(\eta) = 0, F(\xi) = f(\xi)f'(\xi) = 0$.

由罗尔定理知存在 $\eta_1 \in (0, \eta)$, 使 $F'(\eta_1) = 0$, 存在 $\eta_2 \in (\eta, \xi)$, 使 $F'(\eta_2) = 0$, 即 η_1 和 η_2 是方程

$$f(x)f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$$

的两个不同的实根, 原题得证.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

练习题

1. (1996年, 数二, 3分) 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内, 方程 $|x|^{\frac{1}{4}} + |x|^{\frac{1}{2}} - \cos x = 0$

(A) 无实根.

(B) 有且仅有一个实根.

(C) 有且仅有两个实根.

(D) 有无穷多个实根.

2. (2003, 数二, 12分) 讨论曲线 $y = 4\ln x + k$ 与 $y = 4x + \ln^4 x$ 的交点个数.

3. (2011, 数三, 10分) 证明方程 $4\arctan x - x + \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} = 0$ 恰有两个实根.

4. (2012, 数二, 10分) (I) 证明方程 $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$ (n 为大于 1 的整数) 在区间 $(\frac{1}{2}, 1)$ 内有且仅有一个实根;

(II) 记 (I) 中的实根为 x_n , 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求此极限.

练习题参考答案

1. 【答案】 C.

【解析】 令 $f(x) = |x|^{\frac{1}{4}} + |x|^{\frac{1}{2}} - \cos x$, 则 $f(x)$ 是偶函数, 因此, 只需讨论 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内零点的个数.

注意到 $f(0) = -1 < 0, f(\pi) = \pi^{\frac{1}{4}} + \pi^{\frac{1}{2}} + 1 > 0$, 且

$$f'(x) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \sin x > 0, x \in (0, \pi)$$

则 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 内有且仅有一个零点.

当 $x > \pi$ 时, $f(x) = |x|^{\frac{1}{4}} + |x|^{\frac{1}{2}} - \cos x > \pi^{\frac{1}{4}} + \pi^{\frac{1}{2}} - 1 > 0$ 则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有且仅有一个零点, 故方程 $|x|^{\frac{1}{4}} + |x|^{\frac{1}{2}} - \cos x = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有且仅有两个实根.

2. 【分析】 问题等价于讨论方程 $\ln^4 x - 4\ln x + 4x - k = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 内实根的个数.

【解】 令 $\varphi(x) = \ln^4 x - 4\ln x + 4x - k$, 则

$$\varphi'(x) = \frac{4\ln^3 x}{x} - \frac{4}{x} + 4 = \frac{4}{x}(\ln^3 x - 1 + x)$$

显然, $\varphi'(1) = 0$, 且



当 $0 < x < 1$ 时, $\varphi'(x) < 0$, $\varphi(x)$ 单调减少, 当 $1 < x < +\infty$ 时, $\varphi'(x) > 0$, $\varphi(x)$ 单调增加. 又

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln x (\ln^3 x - 4) + 4x - k] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln x (\ln^3 x - 4) + 4x - k] = +\infty$$

$\varphi(1) = 4 - k$, 则

1) 当 $4 - k > 0$, 即 $k < 4$ 时, $\varphi(x)$ 无零点;

2) 当 $4 - k = 0$, 即 $k = 4$ 时, $\varphi(x)$ 有一个零点;

3) 当 $4 - k < 0$, 即 $k > 4$ 时, $\varphi(x)$ 有两个零点.

综上所述, 当 $k < 4$ 时, 两条曲线没有交点; 当 $k = 4$ 时, 两条曲线只有一个交点; 当 $k > 4$ 时, 两条曲线有两个交点.

3. 【证明】 令 $f(x) = 4\arctan x - x + \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$, 则

$$f'(x) = \frac{4}{1+x^2} - 1 = \frac{(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)}{1+x^2}$$

令 $f'(x) = 0$, 解得驻点 $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}$.

由单调性判别法知 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\sqrt{3})$ 上单调减少, 在 $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ 上单调增加, 在 $[\sqrt{3}, +\infty)$ 上单调减少.

因为 $f(-\sqrt{3}) = 0$, 且由上述单调性可知 $f(-\sqrt{3})$ 是 $f(x)$ 在 $(-\infty, \sqrt{3})$ 上的最小值, 所以 $x = -\sqrt{3}$ 是函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, \sqrt{3}]$ 上唯一的零点.

又因为 $f(\sqrt{3}) = 2\left(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right) > 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, 所以由连续函数的介值定理知 $f(x)$ 在 $(\sqrt{3}, +\infty)$ 内存在零点, 且由 $f(x)$ 的单调性知零点唯一.

综上可知, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内恰有两个零点, 即原方程恰有两个实根.

【评注】 本题主要考查确定方程根的个数. 涉及的知识有函数单调性及极值的判定、连续函数的零点定理等, 是一道综合证明题.

4. (I) 【证明】 令 $f(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1$ ($n > 1$), 则 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上连续, 且

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = -\frac{1}{2^n} < 0, f(1) = n - 1 > 0$$

由连续函数的零点定理知, 方程 $f(x) = 0$ 在 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 内至少有一个实根. 当 $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 时,

$$f'(x) = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \cdots + 2x + 1 > 0$$

故 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 内单调增加.



综上所述,方程 $f(x) = 0$ 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 内有且仅有一个实根.

(II)【解】 由 $x_n \in (\frac{1}{2}, 1)$ 知数列 $\{x_n\}$ 有界,又

$$\begin{aligned} x_n^n + x_n^{n-1} + \cdots + x_n &= 1 \\ x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1}^n + x_{n+1}^{n-1} + \cdots + x_{n+1} &= 1 \end{aligned}$$

因为 $x_{n+1}^{n+1} > 0$, 所以

$$x_n^n + x_n^{n-1} + \cdots + x_n > x_{n+1}^n + x_{n+1}^{n-1} + \cdots + x_{n+1}$$

于是有 $x_n > x_{n+1}, n = 1, 2, \cdots$,

即 $\{x_n\}$ 单调减少.

综上所述,数列 $\{x_n\}$ 单调有界,故 $\{x_n\}$ 收敛.

记 $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, 由于 $x_n^n + x_n^{n-1} + \cdots + x_n = 1$, 则 $\frac{x_n - x_n^{n+1}}{1 - x_n} = 1$,

令 $n \rightarrow \infty$ 并注意到 $\frac{1}{2} < x_n < x_1 < 1$, 则有 $\frac{a}{1-a} = 1$,

解得 $a = \frac{1}{2}$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}$.

微信公众号【顶尖考研】

小结

方程根的问题通常是两个基本问题:

1. 根的存在性问题

方法 1 利用连续函数的零点定理

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号, 则方程 $f(x) = 0$ 在 (a, b) 内至少有一个实根;

方法 2 利用罗尔定理

若 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足罗尔定理条件, 且 $F'(x) = f(x), x \in (a, b)$ 则方程 $f(x) = 0$ 在 (a, b) 内至少有一个实根.

2. 根的个数

方法 1 利用函数的单调性

若 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调(可通过 $f'(x) > 0$ 或 $f'(x) < 0$ 判定), 则方程 $f(x) = 0$ 在 (a, b) 内最多有一个实根;

方法 2 利用罗尔定理的推论

若在区间 I 上 $f^{(n)}(x) \neq 0$, 则方程 $f(x) = 0$ 在区间 I 上至多有 n 个实根.

八、微分中值定理有关的证明题

26 (2009, 18 题, 11 分) (I) 证明拉格朗日中值定理: 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 则存在点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$;



(II) 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 在 $(0, \delta)$ ($\delta > 0$) 内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = A$, 则 $f'_+(0)$ 存在, 且 $f'_+(0) = A$.

【证明】(I) 令 $F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)$, 由题设知 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且

$$F(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(a-a) = f(a)$$

$$F(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(b-a) = f(a)$$

根据罗尔定理, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 即

$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = 0$$

故 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$.

(II) (方法一)

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(\xi), \xi \in (0, x)$$

由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = A$, 且当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $\xi \rightarrow 0^+$, 所以

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow 0^+} f'(\xi) = A$$

故 $f'_+(0)$ 存在, 且 $f'_+(0) = A$.

(方法二) $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} \quad (\text{右导数定义})$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{1} \quad (\text{洛必达法则})$$

$$= A.$$

【评注】 辅助函数也可构造为 $F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}x$, $F(x) = [f(b) - f(a)]x - (b-a)f(x)$ 等.

27 (2013, 18 题, 10 分) 设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(1) = 1$, 证明:

(I) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = 1$;

(II) 存在 $\eta \in (-1, 1)$, 使得 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$.

【证明】(I) 因为 $f(x)$ 是区间 $[-1, 1]$ 上的奇函数, 所以 $f(0) = 0$.

因为函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上可导, 根据拉格朗日中值定理, 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得

$$f(1) - f(0) = f'(\xi)$$

又因为 $f(1) = 1$, 所以 $f'(\xi) = 1$.

(II) (方法一) 因为 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $f'(x)$ 是偶函数, 故 $f'(-\xi) = f'(\xi) = 1$.

令 $F(x) = [f'(x) - 1]e^x$, 则 $F(x)$ 可导, 且 $F(-\xi) = F(\xi) = 0$.

根据罗尔定理, 存在 $\eta \in (-\xi, \xi) \subset (-1, 1)$, 使得 $F'(\eta) = 0$.

由 $F'(\eta) = [f''(\eta) + f'(\eta) - 1]e^\eta$ 且 $e^\eta \neq 0$, 得 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$.

(方法二) 因为 $f(x)$ 是 $[-1, 1]$ 上的奇函数, 所以 $f'(x)$ 是偶函数,



令 $F(x) = f'(x) + f(x) - x$, 则 $F(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上可导, 且

$$F(1) = f'(1) + f(1) - 1 = f'(1)$$

$$F(-1) = f'(-1) + f(-1) + 1 = f'(1) - f(1) + 1 = f'(1)$$

由罗尔定理可知, 存在 $\eta \in (-1, 1)$, 使得 $F'(\eta) = 0$.

由 $F'(x) = f''(x) + f'(x) - 1$, 知

$$f''(\eta) + f'(\eta) - 1 = 0, \text{ 即 } f''(\eta) + f'(\eta) = 1$$

【方法三】 因为 $f(x)$ 是 $[-1, 1]$ 上的奇函数, 所以 $f'(x)$ 是偶函数, $f''(x)$ 是奇函数, 由 (I) 知, 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = 1$.

令 $F(x) = f'(x) + f(x) - x$, 则 $F'(x) = f''(x) + f'(x) - 1$,

$$F'(\xi) = f''(\xi) + f'(\xi) - 1 = f''(\xi)$$

$$F'(-\xi) = f''(-\xi) + f'(-\xi) - 1 = -f''(\xi)$$

当 $f''(\xi) = 0$ 时, $f''(\xi) + f'(\xi) - 1 = 0$, 即 $f''(\xi) + f'(\xi) = 1$. 结论得证.

当 $f''(\xi) \neq 0$ 时, $F'(\xi)F'(-\xi) = -[f''(\xi)]^2 < 0$,

根据导函数的介值性, 存在 $\eta \in (-\xi, \xi) \subset (-1, 1)$, 使得 $F'(\eta) = 0$. 即

$$f''(\eta) + f'(\eta) - 1 = 0$$

故 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$.

【评注】 本题是一道微分中值定理的证明题, 其难点在于 (II) 中辅助函数的构造. 欲证 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$, 只要证 $f''(\eta) + (f'(\eta) - 1) = 0$, 即 $[(f'(x) - 1)' + (f'(x) - 1)]|_{x=\eta} = 0$, 因此, 应考虑辅助函数 $F(x) = [f'(x) - 1]e^x$; 另一种思路是欲证 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$, 只要证 $f''(\eta) + f'(\eta) - 1 = 0$, 因此, 应考虑辅助函数 $F(x) = f'(x) + f(x) - x$.

方法三中用到达布定理(即导函数的介值性定理), 这个定理不是《考试大纲》要求的考试内容, 部分考生给出了此种解法, 只要书写正确, 不影响得分.

28 (2020, 19 题, 10 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上具有连续导数, $f(0) = f(2) = 0$, $M =$

$\max_{x \in [0, 2]} \{|f(x)|\}$, 证明:

(I) 存在 $\xi \in (0, 2)$, 使得 $|f'(\xi)| \geq M$.

(II) 若对任意的 $x \in (0, 2)$, $|f'(x)| \leq M$, 则 $M = 0$.

【证明】 (I) 设 $|f(c)| = M$. 若 $c = 0$ 或 $c = 2$, 则 $M = |f(c)| = 0$.

一般地, 当 $M = 0$ 时, $f(x) \equiv 0$, 对任意的 $\xi \in (0, 2)$, 均有 $|f'(\xi)| \geq M$.

当 $M > 0$ 且 $|f(c)| = M$ 时, 必有 $c \in (0, 2)$.

若 $c \in (0, 1]$, 由拉格朗日中值定理知存在 $\xi \in (0, c)$, 使

$$f'(\xi) = \frac{f(c) - f(0)}{c - 0} = \frac{f(c)}{c}$$

从而有 $|f'(\xi)| = \frac{|f(c)|}{c} = \frac{M}{c} \geq M$.

若 $c \in (1, 2]$, 同理知存在 $\xi \in (c, 2) \subseteq (1, 2)$, 使

$$f'(\xi) = \frac{f(2) - f(c)}{2 - c} = \frac{-f(c)}{2 - c}$$



从而有 $|f'(\xi)| = \frac{|f(c)|}{2-c} = \frac{M}{2-c} \geq M$.

综上所述,存在 $\xi \in (0, 2)$, 使得 $|f'(\xi)| \geq M$.

(II) $|f(c)| = M$.

当 $c = 0$ 或 2 时, $M = 0$; (反证法) 不妨设 $M > 0$, 则 $c \in (0, 2)$, 当 $c \neq 1$ 时, 由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi_1 \in (0, c)$, $\xi_2 \in (c, 2)$, 使得

$$\begin{aligned} f(c) - f(0) &= f'(\xi_1)c, \text{ 其中 } 0 < \xi_1 < c \\ f(2) - f(c) &= f'(\xi_2)(2-c), \text{ 其中 } c < \xi_2 < 2 \end{aligned}$$

则 $M = |f(c)| = |f'(\xi_1)|c \leq Mc$, $M = |f(2) - f(c)| = |f'(\xi_2)|(2-c) \leq M(2-c)$ 皆成立, 若 $0 < c < 1$, 显然 $M = |f(c)| = |f'(\xi_1)|c \leq Mc$ 不对;

若 $1 < c < 2$, 显然 $M = |f(2) - f(c)| = |f'(\xi_2)|(2-c) \leq M(2-c)$ 不对, 即上述式子至少有一个不成立, 矛盾, 故 $M = 0$.

当 $c = 1$ 时, 此时 $|f(1)| = M$, 易知 $f'(1) = 0$.

若 $f(1) = M$, 设 $G(x) = f(x) - Mx$, $0 \leq x \leq 1$, $G'(x) = f'(x) - M \leq 0$,

从而 $G(x)$ 单调递减又 $G(0) = G(1) = 0$, 从而 $G(x) = 0$, 即 $f(x) = Mx$, $0 \leq x \leq 1$,

因此, $f'(1) = M$, 从而 $M = 0$. 同理, $f(1) = -M$ 时, $M = 0$. 综上, $M = 0$.

【评注】 本题对综合应用相关知识解决具体问题的能力有较高要求, 为考生提供了充分展示的机会. 本题证明完全的考生并不多, 复习时值得借鉴的问题主要有

① 部分考生不能正确地理解题意, 不会充分利用题设条件, 不会将条件迁移变化. 如有的考生始终没有将条件 $M = \max_{x \in [0, 2]} |f(x)|$ 转化为: 存在 $x_0 \in (0, 2)$ 使得 $|f(x_0)| = M$.

② 部分考生已经将条件 $M = \max_{x \in [0, 2]} |f(x)|$ 转化为: 存在 $x_0 \in (0, 2)$ 使得 $|f(x_0)| = M$, 并且都写出了 $f(x_0) - f(0) = f'(\xi)x_0$ 或 $f(x_0) - f(2) = f'(\xi)(x_0 - 2)$, 但却想不明白这两个等式与所证结论之间的关系.

③ 部分考生深受平时套路练习的影响, 在第(I)问中, 见到 $f(0) = f(2) = 0$, 就写出“存在 $\xi \in (0, 2)$ 使得 $f'(\xi) = 0$ ”, 根本不考虑这与要证的结论是否有关系.

④ 第(II)问, 大部分考生没有正确的求解思路, 只是在答卷上写写画画, 写出的东西与题目解答没有什么关系. 也有考生想到了反证法, 但却不知如何利用条件推出矛盾.

练习题

1. (1999, 数三, 7分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = f(1) = 0$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$. 试证

(I) 存在 $\eta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 使 $f(\eta) = \eta$;

(II) 对任意实数 λ , 必存在 $\xi \in (0, \eta)$, 使得 $f'(\xi) - \lambda(f(\xi) - \xi) = 1$.

2. (2010, 数三, 10分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上连续, 在 $(0, 3)$ 内存在二阶导数, 且

$$2f(0) = \int_0^2 f(x) dx = f(2) + f(3).$$



(I) 证明: 存在 $\eta \in (0, 2)$, 使 $f(\eta) = f(0)$;

(II) 证明: 存在 $\xi \in (0, 3)$, 使得 $f''(\xi) = 0$.

3. (1998, 数三, 6分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f'(x) \neq 0$. 试证存在 $\xi, \eta \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \frac{e^b - e^a}{b - a} e^{-\eta}$$

4. (1999, 数二, 8分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1, 1]$ 上具有三阶连续导数, 且 $f(-1) = 0, f(1) = 1, f'(0) = 0$, 证明: 在开区间 $(-1, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 使 $f'''(\xi) = 3$.

练习题参考答案

1. 【证明】 (I) 要证 $f(\eta) = \eta$, 即要证 $f(\eta) - \eta = 0$, 令 $F(x) = f(x) - x$, 由题设知 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 又 $F\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} > 0, F(1) = f(1) - 1 = -1 < 0$ 由连续函数零点定理知, 存在 $\eta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 使 $F(\eta) = 0$ 即 $f(\eta) = \eta$.

(II) 为证存在 $\xi \in (0, \eta)$, 使得 $f'(\xi) - \lambda[f(\xi) - \xi] = 1$, 也就是要证 $[f'(\xi) - 1] - \lambda[f(\xi) - \xi] = 0$, 令 $\varphi(x) = e^{-\lambda x}[f(x) - x]$, 则 $\varphi(x)$ 在 $[0, \eta]$ 上满足罗尔定理条件, 由罗尔定理知存在 $\xi \in (0, \eta)$, 使 $\varphi'(\xi) = 0$. 即 $e^{-\lambda \xi}[(f'(\xi) - 1) - \lambda(f(\xi) - \xi)] = 0$, 但 $e^{-\lambda \xi} \neq 0$, 则 $[f'(\xi) - 1] - \lambda[f(\xi) - \xi] = 0$, 故 $f'(\xi) - \lambda[f(\xi) - \xi] = 1$.

2. 【分析】 对(I) 只要证明存在 $\eta \in (0, 2)$, 使 $\int_0^2 f(x) dx = 2f(\eta)$, 这是积分中值定理的推广, 因为这里要求 η 属于开区间 $(0, 2)$, 而不是闭区间 $[0, 2]$,

对(II) 只要能证明 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上有三个点函数值相等, 反复用罗尔定理即可证明.

【证明】 (I) 设 $F(x) = \int_0^x f(t) dt, (0 \leq x \leq 2)$, 则

$$\int_0^2 f(x) dx = F(2) - F(0)$$

由拉格朗日中值定理知, 存在 $\eta \in (0, 2)$, 使

$$F(2) - F(0) = 2F'(\eta) = 2f(\eta)$$

即

$$\int_0^2 f(x) dx = 2f(\eta)$$

由题设 $2f(0) = \int_0^2 f(x) dx$ 知, $f(\eta) = f(0)$.

(II) 由于 $f(x)$ 在 $[2, 3]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[2, 3]$ 上有最大值 M 和最小值 m , 从而有

$$m \leq \frac{f(2) + f(3)}{2} \leq M$$

由连续函数介值定理知, 存在 $c \in [2, 3]$, 使

$$f(c) = \frac{f(2) + f(3)}{2}$$



由(I)的结果知

$$f(0) = f(\eta) = f(c), (0 < \eta < c)$$

根据罗尔定理,存在 $\xi_1 \in (0, \eta), \xi_2 \in (\eta, c)$, 使

$$f'(\xi_1) = 0, f'(\xi_2) = 0$$

再根据罗尔定理,存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (0, 3)$, 使

$$f''(\xi) = 0$$

【评注】 本题是一道综合题,主要考查罗尔定理、拉格朗日中值定理、连续函数的最大最小值定理及介值定理的应用.考生的主要错误是

(1) 部分考生在证(I)时,直接用一般教材上的积分中值定理得

$$\int_0^2 f(x) dx = 2f(\eta), (0 \leq \eta \leq 2)$$

由此得 $f(\eta) = f(0)$, 但 η 的范围没有说明在开区间 $(0, 2)$ 内.

(2) 部分考生在证明(II)时,将题设条件“ $\frac{f(2)+f(3)}{2} = f(0)$ ”变形为“ $f(2) - f(0) + f(3) - f(0) = 0$ ”,由拉格朗日定理得 $2f'(\xi_1) + 3f'(\xi_2) = 0, \xi_1 \in (0, 2), \xi_2 \in (0, 3)$. 由此推得 $f'(\xi_1)$ 与 $f'(\xi_2)$ 异号,再由导函数 $f'(x)$ 的介值性知存在 $\xi_3 \in (\xi_1, \xi_2)$, 使 $f'(\xi_3) = 0$. 由(I)的结论易推得存在 $\xi_4 \in (0, \eta)$, 使 $f'(\xi_4) = 0$. 从而存在 $\xi \in (\xi_4, \xi_3)$, 使 $f''(\xi) = 0$.

由于上述 ξ_1, ξ_2 存在的区间具有公共部分,不能保证 ξ_1, ξ_2 是两个不同的点,所以这个证明是不对的.

由(I)的证明可得到一个“升级版”积分中值定理:

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,则

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a), (a < \xi < b)$$

注意这里的 ξ 是在开区间,该结论以后可直接用,在很多问题中会带来方便.

3. **【分析】** 这种证明存在两个点 $\xi, \eta \in (a, b)$ (即双中值),又不要求 $\xi \neq \eta$,往往在 (a, b) 上要用两次中值定理,一般是用拉格朗日中值定理和柯西中值定理,为此,把含有 ξ 和含有 η 的项分离到等式两边作分析,即 $f'(\xi) = \frac{e^b - e^a}{b-a} \frac{f'(\eta)}{e^\eta}$.

【证明】 对 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上用拉格朗日中值定理,存在 $\xi \in (a, b)$, 使

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$

对 $f(x)$ 和 e^x 在 $[a, b]$ 上用柯西中值定理,存在 $\eta \in (a, b)$, 使

$$\frac{f(b) - f(a)}{e^b - e^a} = \frac{f'(\eta)}{e^\eta}$$

$$\text{即 } f(b) - f(a) = (e^b - e^a) \cdot \frac{f'(\eta)}{e^\eta},$$

$$\text{从而有 } (b-a)f'(\xi) = (e^b - e^a) \frac{f'(\eta)}{e^\eta}, \text{ 故}$$



$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \frac{e^b - e^a}{b - a} e^{-\eta}$$

4. 【证明】 由于 $f(x)$ 三阶可导, 可考虑泰勒公式; 又 $f'(0) = 0$, 应在 $x = 0$ 处展开

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(\eta)}{3!}x^3, (\eta \text{ 在 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

在上式中分别取 $x = 1$ 和 $x = -1$,

$$1 = f(1) = f(0) + \frac{f''(0)}{2!} + \frac{f'''(\eta_1)}{3!}, (0 < \eta_1 < 1)$$

$$0 = f(-1) = f(0) + \frac{f''(0)}{2!} - \frac{f'''(\eta_2)}{3!}, (-1 < \eta_2 < 0)$$

两式相减得 $f'''(\eta_1) + f'''(\eta_2) = 6$, 即 $\frac{f'''(\eta_1) + f'''(\eta_2)}{2} = 3$.

由于 $f'''(x)$ 连续, 则 $f'''(x)$ 在闭区间 $[\eta_2, \eta_1]$ 上有最大值 M 和最小值 m . 则

$$m \leq \frac{f'''(\eta_1) + f'''(\eta_2)}{2} \leq M$$

由连续函数介值定理知, 存在 $\xi \in [\eta_2, \eta_1] \subset (-1, 1)$, 使

$$f'''(\xi) = \frac{f'''(\eta_1) + f'''(\eta_2)}{2} = 3$$

【评注】 本题是一道综合题, 既要用到泰勒公式, 还要用到有限闭区间上连续函数的最大值定理和介值定理, 比较难. 得分率较低, 主要问题有:

1) 在泰勒公式中将 $x = -1$ 和 $x = 1$ 代入后, 把 η_1 和 η_2 不加区分都写成 ξ , 似乎很快得到证明. 但这显然是错误的, 由证明过程可知 η_1 和 η_2 分别位于不同区间, 是绝对不可能相等的.

2) 构造辅助函数 $F(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^3$, 试图连续使用罗尔定理达到目的, 但证不出来.

若能构造一个三次多项式 $g(x)$, 使 $g(-1) = f(-1)$, $g(1) = f(1)$, $g(0) = f(0)$, $g'(0) = f'(0)$, 反复用罗尔定理可证明本题.

令 $g(x) = \frac{x^2(x+1)}{2} + (1-x^2)f(0)$, 显然, $g(x)$ 符合以上要求,

令 $F(x) = f(x) - g(x)$, 则

$$F(-1) = F(0) = F(1) = 0, F'(0) = 0$$

在区间 $[-1, 0]$ 和 $[0, 1]$ 上分别对 $F(x)$ 用罗尔定理, 则存在 $\eta_1 \in (-1, 0)$, $\eta_2 \in (0, 1)$ 使 $F'(\eta_1) = F'(\eta_2) = 0$

在区间 $[\eta_1, 0]$ 和 $[0, \eta_2]$ 上分别对 $F'(x)$ 用罗尔定理, 则存在 $\xi_1 \in (\eta_1, 0)$, $\xi_2 \in (0, \eta_2)$ 使 $F''(\xi_1) = F''(\xi_2) = 0$

在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上对 $F''(x)$ 用罗尔定理, 则存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$, 使 $F'''(\xi) = 0$,

又 $F'''(x) = f'''(x) - 3$, 则 $f'''(\xi) - 3 = 0$,

故 $f'''(\xi) = 3$.



小结

微分中值定理证明题通常主要是三类问题:

1. 证明存在一个点 ξ , 使 $F[\xi, f(\xi), f'(\xi)] = 0$.

这类问题一般是构造辅助函数用罗尔定理, 常用的辅助函数有:

要证明的结论	可考虑的辅助函数
$\xi f'(\xi) + f(\xi) = 0$	$xf(x)$
$\xi f'(\xi) + nf(\xi) = 0$	$x^n f(x)$
$\xi f'(\xi) - f(\xi) = 0$	$\frac{f(x)}{x}$
$\xi f'(\xi) - nf(\xi) = 0$	$\frac{f(x)}{x^n}$
$f'(\xi) + \lambda f(\xi) = 0$	$e^{\lambda x} f(x)$
$f'(\xi) + f(\xi) = 0$	$e^x f(x)$
$f'(\xi) - f(\xi) = 0$	$e^{-x} f(x)$

2. 证明存在两个点 ξ, η (双中值) 使 $F(\xi, f(\xi), f'(\xi), \eta, f(\eta), f'(\eta)) = 0$.

这里又可分为两种问题:

(1) 不要求 $\xi \neq \eta$

这种问题通常是在同一区间 $[a, b]$ 上用两次微分中值定理, 一般是用拉格朗日定理和柯西定理, 具体如何用要将要证结论中含有 ξ 的项和含有 η 的项分离开然后再确定.

(2) 要求 $\xi \neq \eta$

这种问题不能在同一区间 $[a, b]$ 上用两次中值定理, 因为无法证明 $\xi \neq \eta$. 通常要将原区间 $[a, b]$ 分成两个区间 $[a, c]$ 和 $[c, b]$, 然后在 $[a, c]$ 和 $[c, b]$ 上分别用拉格朗日定理. 这里分点 c 的选取是关键.

3. 有关泰勒中值定理的证明题

一般说来, 当题设条件或要证的结论中出现二阶或二阶以上导数往往要用泰勒中值定理.



第三章 一元函数积分学

本章导读

一元函数积分学是微积分的另一个主要内容. 与微分学不同, 积分是研究函数整体性质的. 其中不定积分是微分的逆运算, 定积分是一种和式的极限, 微积分基本定理和牛顿-莱布尼茨公式阐明了微分学和积分学的内在联系, 换元法和分部积分法是计算不定积分和定积分的两种主要方法, 微元法是用定积分解决几何、物理等问题的一种常用的基本方法. 一元函数积分是多元函数积分的基础.

其主要内容

- (1) 不定积分与原函数的概念, 求不定积分的两种主要方法——换元法, 分部积分法;
- (2) 定积分的概念、性质及计算方法(换元、分部), 变上限积分及其导数;
- (3) 反常积分的概念与计算;
- (4) 定积分应用(几何、物理).

试题特点

定积分与不定积分是积分学的两个基本概念, 计算不定积分和定积分是微积分的一种基本运算, 是考研的一个重点, 定积分应用是考研试卷中应用题考得最多的一个内容.

本章常考题型

- (1) 不定积分、定积分及反常积分的计算;
- (2) 变上限积分及其应用;
- (3) 用定积分计算几何、物理量;
- (4) 一元微积分学的综合题.

考题详析

一、不定积分的计算

1 (2016, 2 题, 4 分) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2(x-1), & x < 1, \\ \ln x, & x \geq 1, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 的一个原函数是

- (A) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x - 1), & x \geq 1. \end{cases}$ (B) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x + 1) - 1, & x \geq 1. \end{cases}$
- (C) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x + 1) + 1, & x \geq 1. \end{cases}$ (D) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x - 1) + 1, & x \geq 1. \end{cases}$



【答案】 D.

$$\text{【解析】 } F(x) = \begin{cases} \int 2(x-1)dx, & x < 1 \\ \int \ln x dx, & x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} (x-1)^2 + C_1, & x < 1, \\ x(\ln x - 1) + C_2, & x \geq 1, \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} [(x-1)^2 + C_1] = C_1, \lim_{x \rightarrow 1^+} [x(\ln x - 1) + C_2] = -1 + C_2$$

则 $C_1 = -1 + C_2$, 令 $C_1 = C$, 则 $C_2 = 1 + C$,

$$F(x) = \begin{cases} (x-1)^2 + C, & x < 1, \\ x(\ln x - 1) + 1 + C, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{令 } C = 0, \text{ 则 } F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x - 1) + 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

故应选(D).

2 (2018, 15 题, 10 分) 求不定积分 $\int e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} dx$.

【解】 令 $\sqrt{e^x - 1} = t$, 则 $e^x = 1 + t^2, x = \ln(1 + t^2), dx = \frac{2t}{1 + t^2} dt$.

$$\begin{aligned} \int e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} dx &= \int (1 + t^2)^2 \frac{2t}{1 + t^2} \arctan t dt \\ &= \int (1 + t^2) \arctan t \cdot 2t dt = \frac{1}{2} \int \arctan t \cdot 2t (1 + t^2)^2 dt \\ &= \frac{1}{2} (1 + t^2)^2 \arctan t - \frac{1}{2} \int \frac{(1 + t^2)^2}{1 + t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} (1 + t^2)^2 \arctan t - \frac{1}{2} \int (1 + t^2) dt \\ &= \frac{1}{2} (1 + t^2)^2 \arctan t - \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{3} t^3 \right) + C \\ &= \frac{1}{2} \left[e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} - \sqrt{e^x - 1} - \frac{1}{3} (e^x - 1)^{\frac{3}{2}} \right] + C. \end{aligned}$$

练习题

1. (2009, 数二, 9 分) 计算不定积分 $\int \ln \left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}} \right) dx \quad (x > 0)$.

2. (2000, 数二, 5 分) 设 $f(\ln x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$, 计算 $\int f(x) dx$.

3. (2011, 数三, 10 分) 求不定积分 $\int \frac{\arcsin \sqrt{x} + \ln x}{\sqrt{x}} dx$.

练习题参考答案

1. **【解】** 设 $\sqrt{\frac{1+x}{x}} = t$, 则 $x = \frac{1}{t^2 - 1}$,

$$\int \ln \left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}} \right) dx = \int \ln(1+t) d \left(\frac{1}{t^2 - 1} \right) = \frac{\ln(1+t)}{t^2 - 1} - \int \frac{1}{t^2 - 1} \cdot \frac{1}{t + 1} dt$$

而

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{(t^2-1)(t+1)} dt &= \frac{1}{2} \int \frac{(t+1) - (t-1)}{(t^2-1)(t+1)} dt \\
 &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t^2-1} - \frac{1}{(t+1)^2} \right) dt \\
 &= \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} - \frac{2}{(t+1)^2} \right) dt \\
 &= \frac{1}{4} \ln(t-1) - \frac{1}{4} \ln(t+1) + \frac{1}{2(t+1)} + C,
 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
 \int \ln \left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}} \right) dx &= \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} + \frac{1}{4} \ln \frac{t+1}{t-1} - \frac{1}{2(t+1)} + C \\
 &= x \ln \left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}} \right) + \frac{1}{2} \ln(\sqrt{1+x} + \sqrt{x}) - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}} + C \\
 &= x \ln \left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}} \right) + \frac{1}{2} \ln(\sqrt{1+x} + \sqrt{x}) + \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \sqrt{x+x^2} + C.
 \end{aligned}$$

【评注】 本题主要考查计算不定积分的两种基本方法,即换元法和分部积分法.

2.【解】 设 $\ln x = t$, 则 $x = e^t, f(t) = \frac{\ln(1+e^t)}{e^t}$.

$$\begin{aligned}
 \int f(x) dx &= \int \frac{\ln(1+e^x)}{e^x} dx = - \int \ln(1+e^x) de^{-x} = -e^{-x} \ln(1+e^x) + \int \frac{1}{1+e^x} dx \\
 &= -e^{-x} \ln(1+e^x) + \int \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x} \right) dx = -e^{-x} \ln(1+e^x) + x - \ln(1+e^x) + C \\
 &= x - (1+e^{-x}) \ln(1+e^x) + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3.【解】 \int \frac{\arcsin \sqrt{x} + \ln x}{\sqrt{x}} dx &= 2 \int (\arcsin \sqrt{x} + \ln x) d(\sqrt{x}) \\
 &= 2\sqrt{x}(\arcsin \sqrt{x} + \ln x) - \int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} - 2 \int \frac{dx}{\sqrt{x}} \\
 &= 2\sqrt{x}(\arcsin \sqrt{x} + \ln x) + \int \frac{d(1-x)}{\sqrt{1-x}} - 4\sqrt{x} \\
 &= 2\sqrt{x}(\arcsin \sqrt{x} + \ln x) + 2\sqrt{1-x} - 4\sqrt{x} + C.
 \end{aligned}$$

小结

1. 不定积分的计算重点考查求不定积分的基本方法:

- | | |
|------------|------------|
| (1) 分项积分法; | (2) 凑微分法; |
| (3) 换元法; | (4) 分部积分法. |

考生不应将大量时间用在一些难题和偏题上.



2. 专门考不定积分的试题并不是很多,但计算不定积分是一种基本运算,在其他试题(定积分、多元积分、微分方程)中经常考,所以考生必须熟练掌握不定积分的基本方法.

二、定积分概念、性质及几何意义

3 (2011, 4 题, 4 分) 设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin x) dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cot x) dx$, $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x) dx$, 则 I, J, K 的大小关系为

(A) $I < J < K$. (B) $I < K < J$. (C) $J < I < K$. (D) $K < J < I$.

【答案】 B.

【解析】 同一区间上定积分大小比较最常用的思想就是比较被积函数大小.

由于当 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 时, $0 < \sin x < \cos x < 1 < \cot x$.

又因为 $\ln x$ 为 $(0, +\infty)$ 上的单调增加函数, 所以

$$\ln(\sin x) < \ln(\cos x) < \ln(\cot x), x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{故 } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin x) dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x) dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cot x) dx,$$

即 $I < K < J$.

4 (2012, 4 题, 4 分) 设 $I_k = \int_0^{k\pi} e^{x^2} \sin x dx$ ($k = 1, 2, 3$), 则有

(A) $I_1 < I_2 < I_3$. (B) $I_3 < I_2 < I_1$. (C) $I_2 < I_3 < I_1$. (D) $I_2 < I_1 < I_3$.

【答案】 D.

【解析】 (方法一) 由于

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{2\pi} e^{x^2} \sin x dx = \int_0^{\pi} e^{x^2} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} e^{x^2} \sin x dx \\ &= I_1 + \int_{\pi}^{2\pi} e^{x^2} \sin x dx \end{aligned}$$

又 $e^{x^2} \sin x < 0, x \in (\pi, 2\pi)$, 则

$$\int_{\pi}^{2\pi} e^{x^2} \sin x dx < 0$$

从而有 $I_2 < I_1$.

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^{3\pi} e^{x^2} \sin x dx = \int_0^{\pi} e^{x^2} \sin x dx + \int_{\pi}^{3\pi} e^{x^2} \sin x dx \\ &= I_1 + \int_{\pi}^{3\pi} e^{x^2} \sin x dx \end{aligned}$$

以下证明 $\int_{\pi}^{3\pi} e^{x^2} \sin x dx > 0$. 由于

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{3\pi} e^{x^2} \sin x dx &= \int_{\pi}^{2\pi} e^{x^2} \sin x dx + \int_{2\pi}^{3\pi} e^{x^2} \sin x dx \\ &= e^{\pi^2} \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx + e^{\xi^2} \int_{2\pi}^{3\pi} \sin x dx \quad (\text{积分中值定理}) \end{aligned}$$



$$= 2(e^{\xi} - e^{\eta}) > 0 \quad (2\pi < \xi < 3\pi, \pi < \eta < 2\pi)$$

则 $I_3 > I_1, I_2 < I_1 < I_3$.

故应选(D).

【方法二】 利用定积分的几何意义.

曲线 $y = \sin x$ 如图一所示, 而 e^{x^2} 在 $(0, +\infty)$ 上单调增加且大于 1, 则曲线 $y = e^{x^2} \sin x$ 如图二. 该曲线与 x 轴所围三块区域面积分别记为 S_1, S_2, S_3 (如图二所示). 显然 $S_1 < S_2 < S_3$.

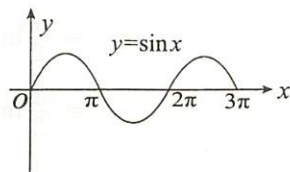
由定积分的几何意义知

$$I_1 = \int_0^{\pi} e^{x^2} \sin x dx = S_1 > 0$$

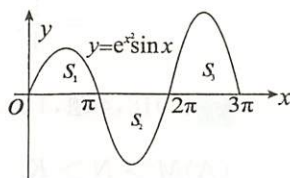
$$I_2 = \int_0^{2\pi} e^{x^2} \sin x dx = S_1 - S_2 < 0$$

$$I_3 = \int_0^{3\pi} e^{x^2} \sin x dx = S_1 - S_2 + S_3 = S_1 + (S_3 - S_2) > S_1 = I_1$$

故 $I_2 < I_1 < I_3$, 从而应选(D).



图一



图二

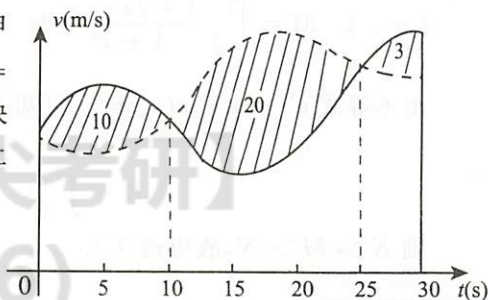
【5】 (2017, 4 题, 4 分) 甲、乙两人赛跑, 计时开始时, 甲在乙前方 10 (单位: m) 处, 图中实线表示甲的速度曲线 $v = v_1(t)$ (单位: m/s), 虚线表示乙的速度曲线 $v = v_2(t)$, 三块阴影部分面积的数值依次为 10, 20, 3. 计时开始后乙追上甲的时刻记为 t_0 (单位: s), 则

(A) $t_0 = 10$.

(B) $15 < t_0 < 20$.

(C) $t_0 = 25$.

(D) $t_0 > 25$.



【答案】 C.

【解析】 由题设及图形知, 从一开始 $t = 0$ 到 $t = t_0$ 时刻甲、乙移动的距离分别为

$$S_1 = \int_0^{t_0} v_1(t) dt, S_2 = \int_0^{t_0} v_2(t) dt$$

其中积分在几何上分别表示曲线 $v = v_1(t)$, $t = t_0$ 及两坐标轴围成的面积, 曲线 $v = v_2(t)$, $t = t_0$ 及两个坐标轴围成的面积. 若 t_0 为计时开始后乙追上甲的时刻, 则

$$S_1 + 10 = S_2$$

即

$$\begin{aligned} \int_0^{t_0} v_1(t) dt + 10 &= \int_0^{t_0} v_2(t) dt \\ \int_0^{t_0} (v_2(t) - v_1(t)) dt &= 10 \end{aligned}$$

由题中图形可知 $t_0 = 25$, 故应选(C).

【6】 (2017, 16 题, 10 分) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right)$.

【解】 原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right)$

$$= \int_0^1 x \ln(1+x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \ln(1+x) dx^2$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} x^2 \ln(1+x) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx \\
 &= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(x^2-1)+1}{1+x} dx \\
 &= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \int_0^1 (x-1) dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \\
 &= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4} (x-1)^2 \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \ln(1+x) \Big|_0^1 \\
 &= \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

7 (2018, 4 题, 4 分) 设 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx$, $N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx$, $K = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sqrt{\cos x}) dx$, 则

(A) $M > N > K$.

(B) $M > K > N$.

(C) $K > M > N$.

(D) $K > N > M$.

【答案】 C.

【解析】 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+2x+x^2}{1+x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{2x}{1+x^2} \right) dx = \pi + 0 = \pi$.

由不等式 $e^x > 1+x$ ($x \neq 0$) 可知 $N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx < \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \pi$.

$$K = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sqrt{\cos x}) dx > \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \pi$$

则 $K > M > N$, 故应选(C).

练习题

1. (2002, 数二, 3 分) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1 + \cos \frac{\pi}{n}} + \sqrt{1 + \cos \frac{2\pi}{n}} + \cdots + \sqrt{1 + \cos \frac{n\pi}{n}} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. (2003, 数二, 4 分) 设 $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{x} dx$, $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\tan x} dx$, 则

(A) $I_1 > I_2 > 1$.

(B) $1 > I_1 > I_2$.

(C) $I_2 > I_1 > 1$.

(D) $1 > I_2 > I_1$.

3. (2012, 数二, 4 分) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{1+n^2} + \frac{1}{2^2+n^2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n^2} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

练习题参考答案

1. 【答案】 $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

【解析】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1 + \cos \frac{\pi}{n}} + \sqrt{1 + \cos \frac{2\pi}{n}} + \cdots + \sqrt{1 + \cos \frac{n\pi}{n}} \right)$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \cos \frac{i\pi}{n}} = \int_0^1 \sqrt{1 + \cos \pi x} dx$



$$= \int_0^1 \sqrt{2\cos^2 \frac{\pi x}{2}} dx = \sqrt{2} \int_0^1 \cos \frac{\pi x}{2} dx = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$

2. 【答案】 B.

【解析】 由基本不等式 $\sin x < x < \tan x, x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 知

$$\frac{\tan x}{x} > \frac{x}{\tan x}, \quad \frac{x}{\tan x} < 1$$

由 $\frac{\tan x}{x} > \frac{x}{\tan x}$ 知, $I_1 > I_2$, 因此, 排除(C)(D).

由 $\frac{x}{\tan x} < 1$ 知, $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\tan x} dx < \frac{\pi}{4} < 1$, 因此, 排除(A), 故应选(B).

3. 【答案】 $\frac{\pi}{4}$.

【解析】 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{1+n^2} + \frac{1}{2^2+n^2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n^2} \right)$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{n}\right)^2} + \cdots + \frac{1}{1 + \left(\frac{n}{n}\right)^2} \right]$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

【评注】 本题主要考查定积分的概念以及用定积分定义求和式极限的方法, 这是求和式极限的一种常用方法.

小结

1. 定积分是一种和式的极限 $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$, 利用定积分定义求某种和式极限是考查定积分概念的一种常见题型, 其关键是先提一个因子 $\frac{1}{n}$, 然后再确定被积函数和积分区间.

一种最常见的和式极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$$

2. 定积分的几何意义.

定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 在几何上表示曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = a, x = b$ 及 x 轴在 x 轴上方所围面积与在 x 轴下方所围面积之差.

3. 定积分的性质重点是不等式性质及积分中值定理.

(1) 不等式性质:



(i) 若在 $[a, b]$ 上 $f(x) \leq g(x)$, 则 $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$;

特别地, 若 $f(x) \geq 0$, 则 $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

(ii) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, M 和 m 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值和最小值, 则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

(iii) $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx, (a < b)$.

(2) 积分中值定理

(i) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$, 其中 $a < c < b$;

(ii) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a, b]$ 上连续, 且 $g(x)$ 不变号, 则

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx, (a \leq c \leq b)$$

三、定积分计算

8 (2010, 10 题, 4 分) $\int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \cos \sqrt{x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 -4π .

【解析】 令 $\sqrt{x} = t$, 则 $x = t^2, dx = 2t dt$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \cos \sqrt{x} dx &= \int_0^{\pi} 2t^2 \cos t dt = 2 \int_0^{\pi} t^2 d \sin t = 2t^2 \sin t \Big|_0^{\pi} - 4 \int_0^{\pi} t \sin t dt \\ &= 4t \cos t \Big|_0^{\pi} - 4 \int_0^{\pi} \cos t dx = -4\pi. \end{aligned}$$

9 (2012, 10 题, 4 分) $\int_0^2 x \sqrt{2x-x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{\pi}{2}$.

【解析】 (方法一) 由于 $\int_0^2 x \sqrt{2x-x^2} dx = \int_0^2 x \sqrt{1-(x-1)^2} dx$,

令 $x-1 = \sin t$, 则 $dx = \cos t dt$

$$\begin{aligned} \int_0^2 x \sqrt{2x-x^2} dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin t) \cos^2 t dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

(方法二) 由于 $\int_0^2 x \sqrt{2x-x^2} dx = \int_0^2 x \sqrt{1-(x-1)^2} dx$,

令 $x-1 = t$, 则 $dx = dt$

$$\int_0^2 x \sqrt{1-x^2} dx = \int_{-1}^1 (1+t) \sqrt{1-t^2} dt$$

$$= 2 \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

【评注】 本题是一道定积分计算的基本题, 用到定积分计算中很多常用方法和结论.

换元法($x-1 = \sin t, x-1 = t$).

基本结论:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 2 \int_0^a f(x) dx, & f(x) \text{ 为偶函数,} \\ 0, & f(x) \text{ 为奇函数.} \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为正偶数,} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{2}{3} \cdot 1, & n \text{ 为大于1的正奇数.} \end{cases}$$

定积分几何意义: $\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt = \frac{\pi}{4}$ (单位圆 $x^2 + y^2 \leq 1$ 面积的 $\frac{1}{4}$).

10 (2013, 15 题, 10 分) 计算 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$, 其中 $f(x) = \int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t} dt$.

【解】 (方法一) 因为 $f(x) = \int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t} dt$, 所以 $f'(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$, 且 $f(1) = 0$. 从而

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx &= 2 \left[\sqrt{x} f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \sqrt{x} f'(x) dx \right] \\ &= -2 \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}} dx = -4 \sqrt{x} \ln(x+1) \Big|_0^1 + 4 \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx \\ &= -4 \ln 2 + 4 \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx \end{aligned}$$

令 $u = \sqrt{x}$, 则

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx = 2 \int_0^1 \frac{u^2}{u^2+1} du = 2(u - \arctan u) \Big|_0^1 = 2 - \frac{\pi}{2}$$

$$\text{所以 } \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx = 8 - 2\pi - 4 \ln 2.$$

$$\text{(方法二)} \quad \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 dx \int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t\sqrt{x}} dt,$$

交换累次积分的次序, 得

$$\int_0^1 dx \int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t\sqrt{x}} dt = - \int_0^1 dt \int_0^t \frac{\ln(1+t)}{t\sqrt{x}} dx = -2 \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}} dt$$

以下同方法一.

【评注】 本题主要考查定积分的计算. 这种被积函数中出现变上限积分函数 $f(x) =$

$\int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt$ 的积分, 常用的方法有两种, 一种是用分部积分法, 另一种是利用累次积分交换次序.

考生答卷中最常见的一种错误是在凑微分时将 $\frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2d\sqrt{x}$ 错写为 $\frac{1}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2}d\sqrt{x}$.



【11】(2014, 4 题, 4 分) 若 $\int_{-\pi}^{\pi} (x - a_1 \cos x - b_1 \sin x)^2 dx = \min_{a, b \in \mathbb{R}} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} (x - a \cos x - b \sin x)^2 dx \right\}$,

则 $a_1 \cos x + b_1 \sin x =$

(A) $2 \sin x$.

(B) $2 \cos x$.

(C) $2\pi \sin x$.

(D) $2\pi \cos x$.

【答案】 A.

【解析】 (方法一) 令 $Z(a, b) = \int_{-\pi}^{\pi} (x - a \cos x - b \sin x)^2 dx$,

$$\begin{cases} Z'_a = -2 \int_{-\pi}^{\pi} (x - a \cos x - b \sin x) \cos x dx = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} Z'_b = -2 \int_{-\pi}^{\pi} (x - a \cos x - b \sin x) \sin x dx = 0, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} a \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx = 0, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} (x - b \sin x) \sin x dx = 0, \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{则 } a = 0, b = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx} = \frac{2 \int_0^{\pi} x \sin x dx}{2 \int_0^{\pi} \sin^2 x dx} = \frac{\pi \int_0^{\pi} \sin x dx}{4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx} = \frac{2\pi}{4 \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}} = 2.$$

故应选(A).

(方法二)

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} (x - a \cos x - b \sin x)^2 dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} [(x - b \sin x)^2 - 2a \cos x (x - b \sin x) + a^2 \cos^2 x] dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} [x^2 - 2bx \sin x + b^2 \sin^2 x + a^2 \cos^2 x] dx \\ &= 2 \int_0^{\pi} x^2 dx - 4b \int_0^{\pi} x \sin x dx + 4b^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx + 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx \\ &= \frac{2}{3} \pi^3 - 2b\pi \int_0^{\pi} \sin x dx + b^2 \pi + a^2 \pi \\ &= \frac{2}{3} \pi^3 - 4b\pi + b^2 \pi + a^2 \pi \\ &= \pi [a^2 + (b-2)^2 - 4] + \frac{2}{3} \pi^3 \end{aligned}$$

由此可得, 当 $a = 0, b = 2$ 时积分值最小, 故应选(A).

(方法三) 傅里叶级数就是一种均方逼近, 则使得 $\int_{-\pi}^{\pi} (x - a \cos x - b \sin x)^2 dx$ 最小的 a 和 b 就是函数 $f(x) = x$ 的相应的傅里叶系数, 即

$$a = a_1 = 0$$

$$b = b_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin x dx = \int_0^{\pi} \sin x dx = 2$$

故应选(A).

【评注】 本题计算中用到几个常用结论:

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

$$(2) \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx.$$

$$\text{特别地, } \int_0^{\pi} x \sin x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \sin x dx = \pi.$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

12 (2015, 10 题, 4 分) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{1 + \cos x} + |x| \right) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{\pi^2}{4}.$

【解析】 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{1 + \cos x} + |x| \right) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx = 0 + x^2 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}.$

13 (2015, 15 题, 10 分) 设函数 $f(x) = x + a \ln(1+x) + bx \sin x$, $g(x) = kx^3$, 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x \rightarrow 0$ 是等价无穷小, 求 a, b, k 值.

【解】 因为 $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$, 所以

$$f(x) = (1+a)x + (b - \frac{a}{2})x^2 + \frac{a}{3}x^3 + o(x^3)$$

由于当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \sim kx^3$, 则

$$\begin{cases} 1+a=0, \\ b-\frac{a}{2}=0, \\ \frac{a}{3}=k \end{cases}$$

则 $a = -1, b = -\frac{1}{2}, k = -\frac{1}{3}.$

14 (2018, 10 题, 4 分) 设函数 $f(x)$ 具有 2 阶连续导数, 若曲线 $y = f(x)$ 过点 $(0, 0)$ 且与曲线 $y = 2^x$ 在点 $(1, 2)$ 处相切, 则 $\int_0^1 x f''(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $2(\ln 2 - 1).$

【解析】 由曲线 $y = f(x)$ 过点 $(0, 0)$ 且与曲线 $y = 2^x$ 在点 $(1, 2)$ 处相切知 $f(0) = 0, f(1) = 2, f'(1) = (2^x)' \Big|_{x=1} = 2^x \ln 2 \Big|_{x=1} = 2 \ln 2,$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x f''(x) dx &= \int_0^1 x df'(x) = x f'(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f'(x) dx \\ &= 2 \ln 2 - f(x) \Big|_0^1 = 2 \ln 2 - 2 = 2(\ln 2 - 1). \end{aligned}$$

练习题

1. (2001, 数二, 3 分) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3 + \sin^2 x) \cos^2 x dx = \underline{\hspace{2cm}}.$



2. (2008, 数二, 9 分) 计算 $\int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

3. (1999, 数三, 6 分) 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $\int_0^x tf(2x-t)dt = \frac{1}{2} \arctan x^2$, 已知 $f(1) = 1$, 求 $\int_1^2 f(x)dx$ 的值.

4. (1995, 数二, 8 分) 设 $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t} dt$, 计算 $\int_0^\pi f(x)dx$.

练习题参考答案

1. 【答案】 $\frac{\pi}{8}$.

【解析】 由于 $x^3 \cos^2 x$ 为奇函数, $\sin^2 x \cos^2 x$ 为偶函数, 则

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3 + \sin^2 x) \cos^2 x dx &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x dx = 2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx \right) \\ &= 2 \left(\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

2. 【解】 (方法一) 令 $x = \sin t$, 则 $dx = \cos t dt$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t \sin^2 t \cos t}{\cos t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{t}{2} - \frac{t \cos 2t}{2} \right) dt \\ &= \frac{t^2}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin 2t dt = \frac{\pi^2}{16} - \frac{t \sin 2t}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt \\ &= \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{8} \cos 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

(方法二) $\int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 \frac{(x^2-1) \arcsin x + \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$$\begin{aligned} &= - \int_0^1 (\sqrt{1-x^2} \arcsin x) dx + \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= -x \sqrt{1-x^2} \arcsin x \Big|_0^1 + \int_0^1 x \left(\frac{-x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + 1 \right) dx + \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{-x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + x \right) dx + \frac{1}{2} \arcsin^2 x \Big|_0^1 \\ &= - \int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx + \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{8}. \end{aligned}$$

移项得

$$2 \int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{8}$$

则

$$\int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}$$

3. 【分析】 本题要计算的积分 $\int_1^2 f(x) dx$ 的被积函数 $f(x)$ 没给出, 但给出了一个关于 $f(x)$ 的变上限积分的等式 $\int_0^x tf(2x-t)dt = \frac{1}{2} \arctan x^2$, 通常等式两端求导可解出 $f(x)$.

【解】 令 $u = 2x - t$, 则 $du = -dt$,

$$\int_0^x tf(2x-t)dt = -\int_{2x}^x (2x-u)f(u)du = 2x \int_x^{2x} f(u)du - \int_x^{2x} uf(u)du$$

于是得

$$2x \int_x^{2x} f(u)du - \int_x^{2x} uf(u)du = \frac{1}{2} \arctan x^2$$

等式两端对 x 求导得

$$2 \int_x^{2x} f(u)du + 2x(2f(2x) - f(x)) - (2xf(2x) \cdot 2 - xf(x)) = \frac{x}{1+x^4}$$

$$\text{即 } 2 \int_x^{2x} f(u)du = \frac{x}{1+x^4} + xf(x).$$

$$\text{令 } x=1 \text{ 得 } 2 \int_1^2 f(u)du = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2},$$

$$\text{故 } \int_1^2 f(x)dx = \frac{3}{4}.$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

4. 【解】 (方法一) $\int_0^\pi f(x)dx = xf(x) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi xf'(x)dx$

$$= \pi \int_0^\pi \frac{\sin t}{\pi-t} dt - \int_0^\pi x \frac{\sin x}{\pi-x} dx$$

$$= \int_0^\pi \frac{\pi-x}{\pi-x} \sin x dx = \int_0^\pi \sin x dx = 2.$$

(方法二) $\int_0^\pi f(x)dx = \int_0^\pi f(x)d(x-\pi)$

$$= (x-\pi)f(x) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi (x-\pi)f'(x)dx$$

$$= -\int_0^\pi \frac{x-\pi}{\pi-x} \sin x dx = \int_0^\pi \sin x dx = 2.$$

(方法三) $\int_0^\pi f(x)dx = \int_0^\pi dx \int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t} dt$

交换积分次序, 得

$$\int_0^\pi f(x)dx = \int_0^\pi dt \int_t^\pi \frac{\sin t}{\pi-t} dx = \int_0^\pi \sin t dt = 2$$

小结

计算定积分常用的有以下五种方法:

1. 利用牛顿-莱布尼茨公式

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$



2. 利用定积分换元法;

3. 利用定积分的分部积分法;

4. 利用奇偶性, 周期性计算定积分;

$$(i) \int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 2 \int_0^a f(x) dx, & \text{当 } f(x) \text{ 为偶函数,} \\ 0, & \text{当 } f(x) \text{ 为奇函数.} \end{cases}$$

(ii) 若 $f(x)$ 为周期为 T 的连续函数, 则

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

5. 利用已有公式计算定积分:

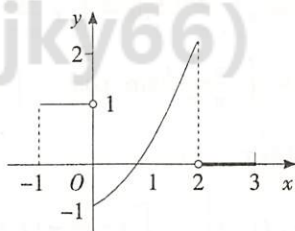
$$(i) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为正偶数,} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1, & n \text{ 为大于 1 的正奇数.} \end{cases}$$

(ii) 若 $f(x)$ 为 $[0, 1]$ 上的连续函数, 则

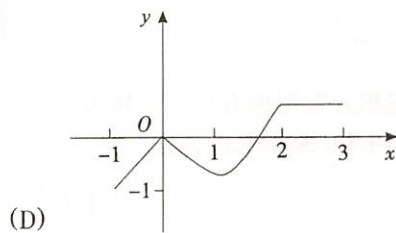
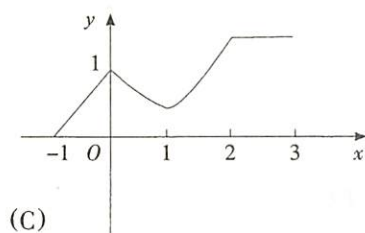
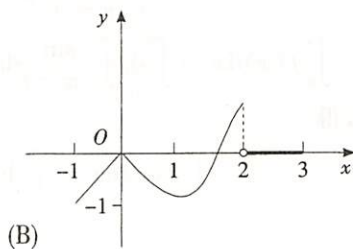
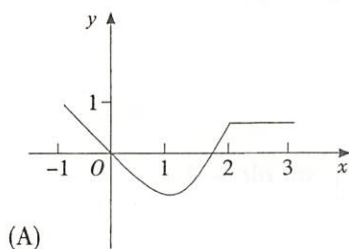
$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$$

四、变上限积分函数及其应用

15 (2009, 3 题, 4 分) 设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-1, 3]$ 上的图形如图所示



则函数 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 的图形为



【答案】 D.

【解析】 由 $y = f(x)$ 的图形可看出, $f(x)$ 在 $[-1, 3]$ 上有界, 且只有两个间断点 ($x = 0, x = 2$), 则 $f(x)$ 在 $[-1, 3]$ 上可积, 从而 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 应为连续函数, 所以, 排除 (B).

又由 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 知, $F(0) = 0$, 排除 (C).

(A) 与 (D) 选项中的 $F(x)$ 在 $[-1, 0]$ 上不同, 由

$$F(x) = \int_0^x 1 dt = x, x \in [-1, 0]$$

排除 (A), 故应选 (D).

练习题

1. (1998, 数二, 3 分) 设 $f(x)$ 连续, 则 $\frac{d}{dx} \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt =$

- (A) $xf(x^2)$. (B) $-xf(x^2)$.
(C) $2xf(x^2)$. (D) $-2xf(x^2)$.

2. (2006, 数二, 4 分) 设 $f(x)$ 是奇函数, 除 $x = 0$ 外处处连续, $x = 0$ 是其第一类间断点, 则 $\int_0^x f(t) dt$ 是

- (A) 连续的奇函数. (B) 连续的偶函数.
(C) 在 $x = 0$ 间断的奇函数. (D) 在 $x = 0$ 间断的偶函数.

3. (2002, 数二, 2 分) 设 $f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{3}{2}x^2, & -1 \leq x < 0, \\ \frac{xe^x}{(e^x + 1)^2}, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$

求函数 $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$ 的表达式.

4. (2013, 数二, 4 分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x < \pi, \\ 2, & \pi \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$ $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, 则

- (A) $x = \pi$ 是函数 $F(x)$ 的跳跃间断点. (B) $x = \pi$ 是函数 $F(x)$ 的可去间断点.
(C) $F(x)$ 在 $x = \pi$ 处连续但不可导. (D) $F(x)$ 在 $x = \pi$ 处可导.

5. (2007, 数二, 10 分) 设 $f(x)$ 是区间 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 上的单调、可导函数, 且满足

$$\int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt = \int_0^x t \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t} dt$$

其中 f^{-1} 是 f 的反函数, 求 $f(x)$.

练习题参考答案

1. 【答案】 A.

【解析】 (方法一) 先作变量代换将被积式中 x 换出来, 然后再求导.

令 $x^2 - t^2 = u$, 则 $-2t dt = du, t dt = -\frac{1}{2} du$,



$$\int_0^x t f(x^2 - t^2) dt = -\frac{1}{2} \int_{x^2}^0 f(u) du = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} f(u) du$$

$$\text{则 } \frac{d}{dx} \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \int_0^{x^2} f(u) du = \frac{1}{2} f(x^2) \cdot 2x = x f(x^2).$$

故应选(A).

(方法二) 排除法:取 $f(x) \equiv 1$, 显然满足题设条件, 而

$$\frac{d}{dx} \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt = \frac{d}{dx} \int_0^x t dt = x$$

由此可知, 选项(B)(C)(D) 都是错误的, 排除(B)(C)(D), 故应选(A).

2. 【答案】 B.

【解析】 (方法一) 排除法: 选一个符合题设条件的具体函数, 取

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

则

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \begin{cases} \int_0^x 1 dt, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ \int_0^x (-1) dt, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} = |x|$$

是一个连续的偶函数, 排除选项(A)(C)(D), 故应选(B).

(方法二) 利用变上限积分函数的两个基本结论:

(1) 若 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的可积函数, 则 $\int_a^x f(t) dt$ 为 $[a, b]$ 上的连续函数;

(2) 若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $\int_0^x f(t) dt$ 为偶函数; 若 $f(x)$ 是偶函数, 则 $\int_0^x f(t) dt$ 为奇函数.

由于 $f(x)$ 是奇函数, 则 $\int_0^x f(t) dt$ 为偶函数, 又 $f(x)$ 除 $x=0$ 外处处连续, $x=0$ 是其第一类间断点, 则 $f(x)$ 可积, 从而 $\int_0^x f(t) dt$ 为连续函数. 即 $\int_0^x f(t) dt$ 为连续的偶函数, 故应选(B).

【评注】 本题主要考查变上限积分函数的性质. 方法二中关于变上限积分函数的两个基本结论比较常用, 望考生注意.

3. 【分析】 本题是求分段函数的变上限积分函数的表达式, 由于被积函数在不同区间上表达式不同, 所以要分别讨论.

【解】 当 $x \in [-1, 0]$ 时

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-1}^x f(t) dt = \int_{-1}^x \left(2t + \frac{3}{2}t^2 \right) dt \\ &= \left(t^2 + \frac{t^3}{2} \right) \Big|_{-1}^x = \frac{1}{2}x^3 + x^2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

当 $x \in [0, 1]$ 时



$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_{-1}^x f(t) dt = \int_{-1}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt \\
 &= \int_{-1}^0 \left(2t + \frac{3}{2}t^2 \right) dt + \int_0^x \frac{te^t}{(e^t+1)^2} dt \\
 &= \left(t^2 + \frac{t^3}{2} \right) \Big|_{-1}^0 - \int_0^x t d \frac{1}{e^t+1} \\
 &= -\frac{1}{2} - \frac{t}{e^t+1} \Big|_0^x + \int_0^x \frac{dt}{e^t+1} \\
 &= -\frac{1}{2} - \frac{x}{e^x+1} + \int_0^x \frac{e^{-t} dt}{1+e^{-t}} \\
 &= -\frac{1}{2} - \frac{x}{e^x+1} - \int_0^x \frac{d(1+e^{-t})}{1+e^{-t}} \\
 &= -\frac{1}{2} - \frac{x}{e^x+1} - \ln(1+e^{-t}) \Big|_0^x \\
 &= -\frac{1}{2} - \frac{x}{e^x+1} - \ln(1+e^{-x}) + \ln 2
 \end{aligned}$$

$$\text{则 } F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{2} + x^2 - \frac{1}{2}, & -1 \leq x < 0, \\ -\frac{x}{e^x+1} - \ln(1+e^{-x}) + \ln 2 - \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

【评注】 虽然过去考过此类题,但还是有不少考生出错.

1) 部分考生在 $F(x)$ 的定义域 $[-1, 1]$ 外也进行计算;

2) 当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$F(x) = \int_{-1}^x \frac{te^t}{(e^t+1)^2} dt$$

4.【答案】 C.

$$\begin{aligned}
 \text{【解析】 (方法一)} \quad F(x) &= \int_0^x f(t) dt = \begin{cases} \int_0^x \sin t dt, & 0 \leq x < \pi \\ \int_0^\pi \sin t dt + \int_\pi^x 2 dt, & \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 1 - \cos x, & 0 \leq x < \pi, \\ 2 + 2x - 2\pi, & \pi \leq x \leq 2\pi. \end{cases}
 \end{aligned}$$

因为

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} F(x) = F(\pi) = 2$$

所以, $F(x)$ 在 $x = \pi$ 处连续.

而

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{F(x) - F(\pi)}{x - \pi} &= \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{1 - \cos x - 2}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sin x}{1} = 0 \\
 \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{F(x) - F(\pi)}{x - \pi} &= \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{2 + 2x - 2\pi - 2}{x - \pi} = 2
 \end{aligned}$$



由此可知 $F'_-(\pi) \neq F'_+(\pi)$, 即 $F(x)$ 在 $x = \pi$ 处不可导, 故应选(C).

【方法二】 由于 $x = \pi$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点, 则 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 在 $x = \pi$ 处连续但不可导, 故应选(C).

【评注】 本题主要考查变上限积分函数的连续性和可导性. 两种方法中显然方法二简单, 方法二用到一个关于变上限积分函数的连续性和可导性的结论, 即

(1) 若 $x = x_0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点, 则 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 在 $x = x_0$ 处可导;

(2) 若 $x = x_0$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点, 则 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 在 $x = x_0$ 处连续但不可导.

5. **【解】** 等式 $\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt = \int_0^x t \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t} dt$ 两端对 x 求导, 得

$$f^{-1}[f(x)] \cdot f'(x) = x \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}$$

即

$$xf'(x) = x \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right]$$

故

$$f(x) = \int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx = \ln(\sin x + \cos x) + C$$

由题设知, $f(0) = 0$, 于是 $C = 0$, 因此

$$f(x) = \ln(\sin x + \cos x), x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

【评注】 这里用到一个常用结论: $f^{-1}[f(x)] = x$, 事实上 $f[f^{-1}(x)] = x$.

小结

与变上限积分函数有关的考题在考研试卷中几乎年年都有, 且题型变化也很多, 而解决这些问题的关键是有关变上限积分函数 $\int_a^x f(t)dt$ 的三个性质, 即连续性、可导性及奇偶性.

(1) 连续性: 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 在 $[a, b]$ 上连续;

(2) 可导性: 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $F'(x) = f(x)$.

以上结论是变上限积分求导的理论基础, 虽然变上限积分求导题目很多, 但常见的就以下三种类型:

$$(i) \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt \right)'$$

这种类型直接利用公式

$$\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt\right)' = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x)$$

求解, 其中 $f(x)$ 连续, $\psi(x)$ 和 $\varphi(x)$ 都可导.

$$(ii) \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, t) dt\right)'$$

这种类型的被积函数 $f(x, t)$ 中含有求导变量 x , 不能直接求导, 通常是通过变量代换把 $f(x, t)$ 中的 x 换出来, 或设法把 x 从积分号中提出来, 然后再求导.

$$(iii) \left(\int_a^b f(x, t) dt\right)'$$

事实上, (iii) 是 (ii) 的特例 ($\varphi(x) = a, \psi(x) = b$), 因此方法与 (ii) 相同.

(3) 奇偶性:

设 $f(x)$ 连续, 则

(i) 若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 是偶函数;

(ii) 若 $f(x)$ 是偶函数, 则 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 是奇函数.

五、与定积分有关的证明题

16 (2010, 17 题, 10 分)

(I) 比较 $\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$ 与 $\int_0^1 t^n |\ln t| dt$ ($n = 1, 2, \dots$) 的大小, 说明理由;

(II) 记 $u_n = \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$ ($n = 1, 2, \dots$), 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

(I) 【证明】 当 $0 \leq t \leq 1$ 时, 因为 $0 \leq \ln(1+t) \leq t$, 所以

$$0 \leq |\ln t| [\ln(1+t)]^n \leq t^n |\ln t|$$

从而有

$$\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt \leq \int_0^1 t^n |\ln t| dt$$

(II) 【解】 (方法一) 由 (I) 知

$$0 \leq u_n = \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt \leq \int_0^1 t^n |\ln t| dt$$

$$\int_0^1 t^n |\ln t| dt = -\int_0^1 t^n \ln t dt$$

$$= -\left. \frac{t^{n+1}}{n+1} \ln t \right|_0^1 + \frac{1}{n+1} \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{(n+1)^2}$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 t^n |\ln t| dt = 0$, 由夹逼定理知 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

(方法二) 由于 $\ln x$ 为单调增加函数, 则当 $t \in [0, 1]$ 时, $\ln(1+t) \leq \ln 2$, 从而有

$$0 \leq u_n = \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt \leq \ln^2 2 \int_0^1 |\ln t| dt$$

又



$$\int_0^1 |\ln t| dt = -\int_0^1 \ln t dt = -t \ln t \Big|_0^1 + \int_0^1 dt = 1$$

且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln 2 = 0$, 由夹逼定理知 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

(方法三) 由(I)知

$$0 \leq u_n = \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt \leq \int_0^1 t^n |\ln t| dt$$

又因为 $\lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln t = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln t}{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = 0$, 且 $t \ln t$ 在 $(0, 1]$ 上连续, 则 $t \ln t$ 在 $(0, 1]$ 上有界,

从而存在 $M > 0$, 使

$$0 \leq |t \ln t| \leq M, t \in (0, 1]$$

$$\text{则 } \int_0^1 t^n |\ln t| dt \leq M \int_0^1 t^{n-1} dt = \frac{M}{n},$$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M}{n} = 0$ 及夹逼定理知 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

【评注】 本题是一道综合题, 主要考查定积分的不等式性质和求极限的夹逼定理, 同时这里用到一个常用的函数不等式

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x, x \in (0, +\infty)$$

许多考生在问题(I)中不知如何入手判断两个积分值的大小, 其主要原因是不熟悉以上的函数不等式.

练习题

1. (2003, 数二, 10分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导, 且 $f'(x) > 0$, 若极限 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在, 证明:

(I) 在 (a, b) 内 $f(x) > 0$;

(II) 在 (a, b) 内存在 ξ , 使 $\frac{b^2 - a^2}{\int_a^b f(x) dx} = \frac{2\xi}{f(\xi)}$;

(III) 在 (a, b) 内存在与(II)中 ξ 相异的点 η , 使 $f'(\eta)(b^2 - a^2) = \frac{2\xi}{\xi - a} \int_a^b f(x) dx$.

2. (2014, 数二, 10分) 设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x)$ 单调增加, $0 \leq g(x) \leq 1$. 证明:

(I) $0 \leq \int_a^x g(t) dt \leq x - a, x \in [a, b]$;

(II) $\int_a^{a+\int_a^b g(t) dt} f(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx$.

3. (2008, 数二, 11分) (I) 证明积分中值定理: 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则至少存在一个点 $\eta \in [a, b]$, 使得 $\int_a^b f(x) dx = f(\eta)(b-a)$;

(II) 若函数 $\varphi(x)$ 具有二阶导数, 且满足 $\varphi(2) > \varphi(1)$, $\varphi(2) > \int_2^3 \varphi(x) dx$, 则至少存在一个点 $\xi \in (1, 3)$, 使得 $\varphi''(\xi) < 0$.

练习题参考答案

1. 【证明】(I) 因为 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(2x-a) = 0$,

由于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 从而 $f(a) = 0$, 又 $f'(x) > 0$,

则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加, 故

$$f(x) > f(a) = 0, x \in (a, b)$$

(II) 设 $F(x) = x^2$, $g(x) = \int_a^x f(t) dt$, ($a \leq x \leq b$), 则 $g'(x) = f(x) > 0$, 故 $F(x), g(x)$ 满足柯西中值定理条件, 于是在 (a, b) 内存在 ξ , 使

$$\frac{F(b) - F(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{b^2 - a^2}{\int_a^b f(t) dt - \int_a^a f(t) dt} = \frac{(x^2)'}{\left(\int_a^x f(t) dt\right)'} \Big|_{x=\xi}$$

$$\text{即 } \frac{b^2 - a^2}{\int_a^b f(x) dx} = \frac{2\xi}{f(\xi)}.$$

(III) 因为 $f(\xi) = f(\xi) - f(a)$, 在 $[a, \xi]$ 上应用拉格朗日中值定理, 在 (a, ξ) 内存在一点 η , 使

$$f(\xi) = f'(\eta)(\xi - a)$$

从而由(II)的结论得

$$\frac{b^2 - a^2}{\int_a^b f(x) dx} = \frac{2\xi}{f'(\eta)(\xi - a)}$$

$$\text{故 } f'(\eta)(b^2 - a^2) = \frac{2\xi}{\xi - a} \int_a^b f(x) dx.$$

2. 【证明】(I) 由 $0 \leq g(x) \leq 1$ 得

$$0 \leq \int_a^x g(t) dt \leq \int_a^x 1 dt = x - a, x \in [a, b]$$

(II) 令 $F(u) = \int_a^u f(x) g(x) dx - \int_a^{a+\int_a^u g(t) dt} f(x) dx$

只要证明 $F(b) \geq 0$, 显然 $F(a) = 0$, 只要证明 $F(u)$ 单调增加, 又

$$\begin{aligned} F'(u) &= f(u)g(u) - f\left(a + \int_a^u g(t) dt\right)g(u) \\ &= g(u) \left[f(u) - f\left(a + \int_a^u g(t) dt\right) \right] \end{aligned}$$

由(I)的结论 $0 \leq \int_a^x g(t) dt \leq x - a$ 知, $a \leq a + \int_a^x g(t) dt \leq x$, 即

$$a \leq a + \int_a^u g(t) dt \leq u$$

又 $f(x)$ 单调增加, 则 $f(u) \geq f\left(a + \int_a^u g(t) dt\right)$, 因此, $F'(u) \geq 0, F(b) \geq 0$.



$$\text{故 } \int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

3.【证明】(I) 设 M 与 m 为连续函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值和最小值, 即

$$m \leq f(x) \leq M, x \in [a, b]$$

由定积分性质, 有

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

$$\text{即 } m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M.$$

由连续函数的介值定理, 至少存在一点 $\eta \in [a, b]$, 使得

$$f(\eta) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

$$\text{即 } \int_a^b f(x)dx = f(\eta)(b-a).$$

(II) 由(I)的结论, 可知至少存在一点 $\eta \in [2, 3]$, 使

$$\int_2^3 \varphi(x)dx = \varphi(\eta)(3-2) = \varphi(\eta)$$

又由 $\varphi(2) > \int_2^3 \varphi(x)dx = \varphi(\eta)$ 知, $2 < \eta \leq 3$.

对 $\varphi(x)$ 在 $[1, 2]$ 和 $[2, \eta]$ 上分别应用拉格朗日中值定理, 并注意到 $\varphi(1) < \varphi(2)$, $\varphi(\eta) < \varphi(2)$, 得

$$\varphi'(\xi_1) = \frac{\varphi(2) - \varphi(1)}{2-1} > 0, (1 < \xi_1 < 2)$$

$$\varphi'(\xi_2) = \frac{\varphi(\eta) - \varphi(2)}{\eta-2} < 0, (2 < \xi_2 < \eta \leq 3)$$

在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上对导函数 $\varphi'(x)$ 应用拉格朗日中值定理, 有

$$\varphi''(\xi) = \frac{\varphi'(\xi_2) - \varphi'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} < 0, \xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (1, 3)$$

小结

有关定积分的证明题, 常见是两类问题, 证明与定积分有关的等式或不等式, 在证明中常用的结论是积分不等式性质和积分中值定理.

1. 证明积分等式的常用方法

- (1) 换元法;
- (2) 分部积分法, 特别是被积函数中出现 $f(x)$ 的导数时;
- (3) 利用积分中值定理.

2. 证明积分不等式的常用方法

- (1) 利用积分不等式的性质;
- (2) 利用积分中值定理;
- (3) 将积分上限换为 x , 转化为证明函数不等式.



六、反常积分的概念与计算

17 (2010, 3 题, 4 分) 设 m, n 为正整数, 则反常积分 $\int_0^1 \frac{\sqrt[n]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ 的收敛性

(A) 仅与 m 的取值有关.

(B) 仅与 n 的取值有关.

(C) 与 m, n 的取值都有关.

(D) 与 m, n 的取值都无关.

【答案】 D.

【解析】 本题主要考查反常积分的敛散性, 题中的被积函数分别在 $x \rightarrow 0^+$ 和 $x \rightarrow 1^-$ 时无界.

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[n]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[n]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt[n]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$$

在反常积分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[n]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ 中, 被积函数只在 $x \rightarrow 0^+$ 时无界.

由于 $\frac{\sqrt[n]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} \geq 0$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt[n]{\ln^2(1-x)} \sim x^{\frac{2}{n}}$,

则 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[n]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ 与 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{\frac{2}{n}}}{\sqrt[n]{x}} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^{\frac{1}{n}-\frac{2}{n}}}$ 同敛散.

而 m, n 为正整数, $\frac{1}{n} - \frac{2}{m} < 1$, 则反常积分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^{\frac{1}{n}-\frac{2}{m}}}$ 收敛, 则 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[n]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ 收敛.

在反常积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt[n]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ 中, 被积函数只在 $x \rightarrow 1^-$ 时无界. 由于 $\frac{\sqrt[n]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} \geq 0$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{\sqrt[n]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln^{\frac{2}{n}}(1-x)}{(1-x)^{-\frac{1}{2}}} = 0 \quad (\text{洛必达法则})$$

且反常积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ 收敛, 所以 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt[n]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ 收敛.

综上所述, 无论 m, n 取何正整数, 反常积分 $\int_0^1 \frac{\sqrt[n]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ 收敛, 故应选 (D).

18 (2013, 12 题, 4 分) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\ln 2$.

【解析】 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx = - \int_1^{+\infty} \ln x d \frac{1}{1+x}$
 $= - \left. \frac{\ln x}{1+x} \right|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x)}$
 $= \ln \frac{x}{1+x} \Big|_1^{+\infty} = - \ln \frac{1}{2} = \ln 2.$



【评注】 本题主要考查反常积分的计算,考查的是一元积分最基本的概念和最简单的运算,但本题还是成了高等数学填空题中得分率最低的一道题,这也反映了考生对反常积分的内容掌握情况普遍较差.

19 (2016, 1 题, 4 分) 若反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)^b} dx$ 收敛, 则

(A) $a < 1$ 且 $b > 1$.

(B) $a > 1$ 且 $b > 1$.

(C) $a < 1$ 且 $a+b > 1$.

(D) $a > 1$ 且 $a+b > 1$.

【答案】 C.

【解析】 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)^b} dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^a(1+x)^b} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^a(1+x)^b}$

由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^a(1+x)^b} = 1$, 则当 $a < 1$ 时, $\int_0^1 \frac{dx}{x^a(1+x)^b}$ 收敛;

由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^a(1+x)^b} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^b} = 1$, 则当 $a+b > 1$ 时, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^a(1+x)^b}$ 收敛,

故当 $a < 1$ 且 $a+b > 1$ 时, $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^a(1+x)^b}$ 收敛.

故应选(C).

20 (2020, 11 题, 4 分) 若函数 $f(x)$ 满足 $f''(x) + af'(x) + f(x) = 0 (a > 0)$, $f(0) = m$, $f'(0) = n$, 则 $\int_0^{+\infty} f(x) dx =$ _____.

【答案】 $n + am$.

【解析】 $\int_0^{+\infty} f(x) dx = - \int_0^{+\infty} [f''(x) + af'(x)] dx = -f'(x) \Big|_0^{+\infty} - af(x) \Big|_0^{+\infty}$

只需求出 $f'(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 及 $f(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 即可.

微分方程的特征方程为 $\lambda^2 + a\lambda + 1 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$$

当 $a > 2$ 时, λ_1, λ_2 为两负实根, $f(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$,

当 $a = 2$ 时, $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $f(x) = (C_1 + C_2 x) e^{-x}$,

当 $0 < a < 2$ 时, $\lambda_{1,2} = \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{4-a^2}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{4-a^2}}{2} x \right) e^{-\frac{a}{2} x}$.

不论如上哪种情形, 均有 $f(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, $f'(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$. 因而

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(x) dx &= - \int_0^{+\infty} [f''(x) + af'(x)] dx = -f'(x) \Big|_0^{+\infty} - af(x) \Big|_0^{+\infty} \\ &= f'(0) + af(0) = n + am \end{aligned}$$



练习题

1. (1996, 数三, 6分) 计算 $\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx$.

2. (2013, 数二, 4分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1 < x < e, \\ \frac{1}{x \ln^{\alpha+1} x}, & x \geq e. \end{cases}$ 若反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 则

(A) $\alpha < -2$. (B) $\alpha > 2$. (C) $-2 < \alpha < 0$. (D) $0 < \alpha < 2$.

3. (2014, 数二, 4分) 积分 $\int_{-\infty}^1 \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

练习题参考答案

1. 【分析】 本题的被积函数是幂函数和指数函数两类不同函数相乘, 应该用分部积分.

【解】 (方法一) 由于

$$\begin{aligned} \int \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx &= \int x d\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right) = \frac{x}{1+e^{-x}} - \int \frac{dx}{1+e^{-x}} \\ &= \frac{x}{1+e^{-x}} - \int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \frac{x}{1+e^{-x}} - \ln(1+e^x) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{则 } \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{xe^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x) \right] + \ln 2 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{xe^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{xe^x}{1+e^x} - \ln[e^x(1+e^{-x})] \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{xe^x}{1+e^x} - x - \ln(1+e^{-x}) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{-x}{1+e^x} - \ln(1+e^{-x}) \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\text{故 } \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx = \ln 2.$$

$$\begin{aligned} \text{(方法二)} \quad \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{xe^x}{(1+e^x)^2} dx = - \int_0^{+\infty} x d\left(\frac{1}{1+e^x}\right) \\ &= - \frac{x}{1+e^x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+e^x} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+e^x} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx \\ &= -\ln(1+e^{-x}) \Big|_0^{+\infty} = \ln 2. \end{aligned}$$

2. 【答案】 D.

$$\text{【解析】 } \int_1^{+\infty} f(x) dx = \int_1^e \frac{dx}{(x-1)^{\alpha-1}} + \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^{\alpha+1} x},$$



当 $\alpha - 1 < 1$, 即 $\alpha < 2$ 时, $\int_1^e \frac{dx}{(x-1)^{\alpha-1}}$ 收敛,

$$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^{\alpha+1} x} = \int_e^{+\infty} \frac{d \ln x}{\ln^{\alpha+1} x} = \int_1^{+\infty} \frac{du}{u^{\alpha+1}}$$

则当 $\alpha > 0$ 时, $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^{\alpha+1} x}$ 收敛, 故 $0 < \alpha < 2$ 时原积分收敛.

【评注】 本题主要考查用定义判定反常积分的敛散性. 这里不仅用到反常积分的概念, 而且还用到两个基本结论

$$(1) \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx \begin{cases} p > 1, & \text{收敛,} \\ p \leq 1, & \text{发散,} \end{cases} (a > 0); (2) \int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx \begin{cases} p < 1, & \text{收敛,} \\ p \geq 1, & \text{发散.} \end{cases}$$

3. **【答案】** $\frac{3}{8}\pi$.

$$\begin{aligned} \text{【解析】} \int_{-\infty}^1 \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx &= \int_{-\infty}^1 \frac{dx}{(x+1)^2 + 4} \\ &= \frac{1}{2} \arctan \frac{x+1}{2} \Big|_{-\infty}^1 = \frac{3}{8}\pi. \end{aligned}$$

微信公众号【顶尖考研】

小结

反常积分有两种, 即无穷区间上的反常积分和无界函数的反常积分, 两种反常积分都定义为变限定积分的极限. 因此, 计算反常积分就是先算一个定积分, 再计算一个极限, 在解题过程中这两个步骤可一并进行, 这就得到计算反常积分的换元法和分部积分法, 这两种方法是计算反常积分的主要方法.

七、定积分应用

21 (2011, 9 题, 4 分) 曲线 $y = \int_0^x \tan t dt$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$) 的弧长 $s =$ _____.

【答案】 $\ln(1 + \sqrt{2})$.

【解析】 由 $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{1 + \tan^2 x} dx = \sec x dx$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$)

所以

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln(1 + \sqrt{2})$$

【评注】 本题主要考查曲线弧长的计算, 计算中用到一个基本积分公式

$$\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + C$$



22 (2012, 18 题, 10 分) 已知曲线 $L: \begin{cases} x = f(t), \\ y = \cos t, \end{cases} \quad (0 \leq t < \frac{\pi}{2})$, 其中函数 $f(t)$ 具有连续导数, 且 $f(0) = 0, f'(t) > 0 (0 < t < \frac{\pi}{2})$. 若曲线 L 的切线与 x 轴的交点到切点的距离恒为 1, 求函数 $f(t)$ 的表达式, 并求以曲线 L 及 x 轴和 y 轴为边界的区域的面积.

【分析】 先求切线方程, 然后根据两点间的距离恒为 1 得到微分方程.

【解】 (1) 由参数方程的求导公式有:

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\sin t}{f'(t)}$$

于是 L 上任意一点 $(x, y) = (f(t), \cos t)$ 处的切线方程为

$$Y - \cos t = -\frac{\sin t}{f'(t)}[X - f(t)]$$

令 $Y = 0$, 得此切线与 x 轴的交点为 $(f'(t)\cot t + f(t), 0)$.

由 $(f'(t)\cot t + f(t), 0)$ 到切点 $(f(t), \cos t)$ 的距离恒为 1, 有

$$(f'(t)\cot t + f(t) - f(t))^2 + (0 - \cos t)^2 = 1$$

解得 $f'(t) = \pm \frac{\sin^2 t}{\cos t}$. 由 $f'(t) > 0 (0 < t < \frac{\pi}{2})$, 且 $f(0) = 0$ 知 $f(t) > 0 (0 < t < \frac{\pi}{2})$.

所以

$$f'(t) = \frac{\sin^2 t}{\cos t}, \quad (0 \leq t < \frac{\pi}{2})$$

于是

$$\begin{aligned} f(t) &= \int \frac{\sin^2 t}{\cos t} dt = \int \frac{1 - \cos^2 t}{\cos t} dt = \int (\sec t - \cos t) dt \\ &= \ln(\sec t + \tan t) - \sin t + C \end{aligned}$$

由 $f(0) = 0$ 得 $C = 0$, 故

$$f(t) = \ln(\sec t + \tan t) - \sin t$$

(2) 以曲线 L 及 x 轴和 y 轴为边界的区域的面积

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot f'(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \frac{\sin^2 t}{\cos t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{\sin 2t}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

23 (2019, 17 题, 10 分) 求曲线 $y = e^{-x} \sin x (x \geq 0)$ 与 x 轴之间图形的面积.

【解】 所求面积为

$$S = \int_0^{+\infty} |e^{-x} \sin x| dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} |\sin x| dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} |\sin x| dx$$

$$\text{又} \quad \int e^{-x} \sin x dx = -\frac{e^{-x}}{2} (\cos x + \sin x) + C$$

$$\text{则} \quad \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} |\sin x| dx = (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x dx$$

$$= (-1)^{n+1} \frac{e^{-x}}{2} (\cos x + \sin x) \Big|_{n\pi}^{(n+1)\pi}$$



$$= \frac{1}{2} [e^{-(n+1)\pi} + e^{-n\pi}] = \frac{1+e^{-\pi}}{2} e^{-n\pi}$$

$$\text{则 } S = \frac{1+e^{-\pi}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\pi} = \frac{1+e^{-\pi}}{2(1-e^{-\pi})} = \frac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)}.$$

练习题

1. (2006, 数二, 12 分) 已知曲线 L 的方程为: $\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = 4t - t^2, \end{cases} (t \geq 0).$

(I) 讨论 L 的凹凸性;

(II) 过点 $(-1, 0)$ 引 L 的切线, 求切点 (x_0, y_0) , 并写出切线的方程;

(III) 求此切线与 L (对应于 $x \leq x_0$ 的部分) 及 x 轴所围成的平面图形的面积.

2. (2002, 数三, 7 分) 设 D_1 由抛物线 $y = 2x^2$ 和直线 $x = a, x = 2$ 及 $y = 0$ 所围成的平面区域; D_2 是由抛物线 $y = 2x^2$ 和直线 $y = 0, x = a$ 所围成的平面区域, 其中 $0 < a < 2$.

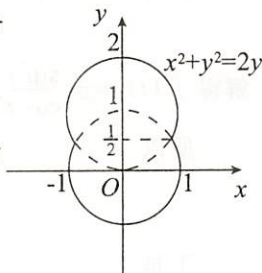
(I) 试求 D_1 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V_1 ; D_2 绕 y 轴旋转而成旋转体体积 V_2 ;

(II) 问当 a 为何值时, $V_1 + V_2$ 取得最大值? 试求此最大值.

3. (2011, 数二, 11 分) 一容器的内侧是由图中曲线 y 轴旋转一周而成的曲面, 该曲线由 $x^2 + y^2 = 2y (y \geq \frac{1}{2})$ 与 $x^2 + y^2 = 1 (y \leq \frac{1}{2})$ 连接而成.

(I) 求容器的容积;

(II) 若将容器内盛满的水从容器顶部全部抽出, 至少需要做多少功? (长度单位: m, 重力加速度为 $g \text{ m/s}^2$, 水的密度为 10^3 kg/m^3)



4. (2014, 数二, 4 分) 一根长为 1 的细棒位于 x 轴的区间 $[0, 1]$ 上, 若其线密度 $\rho = -x^2 + 2x + 1$, 则该细棒的质心坐标 $\bar{x} =$ _____.

5. (2014, 数二, 11 分) 已知函数 $f(x, y)$ 满足 $\frac{\partial f}{\partial y} = 2(y+1)$, 且 $f(y, y) = (y+1)^2 - (2-y) \ln y$, 求曲线 $f(x, y) = 0$ 所围图形绕直线 $y = -1$ 旋转所成旋转体的体积.

6. (2012, 数二, 12 分) 过点 $(0, 1)$ 作曲线 $L: y = \ln x$ 的切线, 切点为 A , 又 L 与 x 轴交于 B 点, 区域 D 由 L 与直线 AB 围成. 求区域 D 的面积及 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

练习题参考答案

1. 【分析】 为确定 L 的凹凸性, 须先求二阶导数 $\frac{d^2 y}{dx^2}$ 并确定其正负, 要解第 (II) 问, 首先要求出曲线上点 (x_0, y_0) 对应的参数 t_0 处的斜率, 然后求出切线方程, 由 (I) 和 (II) 可知所求平面图形的基本形状, 从而求出其面积.

【解】 (方法一) (I) 由于

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{4-2t}{2t} = \frac{2}{t} - 1$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{2}{t} - 1 \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \left(-\frac{2}{t^2} \right) \cdot \frac{1}{x'(t)} = -\frac{1}{t^3}$$

当 $t > 0$ 时, $\frac{d^2 y}{dx^2} < 0$, 故 L 是凸的;

(II) 当 $t = 0$ 时, $x'(0) = 0, y'(0) = 4, x(0) = 1, y(0) = 0, \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0} = \infty$

则当 $t = 0$ 时, L 在对应点处切线方程为 $x = 1$, 不合题意, 故设切点 (x_0, y_0) 对应的参数为 $t_0 > 0$, 则 L 在 (x_0, y_0) 处的切线方程为

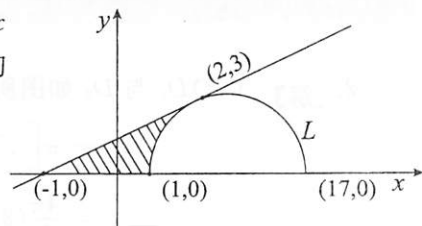
$$y - (4t_0 - t_0^2) = \left(\frac{2}{t_0} - 1 \right) (x - t_0^2 - 1)$$

令 $x = -1, y = 0$, 得 $t_0^2 + t_0 - 2 = 0$, 解得 $t_0 = 1$ 或 $t_0 = -2$ (舍去)

由 $t_0 = 1$ 知, 切点为 $(2, 3)$, 且切线方程为 $y = x + 1$.

(III) 令 $y = 4t - t^2 = 0$, 得 $t_1 = 0, t_2 = 4$, 对应曲线 L 与 x 轴的两个交点 $(1, 0)$ 和 $(17, 0)$, 由以上讨论知曲线 L 和所求的切线如图所示, 故所求平面图形的面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 (x+1) dx - \int_1^2 y dx \\ &= \frac{9}{2} - \int_0^1 (4t - t^2) d(t^2 + 1) \\ &= \frac{9}{2} - \int_0^1 (4t - t^2) \cdot 2t dt = \frac{7}{3} \end{aligned}$$



(方法二) (I) 同方法一.

(II) 由 $\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = 4t - t^2 \end{cases} (t \geq 0)$ 知 $t = \sqrt{x-1}$, 所以

$$y = 4t - t^2 = 4\sqrt{x-1} - (x-1)$$

由于当 $x_0 = 1$ 时, L 在对应点处切线方程为 $x = 1$, 不符合题意, 故可设 L 在点 (x_0, y_0) 处的切线方程为

$$y - y_0 = \left(\frac{2}{\sqrt{x_0-1}} - 1 \right) (x - x_0), (x_0 > 1)$$

将 $x = -1, y = 0$ 代入上式, 得

$$-y_0 = \left(\frac{2}{\sqrt{x_0-1}} - 1 \right) (-1 - x_0)$$

$$-4\sqrt{x_0-1} + (x_0-1) = \frac{-2 + \sqrt{x_0-1}}{\sqrt{x_0-1}} (x_0+1)$$

整理得 $(x_0-1) + \sqrt{x_0-1} - 2 = 0$, 即 $(\sqrt{x_0-1} + 2)(\sqrt{x_0-1} - 1) = 0$,

解得 $x_0 = 2$, 并得 $y_0 = 3$, 因此切线方程为 $y = x + 1$.

(III) 在 $y = 4\sqrt{x-1} - (x-1)$ 中令 $y = 0$, 得 L 与 x 轴的交点为 $(1, 0)$ 和 $(17, 0)$, 故所求平面图形的面积为



$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-1}^2 (x+1)dx - \int_1^2 [4\sqrt{x-1} - (x-1)]dx \\
 &= \frac{2}{9} - \left[\frac{8}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}(x-1)^2 \right] \Big|_1^2 \\
 &= \frac{2}{9} - \frac{13}{6} = -\frac{7}{3}
 \end{aligned}$$

【评注】 本题主要考查的是参数方程确定的函数的导数, 参数方程所表示的曲线的切线及所围的面积. 由于曲线是用参数方程表示的, 因此, 在解第(Ⅱ)(Ⅲ)两问时应用参数方程比较方便, 即方法一较方便, 而把参数方程化为直角坐标方程(即方法二)稍繁一些.

考生的问题主要是:

- 1) 部分考生将参数方程二阶导数求错;
- 2) 不少考生搞不清参数方程所表示的曲线 L 的基本形状, 当然面积也就求错了.

2. 【解】 (Ⅰ) D_1 与 D_2 如图所示, 则

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \pi \int_a^2 y^2 dx = \pi \int_a^2 (2x^2)^2 dx \\
 &= \frac{4\pi}{5} (32 - a^5)
 \end{aligned}$$

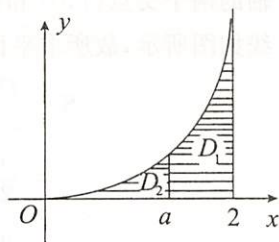
$$\begin{aligned}
 V_2 &= \pi a^2 \cdot 2a^2 - \pi \int_0^{2a^2} x^2 dy \\
 &= 2\pi a^4 - \pi \int_0^{2a^2} \frac{y}{2} dy \\
 &= 2\pi a^4 - \pi a^4 = \pi a^4
 \end{aligned}$$

$$(Ⅱ) V = V_1 + V_2 = \frac{4\pi}{5} (32 - a^5) + \pi a^4,$$

$$\frac{dV}{da} = 4\pi a^3 (1 - a)$$

当 $a = 1$ 时, $\frac{dV}{da} = 0$, 当 $0 < a < 1$ 时, $\frac{dV}{da} > 0$, V 单调增加; 当 $a > 1$ 时, $\frac{dV}{da} < 0$, V 单调减少,

则 $a = 1$ 时 V 最大, 且最大值为 $V_1 + V_2 = \frac{129}{5}\pi$.



3. 【解】 (Ⅰ) 由对称性知容器位于 $y = \frac{1}{2}$ 上、下两侧部分的容积相等, 因此, 只须考查 $-1 \leq$

$y \leq \frac{1}{2}$ 部分, 曲线可表示为 $x = f(y) = \sqrt{1-y^2} \left(-1 \leq y \leq \frac{1}{2} \right)$, 则容积

$$V = 2 \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \pi f^2(y) dy = 2\pi \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (1-y^2) dy = \frac{9}{4}\pi$$

(Ⅱ) 容器内侧曲线记为 $x = f(y)$, 在 y 轴取小区间 $[y, y+dy]$, 对应容器内小薄片水的重量为 $\rho g \pi f^2(y) dy$ (ρ 为水的密度), 抽出这部分水需走的路程近似为 $2-y$, 将此薄层水抽出需做的功近似等于



$$\begin{aligned} dW &= \rho g \pi f^2(y)(2-y)dy \\ &= \begin{cases} \rho g \pi (1-y^2)(2-y)dy, & -1 \leq y \leq \frac{1}{2}, \\ \rho g \pi (2y-y^2)(2-y)dy, & \frac{1}{2} \leq y \leq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{则 } W &= \pi \rho g \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (1-y^2)(2-y)dy + \pi \rho g \int_{\frac{1}{2}}^2 (2y-y^2)(2-y)dy \\ &= \pi \rho g \left[\int_{-1}^{\frac{1}{2}} (y^3 - 2y^2 - y + 2)dy + \int_{\frac{1}{2}}^2 (y^3 - 4y^2 + 4y)dy \right] \\ &= \frac{27}{8} \pi \rho g = \frac{27 \times 10^3}{8} \pi g (\text{J}). \end{aligned}$$

4. 【答案】 $\frac{11}{20}$.

【解析】 质心的横坐标为

$$\bar{x} = \frac{\int_0^1 x \rho(x) dx}{\int_0^1 \rho(x) dx} = \frac{\int_0^1 x(-x^2 + 2x + 1) dx}{\int_0^1 (-x^2 + 2x + 1) dx} = \frac{\frac{11}{12}}{\frac{5}{3}} = \frac{11}{20}$$

5. 【解】 由 $\frac{\partial f}{\partial y} = 2(y+1)$ 可知, $f(x, y) = \int 2(y+1)dy = (y+1)^2 + \varphi(x)$,

又 $f(y, y) = (y+1)^2 - (2-y)\ln y$, 则

$$(y+1)^2 - (2-y)\ln y = (y+1)^2 + \varphi(y)$$

故 $\varphi(y) = -(2-y)\ln y$, 曲线 $f(x, y) = 0$ 的方程为

$$(y+1)^2 = (2-x)\ln x, (1 \leq x \leq 2)$$

其所围图形绕直线 $y = -1$ 旋转所成旋转体的体积

$$V = \pi \int_1^2 (y+1)^2 dx = \pi \int_1^2 (2-x)\ln x dx = \left(2\ln 2 - \frac{5}{4} \right) \pi$$

6. 【解】 设切点 A 的坐标为 (x_1, y_1) , 则切线方程为

$$y - y_1 = \frac{1}{x_1}(x - x_1)$$

将点 $(0, 1)$ 代入, 得 $x_1 = e^2, y_1 = 2$.

所求面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_1^{e^2} \ln x dx - \frac{1}{2}(e^2 - 1) \cdot 2 = x \ln x \Big|_1^{e^2} - \int_1^{e^2} dx - e^2 + 1 \\ &= 2e^2 - e^2 + 1 - e^2 + 1 = 2 \end{aligned}$$

所求体积为

$$V = \pi \int_1^{e^2} \ln^2 x dx - \frac{\pi}{3} \cdot 4 \cdot (e^2 - 1)$$



$$\begin{aligned}
 &= \pi(x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x) \Big|_1^{e^2} - \frac{4\pi}{3}(e^2 - 1) \\
 &= \frac{2\pi}{3}(e^2 - 1)
 \end{aligned}$$

小结

考研试卷中几乎每年都有应用题,而定积分的应用题是考得最多的.定积分的应用题主要分为两类:

(1) 定积分在几何上的应用.

定积分在几何上的应用主要包括:计算平面图形的面积,求平面曲线的弧长,求旋转体的体积及表面积,其中平面域面积和旋转体体积考的更多.

(2) 定积分在物理上的应用.

定积分在物理上的应用主要包括:求功、压力及引力.比起几何应用,物理应用考得少多了.

解决以上问题常用的两种方法:

(1) 代公式

几何应用通常是利用已有公式计算,但有些问题没有现成公式,此时用“微元法”.

(2) 微元法

物理应用没有现成公式可以直接用,因此,要用“微元法”.首先建立“微元”,即写出所计算的几何或物理量 M 在微小区间 $[x, x+dx]$ 上对应的近似值 $dM = f(x)dx$,然后对微元积分,得到所求的量 $M = \int_a^b f(x)dx$.



第四章 向量代数和空间解析几何

本章导读

本章内容只在硕士研究生入学考试数学试题中数学一要求. 此部分考题较少, 不是说该内容不重要, 在考试复习中也要重视这方面的内容.

试题特点

单独出题的几率较小, 即使出题也多为选择题或填空题, 试题难度不大. 但多元函数微分学在几何中的应用、重积分、曲线和曲面积分的题目有许多涉及空间解析几何. 主要要掌握向量的概念、运算及其运算性质, 会求各种形式的直线及平面方程, 特别是要记住常见的几种曲面方程以及它们在各坐标面上的投影.

考题详析

一、求点到平面的距离

1. 点 P_0 到过点 P 且以 S 为方向向量的直线的距离为 $d = \frac{|\overrightarrow{P_0P} \times S|}{|S|}$.

2. 求两条平行直线, 两个平行平面间的距离, 转化为点到直线或平面的距离.

二、求旋转面的方程

1 (2009, 17 题, 11 分) 椭球面 S_1 是椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 绕 x 轴旋转而成, 圆锥面 S_2 是过点 $(4, 0)$ 且与椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 相切的直线绕 x 轴旋转而成.

(I) 求 S_1 及 S_2 的方程;

(II) 求 S_1 及 S_2 之间的立体体积.

【分析】 S_1 及 S_2 为两个旋转面, 方程可直接写出; 所围立体的体积可利用定积分或二重积分来计算.

【解】 (I) S_1 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2 + z^2}{3} = 1$. 过点 $(4, 0)$ 与 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 相切的直线方程为 $y = \pm \left(\frac{1}{2}x - 2\right)$, 切点为 $\left(1, \pm \frac{3}{2}\right)$, 所以 S_2 的方程为 $y^2 + z^2 = \left(\frac{1}{2}x - 2\right)^2$.

(II) S_1 及 S_2 之间的体积等于一个底面半径为 $\frac{3}{2}$ 、高为 3 的锥体体积 $\frac{9}{4}\pi$ 与部分椭球体体积 V 之差, 其中 $V = \frac{3}{4}\pi \int_1^2 (4 - x^2) dx = \frac{5}{4}\pi$.

故所求体积为 $\frac{9}{4}\pi - \frac{5}{4}\pi = \pi$.



第五章 多元函数的微分学

本章导读

本章主要研究二元函数的偏导数、全微分等概念,要掌握计算它们的各种方法以及它们的应用.一元函数中的许多结论可以推广到二元函数中来,但有些结论是不成立的.二元函数微分学比一元函数的微分学要复杂得多,我们要掌握它们的共同规律,踏踏实实地做一些题目,一定会收到预期的效果.

试题特点

每年试题一般是一个大题、一个小题,分数约占试卷的8%,主要考查复合函数求偏导数及多元函数的极值,难度不是很大.一定要熟练掌握复合函数求偏导数的公式,特别要注意抽象函数求高阶偏导数的题目,以及复合函数求偏导数的方法在隐函数求偏导中的应用.同时,多元函数微分学在几何中的应用和求函数的极值、最值也是考研数学的一个重点.

考题详析

一、求多元函数的偏导数及全微分

1 (2009, 9题, 4分) 设函数 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, $z = f(x, xy)$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ _____.

【答案】 $xf''_{12} + f'_2 + xyf''_{22}$.

【解析】 由 $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 + f'_2 \cdot y$, 得 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = xf''_{12} + f'_2 + xyf''_{22}$.

2 (2010, 2题, 4分) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0$ 确定, 其中 F 为可微函数, 且

$$F'_2 \neq 0, \text{ 则 } x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} =$$

(A) x .

(B) z .

(C) $-x$.

(D) $-z$.

【答案】 B.

【解析】 因为 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_1}{F'_2} = -\frac{F'_1\left(-\frac{y}{x^2}\right) + F'_2\left(-\frac{z}{x^2}\right)}{F'_2 \cdot \frac{1}{x}} = \frac{F'_1 \cdot \frac{y}{x} + F'_2 \cdot \frac{z}{x}}{F'_2}$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{F'_1 \cdot \frac{1}{x}}{F'_2 \cdot \frac{1}{x}} = -\frac{F'_1}{F'_2}$$

所以

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{yF'_1 + xF'_2}{F'_2} - \frac{yF'_1}{F'_2} = \frac{F'_2 \cdot z}{F'_2} = z$$

因此应选(B).

【评注】 此题也可两边求全微分求得 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

3 (2011, 11 题, 4 分) 设函数 $F(x, y) = \int_0^{xy} \frac{\sin t}{1+t^2} dt$, 则 $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \Big|_{x=0, y=2} =$ _____.

【答案】 4.

【解析】 由 $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{y \sin xy}{1+(xy)^2}$, 得

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \Big|_{x=0, y=2} = \left(\frac{2 \sin 2x}{1+4x^2} \right)' \Big|_{x=0} = \frac{4(1+4x^2) \cos 2x - 16x \sin 2x}{(1+4x^2)^2} \Big|_{x=0} = 4$$

故应填 4.

4 (2011, 16 题, 9 分) 设函数 $z = f(xy, yg(x))$, 函数 f 具有二阶连续偏导数, 函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$. 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{x=1, y=1}$.

【分析】 利用多元复合函数的求偏导法则及 $g'(1)=0$.

【解】 由题意 $g'(1)=0$. 因为 $\frac{\partial z}{\partial x} = yf'_1 + yg'(x)f'_2$, 有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f'_1 + y[xf''_{11} + g(x)f''_{12}] + g'(x)f'_2 + yg'(x)[xf''_{21} + g(x)f''_{22}]$$

所以令 $x=y=1$, 且注意到 $g(1)=1, g'(1)=0$, 得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{x=1, y=1} = f'_1(1, 1) + f''_{11}(1, 1) + f''_{12}(1, 1)$$

5 (2012, 3 题, 4 分) 如果函数 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处连续, 那么下列命题正确的是

(A) 若极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{|x|+|y|}$ 存在, 则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微.

(B) 若极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2+y^2}$ 存在, 则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微.

(C) 若 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微, 则极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{|x|+|y|}$ 存在.

(D) 若 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微, 则极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2+y^2}$ 存在.

【答案】 B.



【解析】 若极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在, 则有 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x,y) = 0$,

又由 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续, 可知 $f(0,0) = 0$.

$$f'_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0)}{x^2+0^2} \cdot x = 0$$

类似 $f'_y(0,0) = 0$.

于是

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y) - f(0,0) - [f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y]}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y)}{x^2+y^2} \cdot \sqrt{x^2+y^2} = 0 \end{aligned}$$

由微分定义知 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微, 故应选(B).

【评注】 1. 本题主要考查二元函数连续、偏导数、可微的定义.

2. 可采用举反例排除错误答案:

取 $f(x,y) = |x| + |y|$ 排除(A), $f(x,y) = x + y$ 排除(C)(D).

6 (2015, 11 题, 4 分) 若函数 $z = z(x,y)$ 由方程 $e^z + xyz + x + \cos x = 2$ 确定, 则 $dz|_{(0,1)} =$

【答案】 $-dx$.

【解析】 此题考查隐函数求导.

令 $F(x,y,z) = e^z + xyz + x + \cos x - 2$, 则

$$F'_x(x,y,z) = yz + 1 - \sin x, F'_y = xz, F'_z(x,y,z) = e^z + xy$$

又当 $x = 0, y = 1$ 时 $e^z = 1$, 即 $z = 0$. 所以

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(0,1)} = -\frac{F'_x(0,1,0)}{F'_z(0,1,0)} = -1, \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(0,1)} = -\frac{F'_y(0,1,0)}{F'_z(0,1,0)} = 0$$

因而 $dz|_{(0,1)} = -dx$.

7 (2016, 11 题, 4 分) 设函数 $f(u,v)$ 可微, $z = z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z - y^2 = x^2 f(x-z, y)$

确定, 则 $dz|_{(0,1)} =$ _____.

【答案】 $-dx + 2dy$.

【解析】 (方法一) 易得 $x = 0, y = 1$ 时, $z = 1$.

方程两边求全微分

$$zdx + (x+1)dz - 2ydy = 2xf(x-z, y)dx + x^2[f'_1 \cdot (dx - dz) + f'_2 dy]$$

把 $x = 0, y = 1, z = 1$ 代入上式, 有

$$dz|_{(0,1)} = -dx + 2dy$$

(方法二) 易得 $x = 0, y = 1$ 时, $z = 1$.

方程两边分别对 x, y 求偏导数



$$z + (x+1) \frac{\partial z}{\partial x} = 2xf + x^2 f'_1 \left(1 - \frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$(x+1) \frac{\partial z}{\partial y} - 2y = x^2 \left[f'_1 \cdot \left(-\frac{\partial z}{\partial y}\right) + f'_2 \right]$$

把 $x=0, y=1, z=1$ 代入上两式, 有

$$\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(0,1)} = -1, \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(0,1)} = 2$$

所以

$$dz \Big|_{(0,1)} = -dx + 2dy$$

【评注】 本题还可令 $F(x, y) = (x+1)z - y^2 - x^2 f(x-z, y)$, 利用公式法求出 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

8 (2017, 15 题, 10 分) 设函数 $f(u, v)$ 具有 2 阶连续偏导数, $y = f(e^x, \cos x)$,

$$\text{求 } \frac{dy}{dx} \Big|_{x=0}, \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=0}.$$

【解】 利用复合函数求导公式

$$\frac{dy}{dx} = f'_1 e^x - f'_2 \sin x$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = (f''_{11} e^x - f''_{12} \sin x) e^x + f'_1 e^x - (f''_{21} e^x - f''_{22} \sin x) \sin x - f'_2 \cos x$$

$$\text{因而 } \frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = f'_1(1, 1).$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=0} = f''_{11}(1, 1) + f'_1(1, 1) - f'_2(1, 1)$$

9 (2019, 9 题, 4 分) 设函数 $f(u)$ 可导, $z = f(\sin y - \sin x) + xy$, 则 $\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\cos y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$

= _____.

【答案】 $\frac{y}{\cos x} + \frac{x}{\cos y}.$

【解析】 设 $u = \sin y - \sin x$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u)(-\cos x) + y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'(u)\cos y + x$$

$$\text{则 } \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\cos y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\cos x} + \frac{x}{\cos y}.$$

10 (2020, 3 题, 4 分) 设函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微, $f(0, 0) = 0, n = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right) \Big|_{(0,0)}$,

非零向量 a 与 n 垂直, 则

$$(A) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|n \cdot (x, y, f(x, y))|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ 存在.} \quad (B) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|n \times (x, y, f(x, y))|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ 存在.}$$



$$(C) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|a \cdot (x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ 存在.} \quad (D) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|a \times (x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ 存在.}$$

【答案】 A.

【解析】 利用函数 $z = f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微的充要条件 $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta z - f'_x \Delta x - f'_y \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$.

因为 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微, 则

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y) - \frac{\partial f(0,0)}{\partial x}x - \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

$$\text{而 } n \cdot (x,y,f(x,y)) = \frac{\partial f(0,0)}{\partial x}x + \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}y - f(x,y).$$

$$\text{有 } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{n \cdot (x,y,f(x,y))}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0, \text{ 即 } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{|n \cdot (x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

正确答案选(A).

II (2020, 12 题, 4 分) 设函数 $f(x,y) = \int_0^{xy} e^{t^2} dt$, 则 $\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{(1,1)} =$ _____.

【答案】 $4e$.

【解析】 $f(x,y)$ 有二阶连续偏导, 利用 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x e^{x(xy)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = e^{x^3 y^2} + x e^{x^3 y^2} \cdot 3x^2 y^2$$

$$\text{所求 } \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{(1,1)} = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right|_{(1,1)} = 4e.$$

练习题

- (2005, 数三, 8 分) 设 $f(u)$ 具有二阶连续导数, 且 $g(x,y) = f(\frac{y}{x}) + yf(\frac{x}{y})$, 求 $x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.
- (2009, 数二, 10 分) 设 $z = f(x+y, x-y, xy)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 dz 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.
- (2008, 数二, 4 分) 设 $z = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}$, 则 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,2)} =$ _____.

练习题参考答案

1. 【分析】 先求出二阶偏导数, 再代入相应表达式即可.

【解】 由已知条件可得

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} f' \left(\frac{y}{x} \right) + f' \left(\frac{x}{y} \right)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{2y}{x^3} f' \left(\frac{y}{x} \right) + \frac{y^2}{x^4} f'' \left(\frac{y}{x} \right) + \frac{1}{y} f'' \left(\frac{x}{y} \right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{1}{x} f' \left(\frac{y}{x} \right) + f \left(\frac{x}{y} \right) - \frac{x}{y} f' \left(\frac{x}{y} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} &= \frac{1}{x^2} f'' \left(\frac{y}{x} \right) - \frac{x}{y^2} f' \left(\frac{x}{y} \right) + \frac{x}{y^2} f' \left(\frac{x}{y} \right) + \frac{x^2}{y^3} f'' \left(\frac{x}{y} \right) \\ &= \frac{1}{x^2} f'' \left(\frac{y}{x} \right) + \frac{x^2}{y^3} f'' \left(\frac{x}{y} \right) \end{aligned}$$

所以

$$x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{2y}{x} f' \left(\frac{y}{x} \right) + \frac{y^2}{x^2} f'' \left(\frac{y}{x} \right) + \frac{x^2}{y} f'' \left(\frac{x}{y} \right) - \frac{y^2}{x^2} f'' \left(\frac{y}{x} \right) - \frac{x^2}{y} f'' \left(\frac{x}{y} \right) = \frac{2y}{x} f' \left(\frac{y}{x} \right)$$

2. 【解】 因为 $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 + f'_2 + y f'_3$, $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_1 - f'_2 + x f'_3$, 所以

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = (f'_1 + f'_2 + y f'_3) dx + (f'_1 - f'_2 + x f'_3) dy$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= f''_{11} \cdot 1 + f''_{12} \cdot (-1) + f''_{13} \cdot x + f''_{21} \cdot 1 + f''_{22} \cdot (-1) + f''_{23} \cdot x + f'_3 + \\ &\quad y[f''_{31} \cdot 1 + f''_{32} \cdot (-1) + f''_{33} \cdot x] \\ &= f'_3 + f''_{11} - f''_{22} + xy f''_{33} + (x+y) f''_{13} + (x-y) f''_{23} \end{aligned}$$

3. 【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{2}(\ln 2 - 1)$.

【解析】 两边取对数得 $\ln z = \frac{x}{y} \ln \frac{y}{x} \Rightarrow y \ln z = x(\ln y - \ln x)$,

对 x 求偏导, 得

$$y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \ln y - \ln x + x \cdot \left(-\frac{1}{x} \right) = \ln y - \ln x - 1$$

当 $x=1, y=2$ 时, 有 $z=\sqrt{2}$, 代入上式得 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,2)} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\ln 2 - 1)$.

【评注】 二元函数 $z = \left(\frac{y}{x} \right)^{\frac{x}{y}}$ 对 x 求偏导, 应当作幂指函数求导, 可先取对数或化为指数函数再求导.

小结

本题型包括如下几个方面的问题: 初等函数的偏导数和全微分, 求抽象函数的复合函数的偏导数, 由方程所确定的隐函数的偏导数和全微分, 含抽象函数的方程所确定的隐函数的偏导数和全微分, 由方程组所确定的隐函数的偏导数. 主要使用的方法是直接求导法, 公式法, 微分形式不变性.

此题型是常考的题型, 复习时需注意:



1. 要做一定量的题目, 从头到尾做下来, 不要因为繁杂而放弃, 对复杂题目的运算能力是研究生考试的重要测试点.

2. 求抽象函数的高阶偏导数时, 要做到不遗漏、不重复.

另需关注的是, 关于偏导数、全微分、连续、极限等概念及其它它们之间的关系.

二、求多元函数的极值

12 (2009, 15 题, 9 分) 求二元函数 $f(x, y) = x^2(2 + y^2) + y \ln y$ 的极值.

【分析】 先求函数的驻点, 再用二元函数取得极值的充分条件判断.

【解】 由 $\begin{cases} f'_x(x, y) = 2x(2 + y^2) = 0, \\ f'_y(x, y) = 2x^2y + \ln y + 1 = 0 \end{cases}$ 得 $x = 0, y = \frac{1}{e}$.

而 $f''_{xx} = 2(2 + y^2), f''_{yy} = 2x^2 + \frac{1}{y}, f''_{xy} = 4xy$. 则

$$f''_{xx} \Big|_{(0, \frac{1}{e})} = 2\left(2 + \frac{1}{e^2}\right), f''_{xy} \Big|_{(0, \frac{1}{e})} = 0, f''_{yy} \Big|_{(0, \frac{1}{e})} = e$$

因为 $f''_{xx} > 0, (f''_{xy})^2 - f''_{xx}f''_{yy} < 0$, 所以二元函数存在极小值 $f\left(0, \frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$.

13 (2011, 3 题, 4 分) 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 且 $f(x) > 0, f'(0) = 0$, 则函数 $z = f(x) \ln f(y)$ 在点 $(0, 0)$ 处取得极小值的一个充分条件是

(A) $f(0) > 1, f''(0) > 0$.

(B) $f(0) > 1, f''(0) < 0$.

(C) $f(0) < 1, f''(0) > 0$.

(D) $f(0) < 1, f''(0) < 0$.

【答案】 A.

【解析】 由 $z = f(x) \ln f(y)$, 有 $z'_x(x, y) = f'(x) \ln f(y), z'_y(x, y) = f(x) \frac{f'(y)}{f(y)}$,

所以 $z'_x(0, 0) = f'(0) \ln f(0) = 0, z'_y(0, 0) = f(0) \frac{1}{f(0)} f'(0) = 0$.

故 $(0, 0)$ 是 $z = f(x) \ln f(y)$ 可能的极值点. 经计算得

$$\begin{aligned} z''_{xx}(x, y) &= f''(x) \ln f(y) \\ z''_{yy}(x, y) &= f(x) \frac{f''(y)f(y) - [f'(y)]^2}{[f(y)]^2} \\ z''_{xy}(x, y) &= f'(x) \frac{f'(y)}{f(y)} \end{aligned}$$

所以

$$A = z''_{xx}(0, 0) = f''(0) \ln f(0), B = z''_{xy}(0, 0) = 0, C = z''_{yy}(0, 0) = f''(0)$$

由 $B^2 - AC < 0$, 且 $A > 0, C > 0$, 有 $f''(0) > 0, f(0) > 1$. 因此应选 (A).

【评注】 此题与最近几年关于直接求二元函数的极值形式上有所不同, 但实质是一样的.



14 (2012, 16 题, 10 分) 求函数 $f(x, y) = xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

【分析】 此题为常规题型, 只需用二元函数取得极值的充分条件即可.

【解】 令 $f'_x(x, y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} + x \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \cdot (-x) = (1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = 0$,

$$f'_y(x, y) = xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \cdot (-y) = -xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = 0$$

解得函数驻点, 即可能极值点为 $(1, 0)$ 或 $(-1, 0)$.

易得

$$f''_{xx}(x, y) = -2xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}} + (1-x^2) \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \cdot (-x) = (x^2-3)xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$f''_{xy}(x, y) = (x^2-1)y \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$f''_{yy}(x, y) = -x \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} - xy \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \cdot (-y) = (y^2-1)xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

(1) 在驻点 $(1, 0)$,

$$A = f''_{xx}(1, 0) = -2e^{-\frac{1}{2}}, B = f''_{xy}(1, 0) = 0, C = f''_{yy}(1, 0) = -e^{-\frac{1}{2}}$$

由 $B^2 - AC = -2e^{-1} < 0$, 且 $A < 0$, 知 $(1, 0)$ 为极大值点, 极大值 $f(1, 0) = e^{-\frac{1}{2}}$.

(2) 在驻点为 $(-1, 0)$,

$$A = f''_{xx}(-1, 0) = 2e^{-\frac{1}{2}}, B = f''_{xy}(-1, 0) = 0, C = f''_{yy}(-1, 0) = e^{-\frac{1}{2}}$$

由 $B^2 - AC = -2e^{-1} < 0$, 且 $A > 0$, 知 $(-1, 0)$ 为极小值点, 极小值 $f(-1, 0) = -e^{-\frac{1}{2}}$.

15 (2013, 17 题, 10 分) 求函数 $f(x, y) = \left(y + \frac{x^3}{3}\right)e^{x+y}$ 的极值.

【解】 令 $f'_x(x, y) = x^2e^{x+y} + \left(y + \frac{x^3}{3}\right)e^{x+y} = \left(x^2 + y + \frac{x^3}{3}\right)e^{x+y} = 0$,

$$f'_y(x, y) = e^{x+y} + \left(y + \frac{x^3}{3}\right)e^{x+y} = \left(1 + y + \frac{x^3}{3}\right)e^{x+y} = 0$$

$$\text{即} \begin{cases} x^2 + y + \frac{x^3}{3} = 0, \\ 1 + y + \frac{x^3}{3} = 0, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x = 1, \\ y = -\frac{4}{3}, \end{cases} \text{或} \begin{cases} x = -1, \\ y = -\frac{2}{3}, \end{cases}$$

可能极值点为 $\left(1, -\frac{4}{3}\right), \left(-1, -\frac{2}{3}\right)$. 易得

$$f''_{xx}(x, y) = \left(2x + 2x^2 + y + \frac{x^3}{3}\right)e^{x+y}$$

$$f''_{xy}(x, y) = \left(1 + x^2 + y + \frac{x^3}{3}\right)e^{x+y}$$

$$f''_{yy}(x, y) = \left(2 + y + \frac{x^3}{3}\right)e^{x+y}$$

在驻点 $\left(1, -\frac{4}{3}\right)$ 处, $A = f''_{xx}\left(1, -\frac{4}{3}\right) = 3e^{-\frac{1}{3}}, B = f''_{xy}\left(1, -\frac{4}{3}\right) = e^{-\frac{1}{3}},$

$$C = f''_{yy}\left(1, -\frac{4}{3}\right) = e^{-\frac{1}{3}}.$$

由 $B^2 - AC = -2e^{-\frac{2}{3}} < 0$, 且 $A = 3e^{-\frac{1}{3}} > 0$, 则函数在点 $\left(1, -\frac{4}{3}\right)$ 处取到极小值为 $-e^{-\frac{1}{3}}$.



在驻点 $(-1, -\frac{2}{3})$ 处, $A = f''_{xx}(-1, -\frac{2}{3}) = -e^{-\frac{5}{3}}, B = f''_{xy}(-1, -\frac{2}{3}) = e^{-\frac{5}{3}},$

$$C = f''_{yy}(-1, -\frac{2}{3}) = e^{-\frac{5}{3}}.$$

由 $B^2 - AC = 2e^{-\frac{10}{3}} > 0$ 知, 点 $(-1, -\frac{2}{3})$ 不是极值点.

因而此函数只在点 $(1, -\frac{4}{3})$ 处取到极小值 $-e^{-\frac{1}{3}}.$

16 (2015, 17 题, 10 分) 已知函数 $f(x, y) = x + y + xy$, 曲线 $C: x^2 + y^2 + xy = 3$, 求 $f(x, y)$ 在曲线 C 上的最大方向导数.

【分析】 函数在一点处沿梯度方向的方向导数最大, 进而转化为条件最值问题.

【解】 函数 $f(x, y) = x + y + xy$ 在点 (x, y) 处的最大方向导数为

$$\sqrt{f'_x{}^2(x, y) + f'_y{}^2(x, y)} = \sqrt{(1+y)^2 + (1+x)^2}$$

构造拉格朗日函数

$$L(x, y, \lambda) = (1+y)^2 + (1+x)^2 + \lambda(x^2 + y^2 + xy - 3)$$

$$\text{所以} \begin{cases} L'_x(x, y, \lambda) = 2(1+x) + 2\lambda x + \lambda y = 0, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} L'_y(x, y, \lambda) = 2(1+y) + 2\lambda y + \lambda x = 0, & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} L'_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + xy - 3 = 0, & (3) \end{cases}$$

(2) - (1) 得 $(y-x)(2+\lambda) = 0$,

若 $y = x$, 则 $y = x = \pm 1$, 若 $\lambda = -2$, 则 $x = -1, y = 2$ 或 $x = 2, y = -1$.

把两个点坐标代入 $\sqrt{(1+y)^2 + (1+x)^2}$ 中, $f(x, y)$ 在曲线 C 上的最大方向导数为 3.

【评注】 此题有一定新意, 关键是转化为求条件极值问题.

17 (2018, 16 题, 10 分) 将长为 2 m 的铁丝分成三段, 依次围成圆、正方形与正三角形. 三个图形的面积之和是否存在最小值? 若存在, 求出最小值.

【解】 设铁丝分成的三段长分别为 x, y, z , 则 $x + y + z = 2$, 且依次围成的圆的半径, 正方形的边长, 三角形的边长分别为 $\frac{x}{2\pi}, \frac{y}{4}, \frac{z}{3}$.

因而, 三个图形的之和为

$$S = \pi \left(\frac{x}{2\pi} \right)^2 + \left(\frac{y}{4} \right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{z}{3} \right)^2 = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{y^2}{16} + \frac{\sqrt{3}}{36} z^2$$

构造拉格朗日函数 $L(x, y, z, \lambda) = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{y^2}{16} + \frac{\sqrt{3}}{36} z^2 + \lambda(x + y + z - 2),$

$$\text{由} \begin{cases} L'_x = \frac{x}{2\pi} + \lambda = 0, \\ L'_y = \frac{y}{8} + \lambda = 0, \\ L'_z = \frac{\sqrt{3}}{18} z + \lambda = 0, \\ L'_\lambda = x + y + z - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{得} \begin{cases} x = \frac{2\pi}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}, \\ y = \frac{8}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}, \\ z = \frac{6\sqrt{3}}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}. \end{cases}$$



此时 S 取最小值为 $\frac{1}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}$.

【评注】可设三段长为 $x, y, 2 - x - y$ 转化为二元函数的最值问题.

18 (2020, 15 题, 10 分) 求函数 $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - xy$ 的极值.

【解】由 $\begin{cases} f'_x = 3x^2 - y = 0 \\ f'_y = 24y^2 - x = 0 \end{cases}$ 得驻点为 $(0, 0), (\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$.

可计算 $A = f''_{xx} = 6x, B = f''_{xy} = -1, C = f''_{yy} = 48y$

判别式 $\Delta = AC - B^2 = 288xy - 1$.

在 $(0, 0)$ 点处, $\Delta = -1 < 0$, 不是极值点;

在 $(\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$ 点处, $\Delta = 3 > 0$ 且 $A = 1 > 0$, 取极小值为 $f(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}) = -\frac{1}{216}$.

练习题

1. (2005, 数二, 10 分) 已知函数 $z = f(x, y)$ 的全微分 $dz = 2xdx - 2ydy$, 并且 $f(1, 1) = 2$. 求 $f(x, y)$ 在椭圆域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1\}$ 上的最大值和最小值.

2. (2008, 数二, 11 分) 求函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在约束条件 $z = x^2 + y^2$ 和 $x + y + z = 4$ 下的最大值和最小值.

3. (2010, 数三, 10 分) 求函数 $u = xy + 2yz$ 在约束条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ 下的最大值和最小值.

4. (2011, 数三, 10 分) 已知函数 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, $f(1, 1) = 2$ 是 $f(u, v)$ 的极值, $z = f(x + y, f(x, y))$. 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{x=1, y=1}$.

练习题参考答案

1. 【分析】根据全微分和初始条件可先确定 $f(x, y)$ 的表达式. 而 $f(x, y)$ 在椭圆域上的最大值和最小值, 可能在区域的内部达到, 也可能在区域的边界上达到, 且在边界上的最值又转化为求条件极值.

【解】由题设, 知 $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \frac{\partial f}{\partial y} = -2y$,

于是 $f(x, y) = x^2 + C(y)$, 且 $C'(y) = -2y$, 从而 $C(y) = -y^2 + C$,

再由 $f(1, 1) = 2$, 得 $C = 2$, 故 $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2$.

令 $\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ 得可能极值点为 $x = 0, y = 0$. 且

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{(0,0)} = 2, B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(0,0)} = 0, C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{(0,0)} = -2$$

$\Delta = B^2 - AC = 4 > 0$, 所以点 $(0, 0)$ 不是极值点, 从而也非最值点.

再考虑其在边界曲线 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 上的情形: 令拉格朗日函数为



$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \left(x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 \right)$$

令

$$\begin{cases} F'_x = \frac{\partial f}{\partial x} + 2\lambda x = 2(1 + \lambda)x = 0, \\ F'_y = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\lambda y}{2} = -2y + \frac{1}{2}\lambda y = 0, \\ F'_\lambda = x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 = 0 \end{cases}$$

解得可能极值点 $x = 0, y = 2, \lambda = 4; x = 0, y = -2, \lambda = 4; x = 1, y = 0, \lambda = -1; x = -1, y = 0, \lambda = -1$. 代入 $f(x, y)$ 得 $f(0, \pm 2) = -2, f(\pm 1, 0) = 3$,

可见 $z = f(x, y)$ 在区域 $D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1 \right\}$ 内的最大值为 3, 最小值为 -2.

【评注】 本题综合考查了多元函数微分学的知识, 涉及多个重要基础概念, 特别是通过偏导数反求函数关系, 要求考生真正理解并掌握相关知识.

2. **【解】** 设拉格朗日函数为

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(z - x^2 - y^2) + \mu(x + y + z - 4)$$

令

$$\begin{cases} F'_x(x, y, z) = 2x - 2\lambda x + \mu = 0, \\ F'_y(x, y, z) = 2y - 2\lambda y + \mu = 0, \\ F'_z(x, y, z) = 2z + \lambda + \mu = 0, \\ F'_\lambda(x, y, z) = z - x^2 - y^2 = 0, \\ F'_\mu(x, y, z) = x + y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} x = -2, \\ y = -2, \\ z = 8, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x = 1, \\ y = 1, \\ z = 2 \end{cases}$$

故最大值、最小值分别为 $u_{\max} = (-2)^2 + (-2)^2 + 8^2 = 72, u_{\min} = 1^2 + 1^2 + 2^2 = 6$.

【评注】 本题考查两个约束条件 $\begin{cases} \varphi(x, y, z) = 0, \\ \psi(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 下的函数 $u = f(x, y, z)$ 的条件极值问题, 可类似地构造拉格朗日函数

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda \varphi(x, y, z) + \mu \psi(x, y, z)$$

解出可能极值点后, 直接代入目标函数计算函数值, 再比较大小确定相应的极值(或最值)即可.

3. **【分析】** 本题为条件极值问题, 用拉格朗日乘数法.

【解】 令 $F(x, y, z, \lambda) = xy + 2yz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 10)$, 解方程组



$$\begin{cases} F'_x = y + 2\lambda x = 0, \\ F'_y = x + 2z + 2\lambda y = 0, \\ F'_z = 2y + 2\lambda z = 0, \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 10 = 0 \end{cases}$$

得 $x = 1, y = \pm\sqrt{5}, z = 2$ 或 $x = -1, y = \pm\sqrt{5}, z = -2$ 或 $x = \pm 2\sqrt{2}, y = 0, z = \mp\sqrt{2}$. 由

$$u(1, \sqrt{5}, 2) = u(-1, -\sqrt{5}, -2) = 5\sqrt{5}$$

$$u(1, -\sqrt{5}, 2) = u(-1, \sqrt{5}, -2) = -5\sqrt{5}$$

$$u(2\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}) = u(-2\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}) = 0$$

得所求最大值为 $5\sqrt{5}$, 最小值为 $-5\sqrt{5}$.

【评注】 求多元函数的极值已连续几年考查, 仍属基本题型.

4. 【分析】 利用多元复合函数的求偏导法则及取得极值的必要条件.

【解】 由链导法则, $\frac{\partial z}{\partial x} = z'_u + z'_v v'_x$. 其中 $u = x + y, v = f(x, y)$, 所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{uv} + z''_{vu} v'_y + (z''_{uu} + z''_{uv} v'_y) v'_x + z'_v v''_{xy}$$

由于 $f(1, 1) = 2$ 是 $f(u, v)$ 的极值, 则

$$v'_x(1, 1) = f'_x(1, 1) = 0, v'_y(1, 1) = f'_y(1, 1) = 0$$

令 $x = y = 1$, 得

$$\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = z''_{uv}(2, 2) + z'_v(2, 2) v''_{xy}(1, 1) = f''_{uv}(2, 2) + f'_v(2, 2) f'_{uv}(1, 1)$$

【评注】 该题虽然是抽象复合函数求偏导的题目, 实际上关键是要用到二元函数取得极值的必要条件.

小结

1. 二元函数极值的求法:

- (1) 解方程组 $f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0$, 得所有驻点;
- (2) 对每一个驻点 (x_0, y_0) , 求 $A = f''_{xx}(x_0, y_0), B = f''_{xy}(x_0, y_0), C = f''_{yy}(x_0, y_0)$ 的值;
- (3) 由 $B^2 - AC$ 的符号确定是否为极值点, 是极大值点还是极小值点.

2. 条件极值的求法: 用拉格朗日乘数法.

3. 最值的求法:

闭区域上连续多元函数的最值可能在区域内部或边界上达到, 先求出在区域内部的所有驻点以及偏导数不存在的点, 比较这些点与边界上点的函数值, 最大者即为最大值, 最小者即为最小值. 对于实际问题一般根据实际背景来确定是否取最值(如可能极值点唯一, 则极小(大)值点即最小(大)值点).



三、反问题

19 (2014, 17 题, 10 分) 设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数, $z = f(e^x \cos y)$ 满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4z + e^x \cos y)e^{2x}$$

若 $f(0) = 0, f'(0) = 0$, 求 $f(u)$ 的表达式.

【分析】 根据已知的关系式, 变形得到关于 $f(u)$ 的微分方程, 解微分方程求得 $f(u)$.

【解】 由 $z = f(e^x \cos y)$ 得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(e^x \cos y) \cdot e^x \cos y, \frac{\partial z}{\partial y} = f'(e^x \cos y) \cdot (-e^x \sin y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(e^x \cos y) \cdot e^x \cos y \cdot e^x \cos y + f'(e^x \cos y) \cdot e^x \cos y$$

$$= f''(e^x \cos y) \cdot e^{2x} \cos^2 y + f'(e^x \cos y) \cdot e^x \cos y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(e^x \cos y) \cdot (-e^x \sin y) \cdot (-e^x \sin y) + f'(e^x \cos y) \cdot (-e^x \cos y)$$

$$= f''(e^x \cos y) \cdot e^{2x} \sin^2 y - f'(e^x \cos y) \cdot e^x \cos y,$$

由 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4z + e^x \cos y)e^{2x}$, 代入得,

$$f''(e^x \cos y) \cdot e^{2x} = [4f(e^x \cos y) + e^x \cos y]e^{2x}$$

即 $f''(e^x \cos y) - 4f(e^x \cos y) = e^x \cos y$, 令 $e^x \cos y = u$, 得 $f''(u) - 4f(u) = u$,

特征方程 $\lambda^2 - 4 = 0, \lambda = \pm 2$, 得齐次方程通解 $\bar{y} = C_1 e^{2u} + C_2 e^{-2u}$.

设特解 $y^* = au + b$, 代入方程得 $a = -\frac{1}{4}, b = 0$, 特解 $y^* = -\frac{1}{4}u$, 则原方程通解为

$$y = f(u) = C_1 e^{2u} + C_2 e^{-2u} - \frac{1}{4}u$$

由 $f(0) = 0, f'(0) = 0$, 得 $C_1 = \frac{1}{16}, C_2 = -\frac{1}{16}$, 则

$$y = f(u) = \frac{1}{16}e^{2u} - \frac{1}{16}e^{-2u} - \frac{1}{4}u$$

练习题

1. (2010, 数二, 11 分) 设函数 $u = f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 且满足等式 $4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, 确定 a, b 的值, 使等式在变换 $\xi = x + ay, \eta = x + by$ 下化简为 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$.

2. (2014, 数三, 10 分) 设函数 $f(u)$ 具有连续导数, 且 $z = f(e^x \cos y)$ 满足

$$\cos y \frac{\partial z}{\partial x} - \sin y \frac{\partial z}{\partial y} = (4z + e^x \cos y)e^x$$

若 $f(0) = 0$, 求 $f(u)$ 的表达式.

练习题参考答案

1. 【分析】 利用复合函数的链导法则变形原等式即可.

【解】 由复合函数的链导法则得

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = a \frac{\partial u}{\partial \xi} + b \frac{\partial u}{\partial \eta}\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ &= a \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + (a+b) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(a \frac{\partial u}{\partial \xi} + b \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \\ &= a \left(a \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \right) + b \left(b \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + a \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \right) \\ &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2ab \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\end{aligned}$$

由 $4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, 得

$$(5a^2 + 12a + 4) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (5b^2 + 12b + 4) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + (12(a+b) + 10ab + 8) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

$$\text{因而} \begin{cases} 5a^2 + 12a + 4 = 0, \\ 5b^2 + 12b + 4 = 0, \\ 12(a+b) + 10ab + 8 \neq 0. \end{cases} \quad \text{解得}$$

$$\begin{cases} a = -\frac{2}{5}, \\ b = -2, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} a = -2, \\ b = -\frac{2}{5}. \end{cases}$$

【评注】 此题主要考查复合函数链导法则的熟练运用, 是对运算能力的考核.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



2.【分析】 利用复合函数偏导数的计算方法求出两个偏导数,代入所给偏微分方程,转化为可求解的常微分方程.

【解】 因为 $\frac{\partial z}{\partial x} = f'(e^x \cos y)e^x \cos y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -f'(e^x \cos y)e^x \sin y$, 所以

$$\begin{aligned}\cos y \frac{\partial z}{\partial x} - \sin y \frac{\partial z}{\partial y} &= \cos y f'(e^x \cos y)e^x \cos y - \sin y [-f'(e^x \cos y)e^x \sin y] \\ &= f'(e^x \cos y)e^x\end{aligned}$$

因此 $\cos y \frac{\partial z}{\partial x} - \sin y \frac{\partial z}{\partial y} = (4z + e^x \cos y)e^x$ 化为

$$f'(e^x \cos y) = 4f(e^x \cos y) + e^x \cos y$$

从而函数 $f(u)$ 满足方程 $f'(u) = 4f(u) + u$. 这是一阶线性非齐次微分方程,直接代通解公式得该方程的通解为 $f(u) = Ce^{4u} - \frac{u}{4} - \frac{1}{16}$.

由 $f(0) = 0$ 得 $C = \frac{1}{16}$. 故

$$f(u) = \frac{1}{16}(e^{4u} - 4u - 1)$$

【评注】 一阶线性非齐次微分方程是非常重要的一类可解方程,其通解公式要熟记. 对于方程 $y' + p(x)y = q(x)$, 其通解为 $y = e^{-\int p(x)dx} (\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C)$, C 为任意常数.

小结

由已知满足的关系式或条件,利用多元函数微分学的方法和结论,求出待定的函数、参数等,特别是已知偏导数或偏导数所满足的关系式(方程)求函数,主要有两种题型:

1. 已知偏导数,通过不定积分求函数:

设 $f(x, y)$ 有连续偏导数,且 $f'_x(x, y) = g(x, y)$, $f'_y(x, y) = h(x, y)$, 则有

$$f(x, y) = \int f'_x(x, y) dx + \varphi(y) = \int g(x, y) dx + \varphi(y)$$

$$f(x, y) = \int f'_y(x, y) dy + \psi(x) = \int h(x, y) dy + \psi(x)$$

2. 已知多元函数的偏导数所满足的方程,通过变量变换,化为一元函数的导数所满足的方程,即常微分方程,求解微分方程得到函数.

四、求方向导数与梯度

20 (2012, 11 题, 4 分) $\text{grad}\left(xy + \frac{z}{y}\right) \Big|_{(2, 1, 1)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $(1, 1, 1)$ 或 $i + j + k$.

【解析】 根据梯度定义 $\text{grad}f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$, 于是

$$\text{grad}\left(xy + \frac{z}{y}\right)\Big|_{(2,1,1)} = \left(y, x - \frac{z}{y^2}, \frac{1}{y}\right)\Big|_{(2,1,1)} = (1, 1, 1)$$

故应填 $(1, 1, 1)$ 或 $i + j + k$.

21 (2016, 10 题, 4 分) 向量场 $A(x, y, z) = (x + y + z)i + xyj + zk$ 的旋度 $\text{rot } A =$ _____.

【答案】 $j + (y - 1)k$.

【解析】 $\text{rot } A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x + y + z & xy & z \end{vmatrix} = j + (y - 1)k.$

22 (2017, 3 题, 4 分) 函数 $f(x, y, z) = x^2y + z^2$ 在点 $(1, 2, 0)$ 处沿向量 $n = (1, 2, 2)$ 的方向导数为

(A) 12.

(B) 6.

(C) 4.

(D) 2.

【答案】 D.

【解析】

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(1,2,0)} = 2xy\Big|_{(1,2,0)} = 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(1,2,0)} = x^2\Big|_{(1,2,0)} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{(1,2,0)} = 2z\Big|_{(1,2,0)} = 0$$

$$\frac{n}{|n|} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right\}$$

所求方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial n}\Big|_{(1,2,0)} = 4 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{2}{3} + 0 \times \frac{2}{3} = 2$$

故选 (D).

23 (2018, 11 题, 4 分) 设 $F(x, y, z) = xyi - yzj + zxk$, 则 $\text{rot } F(1, 1, 0) =$ _____.

【答案】 $i - k$.

【解析】 由旋度的定义

$$\text{rot } F(1, 1, 0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & -yz & zx \end{vmatrix}\Big|_{(1,1,0)} = (yi - zj - xk)\Big|_{(1,1,0)} = i - k$$

24 (2019, 16 题, 10 分) 设 a, b 为实数, 函数 $z = 2 + ax^2 + by^2$ 在点 $(3, 4)$ 处的方向导数中, 沿方向 $l = -3i - 4j$ 的方向导数最大, 最大值为 10.

(I) 求 a, b ;

(II) 求曲面 $z = 2 + ax^2 + by^2 (z \geq 0)$ 的面积.

【解】 (I) 函数 $z = 2 + ax^2 + by^2$ 在 $(3, 4)$ 点处的梯度为



$$\text{grad } z|_{(3,4)} = \{2ax, 2by\}_{(3,4)} = \{6a, 8b\}$$

由题意知

$$\begin{cases} \frac{6a}{-3} = \frac{8b}{-4}, \\ \sqrt{(6a)^2 + (8b)^2} = 10 \end{cases}$$

解得 $a = b = -1$ 或 $a = b = 1$ (舍去).

(II) 曲面方程为 $z = 2 - x^2 - y^2 (z \geq 0)$, 其在 xOy 面上的投影为 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2\}$, 所求面积为

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{1 + (-2x)^2 + (-2y)^2} dx dy &= \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4r^2} \cdot r dr = \frac{13}{3}\pi \end{aligned}$$

【评注】 曲面面积也可写成 $\iint_S dS$.

小结

1. 求方向导数、梯度直接按定义, 考题较易, 但有时不直接给出, 需计算方向余弦.
2. 若函数在一点可微, 则在此点任何方向的方向导数均存在, 而梯度则是方向导数取得最大值的方向, 梯度的模为方向导数的最大值.
3. 在考研题目中, 有时还会涉及散度和旋度.

五、多元函数微分学的几何应用

25 (2013, 2 题, 4 分) 曲面 $x^2 + \cos(xy) + yz + x = 0$ 在点 $(0, 1, -1)$ 处的切平面方程为

(A) $x - y + z = -2$.

(B) $x + y + z = 0$.

(C) $x - 2y + z = -3$.

(D) $x - y - z = 0$.

【答案】 A.

【解析】 令 $F(x, y, z) = x^2 + \cos(xy) + yz + x$, 则

$$F'_x(0, 1, -1) = [2x - y \sin(xy) + 1] \Big|_{(0,1,-1)} = 1$$

$$F'_y(0, 1, -1) = [-x \sin(xy) + z] \Big|_{(0,1,-1)} = -1$$

$$F'_z(0, 1, -1) = y \Big|_{(0,1,-1)} = 1$$

所求平面方程为 $1 \cdot (x - 0) + (-1) \cdot (y - 1) + 1 \cdot (z + 1) = 0$, 即 $x - y + z = -2$. 故选 (A).

26 (2014, 9 题, 4 分) 曲面 $z = x^2(1 - \sin y) + y^2(1 - \sin x)$ 在点 $(1, 0, 1)$ 处的切平面方程为

【答案】 $2x - y - z = 1$.

【解析】 由于 $z = x^2(1 - \sin y) + y^2(1 - \sin x)$, 则

$$z'_x = 2x(1 - \sin y) - \cos x \cdot y^2, z'_x(1, 0) = 2$$

$$z'_y = -x^2 \cos y + 2y(1 - \sin x), z'_y(1, 0) = -1$$

所以曲面在点 $(1, 0, 1)$ 处的法向量为 $\mathbf{n} = \{2, -1, -1\}$.

故切平面方程为 $2(x-1) - (y-0) - (z-1) = 0$, 即 $2x - y - z - 1 = 0$.

27 (2018, 2 题, 4 分) 过点 $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$, 且与曲面 $z = x^2 + y^2$ 相切的平面为

(A) $z = 0$ 与 $x + y - z = 1$.

(B) $z = 0$ 与 $2x + 2y - z = 2$.

(C) $x = y$ 与 $x + y - z = 1$.

(D) $x = y$ 与 $2x + 2y - z = 2$.

【答案】 B.

【解析】 可用排除法或直接求解.

(排除法) 显然平面 $z = 0$ 与曲面 $z = x^2 + y^2$ 相切, 且过点 $(1, 0, 0)$ 及 $(0, 1, 0)$.

排除 (C)(D).

曲面 $z = x^2 + y^2$ 的法向量为 $\{2x, 2y, -1\}$,

对于 (A), 平面 $x + y - z = 1$ 的法向量为 $\{1, 1, -1\}$,

而方程组 $\begin{cases} \frac{2x}{1} = \frac{2y}{1} = \frac{-1}{-1}, \\ x + y - z = 1, \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$ 无解, 排除 (A).

故正确答案应选 (B).

(直接法) 设切点坐标为 (x_0, y_0, z_0) , 则 $\begin{cases} z_0 = x_0^2 + y_0^2, \\ \{2x_0, 2y_0, -1\} \cdot \{1, -1, 0\} = 0, \\ \{2x_0, 2y_0, -1\} \cdot \{x_0 - 1, y_0, z_0\} = 0, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x_0 = 0, \\ y_0 = 0, \text{ 或 } \\ z_0 = 0 \end{cases} \begin{cases} x_0 = 1, \\ y_0 = 1, \\ z_0 = 2. \end{cases}$

所求切平面为 $z = 0$ 或 $2x + 2y - z = 2$.

小结

微分学在几何上的应用主要包括如下几方面:

1. 求空间曲线在一点处的切线和法平面, 关键是求切线的方向向量.
2. 求曲面在一点处的切平面和法线, 关键是求切平面的法向量.
3. 微分学在几何上的应用经常与空间解析几何结合起来出题, 诸如平面、直线间的关系, 旋转面的方程等.



第六章 重积分

本章导读

本章考查的重点是二重积分的计算,除了掌握基本的计算方法,需注意对称性、拆分区、拆分函数、交换积分次序、交换积分坐标系等的应用.三重积分的考查要求较低.

试题特点

由于重积分可以糅合在线、面积分中,单独对重积分的测试不是每年试题中均出现,分数约占试卷的4%~5%.主要集中在二重积分计算的考查,往往在被积函数和积分区域设置障碍,因而要掌握一定的方法和技巧.另外,被积函数为抽象函数的二重积分值得关注.

考题详析

微信公众号【顶尖考研】

一、基本概念及性质

(ID: diky66)

1 (2009, 2题, 4分) 如图所示, 正方形 $\{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ 被其对角线划分为四个区域 $D_k (k = 1, 2, 3, 4)$, $I_k = \iint_{D_k} y \cos x dx dy$, 则 $\max\{I_k\} =$

(A) I_1 .

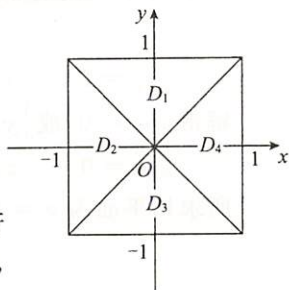
(B) I_2 .

(C) I_3 .

(D) I_4 .

【答案】 A.

【解析】 D_2, D_4 两区域关于 x 轴对称, 被积函数是关于 y 的奇函数, 所以 $I_2 = I_4 = 0$; D_1, D_3 两区域关于 y 轴对称, 被积函数是关于 x 的偶函数, 所以



$$I_1 = 2 \iint_{\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}} y \cos x dx dy > 0$$

$$I_3 = 2 \iint_{\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq -x\}} y \cos x dx dy < 0$$

因而正确答案为(A).

2 (2010, 4题, 4分) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} =$

(A) $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy.$

(B) $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy.$

$$(C) \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy.$$

$$(D) \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy.$$

【答案】 D.

【解析】 因为

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{n \left(1 + \frac{i}{n}\right) n^2 \left[1 + \left(\frac{j}{n}\right)^2\right]} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{n}\right) \left[1 + \left(\frac{j}{n}\right)^2\right]} \cdot \frac{1}{n^2} \\ &= \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy, \end{aligned}$$

所以应选(D).

【评注】 1. 也可用定积分定义计算

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{1 + \frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n} \right] \sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{j}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{1 + \frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n} \right] \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{j}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n} \right] \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \int_0^1 \frac{1}{1+y^2} dy = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy. \end{aligned}$$

2. 以往多次考过定积分定义求极限, 本题是首次考查二重积分定义求极限, 题目较新颖.

练习题

1. (2005, 数三, 4分) 设 $I_1 = \iint_D \cos \sqrt{x^2+y^2} d\sigma$, $I_2 = \iint_D \cos(x^2+y^2) d\sigma$, $I_3 = \iint_D \cos(x^2+y^2)^2 d\sigma$,

其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$, 则

(A) $I_3 > I_2 > I_1$. (B) $I_1 > I_2 > I_3$. (C) $I_2 > I_1 > I_3$. (D) $I_3 > I_1 > I_2$.

2. (2013, 数三, 4分) 设 D_k 是圆域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 位于第 k 象限的部分, 记

$I_k = \iint_{D_k} (y-x) dx dy (k=1, 2, 3, 4)$, 则

(A) $I_1 > 0$. (B) $I_2 > 0$. (C) $I_3 > 0$. (D) $I_4 > 0$.

练习题参考答案

1. 【答案】 A.

【解析】 在区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上, 有 $0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$, 从而有

$$\frac{\pi}{2} > 1 \geq \sqrt{x^2+y^2} \geq x^2+y^2 \geq (x^2+y^2)^2 \geq 0$$



由于 $\cos x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上为单调减少函数, 于是

$$0 \leq \cos \sqrt{x^2 + y^2} \leq \cos(x^2 + y^2) \leq \cos(x^2 + y^2)^2$$

因此

$$\iint_D \cos \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma < \iint_D \cos(x^2 + y^2) d\sigma < \iint_D \cos(x^2 + y^2)^2 d\sigma$$

故应选(A).

【评注】 本题比较二重积分大小, 本质上涉及用重积分的不等式性质和函数的单调性进行分析讨论.

2. **【答案】** B.

【解析】 利用重积分的性质即可得出答案. 因为第1, 3象限区域有关于 x, y 的轮换对称性, 故

$$\iint_{D_k} y dx dy = \iint_{D_k} x dx dy, \text{ 于是 } I_k = \iint_{D_k} (y - x) dx dy = 0 (k = 1, 3).$$

在第2象限区域 D_2 上, $y - x \geq 0$, 第4象限区域 D_4 上 $y - x \leq 0$, 故由重积分的性质得

$$I_2 > 0, I_4 < 0$$

小结

1. $\iint_D f(u, v) du dv = A$ 为常数, 与积分变量用哪个字母表示无关.

2. 二重积分不等式性质须注意条件, 如

(1) $f(x, y) \geq g(x, y)$ 得不到 $\iint_D f(x, y) dx dy > \iint_D g(x, y) dx dy$, 但加上 $f(x, y), g(x, y)$ 连续且 $f(x, y)$ 不恒等于 $g(x, y)$ 结论正确.

(2) $f(x, y) \geq 0$ 且 $\iint_D f(x, y) dx dy = 0$ 推不出 $f(x, y) = 0$, 但加上 $f(x, y)$ 连续, 则结论正确.

二、二重积分的基本计算

3 (2011, 19题, 11分) 已知函数 $f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $f(1, y) = 0, f(x, 1) = 0$, $\iint_D f(x, y) dx dy = a$, 其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 计算二重积分 $\iint_D xy f''_{xy}(x, y) dx dy$.

【分析】 把二重积分化为二次积分, 用分部积分法.

【解】 $\iint_D xy f''_{xy}(x, y) dx dy = \int_0^1 x \left(\int_0^1 y f''_{xy}(x, y) dy \right) dx = \int_0^1 x \left(\int_0^1 y df'_x(x, y) \right) dx$.

用分部积分法

$$\int_0^1 y df'_x(x, y) = y f'_x(x, y) \Big|_0^1 - \int_0^1 f'_x(x, y) dy = - \int_0^1 f'_x(x, y) dy$$



交换积分次序

$$\int_0^1 x \left(\int_0^1 y df'_x(x, y) \right) dx = - \int_0^1 x \left(\int_0^1 f'_x(x, y) dy \right) dx = - \int_0^1 \left(\int_0^1 x f'_x(x, y) dx \right) dy$$

再用分部积分法

$$\int_0^1 x f'_x(x, y) dx = \int_0^1 x df(x, y) = x f(x, y) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x, y) dx = - \int_0^1 f(x, y) dx$$

所以
$$\iint_D x y f''_{xy}(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx = a$$

【评注】 注意在计算二次积分的过程中对分部积分法及已知条件的应用.

4 (2015, 4 题, 4 分) 设 D 是第一象限中由曲线 $2xy = 1, 4xy = 1$ 与直线 $y = x, y = \sqrt{3}x$ 围成的平面区域, 函数 $f(x, y)$ 在 D 上连续, 则 $\iint_D f(x, y) dx dy =$

(A) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$

(B) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$

(C) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr.$

(D) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr.$

【答案】 B.

【解析】 画出积分区域, 用极坐标把二重积分化为二次积分.

曲线 $2xy = 1, 4xy = 1$ 的极坐标方程分别为

$$r = \frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}, r = \frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}$$

直线 $y = x, y = \sqrt{3}x$ 的极坐标方程分别为 $\theta = \frac{\pi}{4}, \theta = \frac{\pi}{3}$.

所以 $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$ 应选 (B).

【评注】 注意极坐标与直角坐标的转化 $dx dy = r dr d\theta$.

5 (2016, 15 题, 10 分) 已知平面区域 $D = \{(r, \theta) \mid 2 \leq r \leq 2(1 + \cos \theta), -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$, 计算二重积分 $\iint_D x dx dy$.

【解】 积分区域 D 关于 x 轴对称, 故由对称性知

$$\begin{aligned} \iint_D x dx dy &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_2^{2(1+\cos \theta)} r^2 \cos \theta dr = \frac{8}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [(1 + \cos \theta)^3 - 1] \cos \theta d\theta \\ &= \frac{16}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos^2 \theta + 3\cos^3 \theta + \cos^4 \theta) d\theta = \frac{16}{3} \times \left(2 + \frac{15}{16}\pi \right) = \frac{32}{3} + 5\pi \end{aligned}$$

【评注】 计算过程中用到了公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为正偶数,} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1, & n \text{ 为大于 1 的奇数.} \end{cases}$$

否则计算稍显复杂.



练习题

1. (2006, 数三, 7 分) 计算二重积分 $\iint_D \sqrt{y^2 - xy} dx dy$, 其中 D 是由直线 $y = x, y = 1, x = 0$ 所围成的平面区域.

2. (2009, 数二、三, 10 分) 计算二重积分 $\iint_D (x - y) dx dy$. 其中

$$D = \{(x, y) \mid (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 2, y \geq x\}$$

3. (2011, 数二, 4 分) 设平面区域 D 由直线 $y = x$, 圆 $x^2 + y^2 = 2y$ 及 y 轴所围成, 则二重积分 $\iint_D xy d\sigma$ = _____.

4. (2003, 数三, 8 分) 计算二重积分

$$I = \iint_D e^{-(x^2 + y^2 - \pi)} \sin(x^2 + y^2) dx dy$$

其中积分区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq \pi\}$.

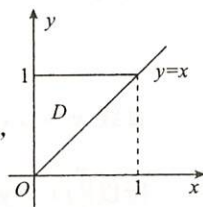
5. (2012, 数二, 10 分) 计算二重积分 $\iint_D xy d\sigma$, 其中区域 D 由曲线 $r = 1 + \cos \theta (0 \leq \theta \leq \pi)$ 与极轴围成.

练习题参考答案

1. 【分析】 画出积分域, 将二重积分化为累次积分即可.

【解】 积分区域如右图. 因为根号下的函数为关于 x 的一次函数, “先 x 后 y ” 积分较容易, 所以

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{y^2 - xy} dx dy &= \int_0^1 dy \int_0^y \sqrt{y^2 - xy} dx \\ &= -\frac{2}{3} \int_0^1 \frac{1}{y} (y^2 - xy)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^y dy = \frac{2}{3} \int_0^1 y^2 dy = \frac{2}{9}. \end{aligned}$$



【评注】 计算二重积分时, 首先画出积分区域的图形, 然后结合积分域的形状和被积函数的形式, 选择坐标系和积分次序.

2. 【分析】 利用极坐标计算

【解】 (方法一) 由 $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 2$, 得 $r \leq 2(\sin \theta + \cos \theta)$, 所以

$$\begin{aligned} \iint_D (x - y) dx dy &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{2(\sin \theta + \cos \theta)} (r \cos \theta - r \sin \theta) r dr \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{2(\sin \theta + \cos \theta)} (r \cos \theta - r \sin \theta) r dr \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left[\frac{1}{3} (\cos \theta - \sin \theta) r^3 \right]_0^{2(\sin \theta + \cos \theta)} d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{8}{3} (\cos \theta - \sin \theta) \cdot (\sin \theta + \cos \theta) \cdot (\sin \theta + \cos \theta)^2 d\theta \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{8}{3} (\cos \theta - \sin \theta) \cdot (\sin \theta + \cos \theta)^3 d\theta \\
 &= \frac{8}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} (\sin \theta + \cos \theta)^3 d(\sin \theta + \cos \theta) \\
 &= \frac{8}{3} \times \frac{1}{4} (\sin \theta + \cos \theta)^4 \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} = -\frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

【方法二】 如图将区域 D 分成 D_1, D_2 两部分, 其中

$$D_1 = \{(x, y) \mid 1 - \sqrt{2 - (x-1)^2} \leq y \leq 1 + \sqrt{2 - (x-1)^2}, 1 - \sqrt{2} \leq x \leq 0\},$$

$$D_2 = \{(x, y) \mid x \leq y \leq 1 + \sqrt{2 - (x-1)^2}, 0 \leq x \leq 2\},$$

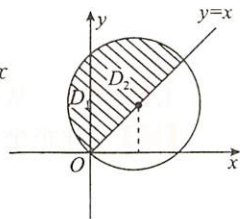
由二重积分的性质知

$$\iint_D (x-y) dx dy = \iint_{D_1} (x-y) dx dy + \iint_{D_2} (x-y) dx dy.$$

因为

$$\begin{aligned}
 \iint_{D_1} (x-y) dx dy &= \int_{1-\sqrt{2}}^0 dx \int_{1-\sqrt{2-(x-1)^2}}^{1+\sqrt{2-(x-1)^2}} (x-y) dy \\
 &= \int_{1-\sqrt{2}}^0 2(x-1) \sqrt{2-(x-1)^2} dx \\
 &= -\frac{2}{3} (\sqrt{2-(x-1)^2})^3 \Big|_{1-\sqrt{2}}^0 = -\frac{2}{3} \\
 \iint_{D_2} (x-y) dx dy &= \int_0^2 dx \int_x^{1+\sqrt{2-(x-1)^2}} (x-y) dy \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^2 [2 - 2(x-1) \sqrt{2-(x-1)^2}] dx \\
 &= -\frac{1}{2} \left[4 + \frac{2}{3} (\sqrt{2-(x-1)^2})^3 \Big|_0^2 \right] = -2
 \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \iint_D (x-y) dx dy = -\frac{8}{3}.$$



【评注】 可利用坐标变换, 令 $u = x-1, v = y-1$, 那么 $D = \{(u, v) \mid u^2 + v^2 \leq 2, v \geq u\}$. 原式化简为

$$\begin{aligned}
 \iint_D (u-v) du dv &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (r \cos \theta - r \sin \theta) \cdot r dr = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} (\cos \theta - \sin \theta) \cdot \frac{r^2}{3} \Big|_0^{\sqrt{2}} d\theta \\
 &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} (\cos \theta - \sin \theta) d\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3} (\sin \theta + \cos \theta) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} \\
 &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \times (-2\sqrt{2}) = -\frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

即为所求.



3.【答案】 $\frac{7}{12}$.

【解析】 易得圆的极坐标方程为 $r = 2\sin \theta$, 于是

$$\begin{aligned}\iint_D xy d\sigma &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\sin \theta} r^2 \cos \theta \sin \theta \cdot r dr = 4 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \theta \cos \theta d\theta \\ &= 4 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \theta d\sin \theta = \frac{7}{12}\end{aligned}$$

4.【分析】 从被积函数与积分区域可以看出, 应该利用极坐标进行计算.

【解】 作极坐标变换: $x = r\cos \theta, y = r\sin \theta$, 有

$$I = e^{\pi} \iint_D e^{-(x^2+y^2)} \sin(x^2+y^2) dx dy = e^{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{\pi}} r e^{-r^2} \sin r^2 dr$$

令 $t = r^2$, 则 $I = \pi e^{\pi} \int_0^{\pi} e^{-t} \sin t dt$.

记 $A = \int_0^{\pi} e^{-t} \sin t dt$, 则

$$\begin{aligned}A &= - \int_0^{\pi} \sin t de^{-t} = - \left[e^{-t} \sin t \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{-t} \cos t dt \right] \\ &= - \int_0^{\pi} \cos t de^{-t} = - \left[e^{-t} \cos t \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^{-t} \sin t dt \right] \\ &= e^{-\pi} + 1 - A\end{aligned}$$

因此 $A = \frac{1}{2}(1 + e^{-\pi})$, $I = \frac{\pi e^{\pi}}{2}(1 + e^{-\pi}) = \frac{\pi}{2}(1 + e^{\pi})$.

5.【解】 (方法一)

$$\begin{aligned}\iint_D xy d\sigma &= \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{1+\cos \theta} r \cos \theta \cdot r \sin \theta \cdot r dr \\ &= \int_0^{\pi} \cos \theta \cdot \sin \theta \cdot \left(\frac{1}{4} r^4 \Big|_0^{1+\cos \theta} \right) d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \cos \theta \sin \theta (1 + \cos \theta)^4 d\theta \\ &= - \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \cos \theta \cdot (1 + \cos \theta)^4 d\cos \theta \\ &= - \frac{1}{4} \int_0^{\pi} [(1 + \cos \theta)^5 - (1 + \cos \theta)^4] d(1 + \cos \theta) \\ &= - \frac{1}{24} (1 + \cos \theta)^6 \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{20} (1 + \cos \theta)^5 \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{8}{3} - \frac{8}{5} = \frac{16}{15}.\end{aligned}$$

(方法二)

$$\begin{aligned}\iint_D xy d\sigma &= \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{1+\cos \theta} r \cos \theta \cdot r \sin \theta \cdot r dr \\ &= \int_0^{\pi} \cos \theta \cdot \sin \theta \cdot \left(\frac{1}{4} r^4 \Big|_0^{1+\cos \theta} \right) d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \cos \theta \sin \theta (1 + \cos \theta)^4 d\theta\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \left(2\cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 \right) \cdot 2\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cdot 16\cos^8 \frac{\theta}{2} d\theta \\
 &= -16 \int_0^{\pi} \left(2\cos^{11} \frac{\theta}{2} - \cos^9 \frac{\theta}{2} \right) d\cos \frac{\theta}{2} \\
 &= -16 \left(\frac{1}{6} \cos^{12} \frac{\theta}{2} - \frac{1}{10} \cos^{10} \frac{\theta}{2} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{16}{15}.
 \end{aligned}$$

小结

1. 计算二重积分的步骤为(1)画出积分区域 D 的示意图.(2)用不等式组表示积分区域 D .(3)把二重积分表示为二次积分.(4)计算二次积分.

2. 注意积分坐标及积分次序的选择,一般来说:若积分区域为圆域或圆域的一部分,被积函数为形如 $f(\sqrt{x^2+y^2})$, $f\left(\frac{y}{x}\right)$, $f\left(\frac{x}{y}\right)$ 等,可考虑采用在极坐标系下进行计算.

3. 利用直角坐标计算二重积分 $d\sigma = dxdy$.

若 $D: a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$, 则 $\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$.

若 $D: c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)$, 则 $\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$.

4. 利用极坐标计算 $d\sigma = r dr d\theta$, 计算方法同直角坐标,一般先 r , 后 θ

若极点 O 在积分区域 D 的外部, D 可以表示为 $D: \alpha \leq \theta \leq \beta, \varphi_1(\theta) \leq r \leq \varphi_2(\theta)$, 则

$$\iint_D f(x, y) dxdy = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$$

若极点 O 在积分区域 D 的边界上, D 可以表示为 $D: \alpha \leq \theta \leq \beta, 0 \leq r \leq \varphi(\theta)$, 则

$$\iint_D f(x, y) dxdy = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$$

若极点 O 在积分区域 D 的内部, D 的边界方程为 $r = \varphi(\theta)$, 则

$$\iint_D f(x, y) dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$$

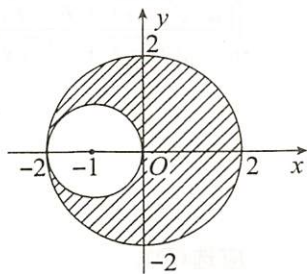
5. 注意利用二重积分的对称性化简运算.

三、利用区域的对称性及函数的奇偶性计算积分

练习题

1. (2004, 数三, 8分) 求 $\iint_D (\sqrt{x^2+y^2} + y) d\sigma$, 其中 D 是由圆 $x^2 + y^2 = 4$ 和 $(x+1)^2 + y^2 = 1$ 所围成的平面区域(如图).

2. (2005, 数二, 4分) 设区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$,



$f(x)$ 是正值连续函数, a, b 为常数, 则 $\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} d\sigma =$

(A) $ab\pi$.(B) $\frac{ab}{2}\pi$.(C) $(a+b)\pi$.(D) $\frac{a+b}{2}\pi$.

3. (2010, 数三, 10 分) 计算二重积分 $\iint_D (x+y)^3 d\sigma$, 其中 D 由曲线 $x = \sqrt{1+y^2}$ 与直线 $x + \sqrt{2}y = 0$ 及 $x - \sqrt{2}y = 0$ 所围成.

4. (2008, 数三, 4 分) 设 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, 则 $\iint_D (x^2 - y) dx dy =$ _____.

5. (2012, 数二, 4 分) 设区域 D 由曲线 $y = \sin x, x = \pm \frac{\pi}{2}, y = 1$ 围成, 则 $\iint_D (x^5 y - 1) dx dy =$

(A) π .

(B) 2.

(C) -2.

(D) $-\pi$.

练习题参考答案

1. 【分析】 首先, 将积分区域 D 分为大圆 $D_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ 减去小圆 $D_2 = \{(x, y) \mid (x+1)^2 + y^2 \leq 1\}$, 再利用对称性与极坐标计算即可.

【解】 令 $D_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}, D_2 = \{(x, y) \mid (x+1)^2 + y^2 \leq 1\}$, 由对称性, $\iint_{D_2} y d\sigma = 0$.

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma &= \iint_{D_1} \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma - \iint_{D_2} \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^2 dr - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\theta \int_0^{-2\cos\theta} r^2 dr \\ &= \frac{16\pi}{3} - \frac{32}{9} = \frac{16}{9}(3\pi - 2) \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \iint_D (\sqrt{x^2 + y^2} + y) d\sigma = \frac{16}{9}(3\pi - 2).$$

【评注】 本题属于在极坐标系下计算二重积分的基本题型, 对于二重积分, 经常利用对称性及将一个复杂区域划分为两个或三个简单区域来简化计算.

2. 【答案】 D.

【解析】 由轮换对称性, 有

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} d\sigma &= \iint_D \frac{a\sqrt{f(y)} + b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)} + \sqrt{f(x)}} d\sigma \\ &= \frac{1}{2} \iint_D \left[\frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} + \frac{a\sqrt{f(y)} + b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)} + \sqrt{f(x)}} \right] d\sigma \\ &= \frac{a+b}{2} \iint_D d\sigma = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{1}{4}\pi \cdot 2^2 = \frac{a+b}{2}\pi. \end{aligned}$$

应选(D).

【评注】 被积函数含有抽象函数时,一般考虑用对称性分析.特别地,当具有轮换对称性(x, y 互换, D 保持不变)时,往往用如下方法:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(y, x) dx dy = \frac{1}{2} \iint_D [f(x, y) + f(y, x)] dx dy$$

3. **【分析】** 被积函数展开,利用二重积分的对称性.

【解】 显然 D 关于 x 轴对称,且 $D = D_1 \cup D_2$, 其中

$$D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, \sqrt{2}y \leq x \leq \sqrt{1+y^2}\}$$

$$D_2 = \{(x, y) \mid -1 \leq y \leq 0, -\sqrt{2}y \leq x \leq \sqrt{1+y^2}\}$$

$$\begin{aligned} \iint_D (x+y)^3 d\sigma &= \iint_D (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) dx dy \\ &= \iint_D (x^3 + 3xy^2) dx dy + \iint_D (3x^2y + y^3) dx dy \\ &= 2 \iint_{D_1} (x^3 + 3xy^2) dx dy + 0 \quad (\text{被积函数 } 3x^2y + y^3 \text{ 关于 } y \text{ 是奇函数}) \\ &= 2 \int_0^1 dy \int_{\sqrt{2}y}^{\sqrt{1+y^2}} (x^3 + 3xy^2) dx = 2 \int_0^1 \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2y^2 \right) \Big|_{\sqrt{2}y}^{\sqrt{1+y^2}} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1 + 8y^2 - 9y^4) dy = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{8}{3} - \frac{9}{5} \right) = \frac{14}{15}. \end{aligned}$$

【评注】 二重积分的对称性的考查一直是研究生考试的重要测试内容.

4. **【答案】** $\frac{\pi}{4}$.

【解析】 由于积分区域 D 关于 x 轴, y 轴对称, 则有

$$\iint_D y dx dy = 0, \iint_D x^2 dx dy = 4 \iint_{D_1} x^2 dx dy, \text{ 其中 } D_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

从而

$$\iint_D (x^2 - y) dx dy = 4 \iint_{D_1} x^2 dx dy = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^2 \cdot r \cos^2 \theta dr = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta) d\theta = \frac{\pi}{4}.$$

5. **【答案】** D.

【解析】 拆分区域 $D = D_1 \cup D_2$, 其中

$$D_1 = \{(x, y) \mid -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0, \sin x \leq y \leq -\sin x\}$$

$$D_2 = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, -\arcsin y \leq x \leq \arcsin y\}$$

显然 D_1 关于 x 轴对称, D_2 关于 y 轴对称, 利用二重积分的对称性 $\iint_D x^5 y dx dy = 0$.

$$\text{因而 } \iint_D (x^5 y - 1) dx dy = - \iint_D dx dy = -\pi.$$



小结

1. 如下结论十分重要:

(1) 若 D 关于 x 轴对称, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} 0, & \text{当 } f(x, -y) = -f(x, y) \text{ 时,} \\ 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma, & \text{当 } f(x, -y) = f(x, y) \text{ 时} \end{cases}$$

其中 D_1 为 D 的上半平面部分.

(2) 若 D 关于 y 轴对称, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} 0, & \text{当 } f(-x, y) = -f(x, y) \text{ 时,} \\ 2 \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma, & \text{当 } f(-x, y) = f(x, y) \text{ 时} \end{cases}$$

其中 D_2 为 D 的右半平面部分.

(3) $x \longleftrightarrow y$ 互换, D 保持不变时, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(y, x) dx dy = \frac{1}{2} \iint_D [f(x, y) + f(y, x)] dx dy$$

2. 若积分区域不具有对称性或被积函数不具有奇偶性可考虑拆分区域或函数.

四、分块函数积分的计算

练习题

1. (2005, 数二、三, 9 分) 计算二重积分 $\iint_D |x^2 + y^2 - 1| d\sigma$, 其中

$$D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

2. (2008, 数二、三, 11 分) 计算 $\iint_D \max(xy, 1) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$.

3. (2007, 数二、三, 11 分) 设二元函数 $f(x, y) = \begin{cases} x^2, & |x| + |y| \leq 1, \\ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & 1 < |x| + |y| \leq 2, \end{cases}$ 计算二

重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 2\}$.

4. (2003, 数三, 4 分) 设 $a > 0$, $f(x) = g(x) = \begin{cases} a, & \text{若 } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ 而 D 表示全平面, 则

$$I = \iint_D f(x) g(y-x) dx dy = \underline{\hspace{2cm}}.$$

练习题参考答案

1. 【分析】被积函数含有绝对值,应当作分区域函数看待,利用积分的可加性分区域积分即可.

【解】将区域 D 分成两个子区域:

$$D_1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, (x, y) \in D\}$$

$$D_2 = \{(x, y) | x^2 + y^2 > 1, (x, y) \in D\}$$

于是

$$\begin{aligned} \iint_D |x^2 + y^2 - 1| d\sigma &= - \iint_{D_1} (x^2 + y^2 - 1) dx dy + \iint_{D_2} (x^2 + y^2 - 1) dx dy \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 (r^2 - 1) r dr + \iint_D (x^2 + y^2 - 1) dx dy - \iint_{D_1} (x^2 + y^2 - 1) dx dy \\ &= \frac{\pi}{8} + \int_0^1 dx \int_0^1 (x^2 + y^2 - 1) dy - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 (r^2 - 1) r dr \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

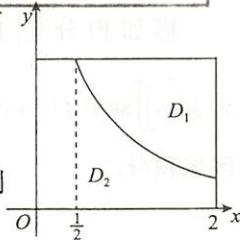
微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

2. 【分析】被积函数 $f(x, y) = \max(xy, 1)$ 是分区域函数,要利用积分的可加性分区域积分.

【解】 $\max(xy, 1) = \begin{cases} xy, & xy \geq 1, \\ 1, & xy < 1, \end{cases}$

记 $D_1 = \{(x, y) | xy \geq 1, (x, y) \in D\}$, $D_2 = \{(x, y) | xy < 1, (x, y) \in D\}$, 则

$$\begin{aligned} \iint_D \max(xy, 1) dx dy &= \iint_{D_1} xy dx dy + \iint_{D_2} 1 dx dy \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^2 xy dy + \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^2 dy + \int_{\frac{1}{2}}^2 dx \int_0^{\frac{1}{x}} dy \\ &= \frac{15}{4} - \ln 2 + 1 + 2 \ln 2 = \frac{19}{4} + \ln 2. \end{aligned}$$



3. 【解】因为被积函数关于 x, y 均为偶函数,且积分区域关于 x, y 轴均对称,所以

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = 4 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma$$

其中 D_1 为 D 在第一象限内的部分. 而

$$\begin{aligned} \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma &= \iint_{\substack{x+y \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0}} x^2 d\sigma + \iint_{\substack{1 \leq x+y \leq 2 \\ x \geq 0, y \geq 0}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} d\sigma \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x^2 dy + \left(\int_0^1 dx \int_{1-x}^{2-x} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy \right) \\ &= \frac{1}{12} + \sqrt{2} \ln(1 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

所以 $\iint_D f(x, y) d\sigma = \frac{1}{3} + 4\sqrt{2} \ln(1 + \sqrt{2}).$



【评注】 被积函数包含 $\sqrt{x^2+y^2}$ 时,可考虑用极坐标,解答如下:

$$\iint_{\substack{1 \leq x+y \leq 2 \\ x>0, y>0}} f(x,y) d\sigma = \iint_{\substack{1 \leq x+y \leq 2 \\ x>0, y>0}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\sin \theta + \cos \theta}}^{\frac{2}{\sin \theta + \cos \theta}} dr = \sqrt{2} \ln(1+\sqrt{2})$$

4. 【答案】 a^2 .

【解析】 $I = \iint_D f(x)g(y-x) dx dy = \iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y-x \leq 1}} a^2 dx dy$

$$= a^2 \int_0^1 dx \int_x^{x+1} dy = a^2 \int_0^1 [(x+1) - x] dx = a^2.$$

【评注】 若被积函数只在某区域内不为零,则二重积分的计算只需在积分区域与被积函数不为零的区域的公共部分上积分即可.

小结

形如积分 $\iint_D |f(x,y)| d\sigma$, $\iint_D \max\{f(x,y), g(x,y)\} d\sigma$, $\iint_D \min\{f(x,y), g(x,y)\} d\sigma$, $\iint_D [f(x,y)] d\sigma$, $\iint_D \operatorname{sgn}\{f(x,y) - g(x,y)\} d\sigma$ 等的被积函数均应当作分区域函数看待,利用积分的可加性分区域积分.

五、交换积分次序及坐标系

6 (2014, 3 题, 4 分) 设 $f(x,y)$ 是连续函数, 则 $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y) dx =$

(A) $\int_0^1 dx \int_0^{x-1} f(x,y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy.$

(B) $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x,y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x,y) dy.$

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr.$

(D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$

【答案】 D.

【解析】 二次积分 $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y) dx$ 对应的积分区域为

$$D = \{(x,y) | -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq 1-y, 0 \leq y \leq 1\}$$

则

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$$

故选(D).

练习题

1. (2007, 数二、三, 4分) 设函数 $f(x, y)$ 连续, 则二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy$ 等于

(A) $\int_0^1 dy \int_{\pi + \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx.$

(B) $\int_0^1 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx.$

(C) $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi + \arcsin y} f(x, y) dx.$

(D) $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx.$

2. (2010, 数二, 20题, 10分) 计算二重积分

$$\iint_D r^2 \sin \theta \sqrt{1 - r^2 \cos 2\theta} dr d\theta$$

其中 $D = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq \sec \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}.$

3. (2009, 数二, 4分) 设函数 $z = f(x, y)$ 连续, 则 $\int_1^2 dx \int_x^2 f(x, y) dy + \int_1^2 dy \int_y^{4-y} f(x, y) dx =$

(A) $\int_1^2 dx \int_1^{4-x} f(x, y) dy.$

(B) $\int_1^2 dx \int_x^{4-x} f(x, y) dy.$

(C) $\int_1^2 dy \int_1^{4-y} f(x, y) dx.$

(D) $\int_1^2 dy \int_y^2 f(x, y) dx.$

4. (2012, 数三, 4分) 设函数 $f(t)$ 连续, 则二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2\cos \theta}^2 f(r^2) r dr =$

(A) $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} f(x^2+y^2) dy.$

(B) $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x^2+y^2) dy.$

(C) $\int_0^2 dy \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{x^2+y^2} f(x^2+y^2) dx.$

(D) $\int_0^2 dy \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x^2+y^2) dx.$

练习题参考答案

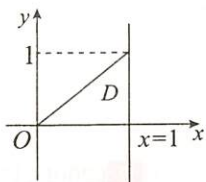
1. 【答案】 B.

【解析】 由题设可知, $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \sin x \leq y \leq 1$, 则 $0 \leq y \leq 1, \pi - \arcsin y \leq x \leq \pi$, 故应选(B).

2. 【分析】 化极坐标积分区域为直角坐标区域, 相应的被积函数也化为直角坐标系下的表示形式, 然后计算二重积分.

【解】 直角坐标系下 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$, 所以

$$\begin{aligned} I &= \iint_D r^2 \sin \theta \sqrt{1 - r^2 \cos 2\theta} dr d\theta = \iint_D r \sin \theta \sqrt{1 - r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)} \cdot r dr d\theta \\ &= \iint_D y \sqrt{1 - x^2 + y^2} dx dy = \int_0^1 dx \int_0^x y \sqrt{1 - x^2 + y^2} dy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{2} \sqrt{1 - x^2 + y^2} d(1 - x^2 + y^2) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 \frac{1}{3} [1 - (1-x^2)^{\frac{3}{2}}] dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx \quad \left(\text{令 } x = \sin \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2} \right)^2 d\theta \\
 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{8} \cos 4\theta \right) d\theta = \frac{1}{3} - \frac{1}{16} \pi.
 \end{aligned}$$

3. 【答案】 C.

【解析】 $\int_1^2 dx \int_x^2 f(x,y) dy + \int_1^2 dy \int_y^{4-y} f(x,y) dx$ 的积分区域为两部分

$$D_1 = \{(x,y) \mid 1 \leq x \leq 2, x \leq y \leq 2\}, D_2 = \{(x,y) \mid 1 \leq y \leq 2, y \leq x \leq 4-y\}$$

将其合并写成 $D = \{(x,y) \mid 1 \leq y \leq 2, 1 \leq x \leq 4-y\}$,

故二重积分可以表示为 $\int_1^2 dy \int_1^{4-y} f(x,y) dx$. 答案应选(C).

4. 【答案】 B.

【解析】 令 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 则 $r = 2$ 所对应的直角坐标方程为 $x^2 + y^2 = 2^2$, $r = 2 \cos \theta$ 所对应的直角坐标方程为 $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

$$\text{由 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2\cos\theta}^2 f(r^2) r dr \text{ 的积分区域 } 2\cos\theta < r < 2, 0 < \theta < \frac{\pi}{2},$$

在直角坐标下表示为 $\sqrt{2x-x^2} < y < \sqrt{4-x^2}, 0 < x < 2$,

$$\text{所以 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2\cos\theta}^2 f(r^2) r dr = \int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x^2+y^2) dy. \text{ 故选(B).}$$

小结

1. 交换积分次序是常考的题型,通常有如下两种情形:

(1) 题目本身要求交换积分次序;

(2) 计算时,按原积分次序计算比较复杂或无法计算,需交换积分次序,一般可从被积函数的类型看出,如含有形如 $e^{x^2}, \frac{\sin x}{x}$ 等,应后对 x 积分.

2. 需注意的是一定要准确地画出积分区域.

3. 有些累次积分仅交换积分次序不能解决问题,此时应考虑交换坐标系.

4. 极坐标系下的交换积分次序虽然没有考过,但需关注.

六、三重积分的计算

7 (2009, 12 题, 4 分) 设 $\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, 则 $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{4}{15}\pi$.

【解析】 利用球面坐标

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 \sin \varphi r^2 \cos^2 \varphi dr \\&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \cos^2 \varphi d(-\cos \varphi) \int_0^1 r^4 dr \\&= -\frac{2\pi}{15} \cos^3 \varphi \Big|_0^{\pi} = \frac{4}{15} \pi.\end{aligned}$$

【评注】 也可利用先二后一

$$\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz = \int_{-1}^1 z^2 dz \iint_{D_z} dx dy = \int_{-1}^1 \pi z^2 (1-z^2) dz = \frac{4}{15} \pi$$

其中 $D_z = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1 - z^2\}$.

8 (2015, 12 题, 4 分) 设 Ω 是由平面 $x + y + z = 1$ 与三个坐标平面所围成的空间区域, 则

$$\iiint_{\Omega} (x + 2y + 3z) dx dy dz = \underline{\hspace{2cm}}.$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

【答案】 $\frac{1}{4}$.

【解析】 (方法一) 由变量的对称性知

$$\iiint_{\Omega} x dx dy dz = \iiint_{\Omega} y dx dy dz = \iiint_{\Omega} z dx dy dz,$$

则

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} (x + 2y + 3z) dx dy dz &= 6 \iiint_{\Omega} z dx dy dz = 6 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} z dz \\&= 3 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y)^2 dy = \int_0^1 (1-x)^3 dx = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

(方法二) 由变量的对称性知

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} (x + 2y + 3z) dx dy dz &= 6 \iiint_{\Omega} z dx dy dz = 6 \int_0^1 dz \iint_{D_z} z dx dy \quad (\text{先二后一}) \\&= 6 \int_0^1 z \cdot \frac{1}{2} (1-z)^2 dz = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

小结

1. 直角坐标下计算三重积分

(1) “先一后二”法

若 $\Omega: a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), \psi_1(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)$, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

(2) “先二后一”法 (适用于旋转体或垂直于某轴的截面的面积为已知的情形)

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_c^d dz \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy$$



2. 柱面坐标下计算三重积分

当积分区域 Ω 的边界曲面方程容易用极坐标表示, 且积分区域 Ω 为柱体, 或被积函数为

$$f(x^2 + y^2) \text{ 时, 三重积分应采用柱坐标变换的换元公式 } \begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \text{ 此时, 应注意确定变量 } r, z, \theta \\ z = z. \end{cases}$$

的取值范围 $\Omega: \alpha \leq \theta \leq \beta, \varphi_1(\theta) \leq r \leq \varphi_2(\theta), \psi_1(r, \theta) \leq z \leq \psi_2(r, \theta),$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} r dr \int_{\psi_1(r, \theta)}^{\psi_2(r, \theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) dz$$

3. 球面坐标系下计算三重积分

当积分区域 Ω 的边界曲面为球面、圆锥面, 或被积函数为 $f(x^2 + y^2 + z^2)$ 时, 三重积分应采用

$$\text{球坐标变换的换元公式 } \begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta, \\ y = r \sin \varphi \sin \theta, \text{ 此时, 应注意确定变量 } r, \varphi, \theta \text{ 的取值范围.} \\ z = r \cos \varphi. \end{cases}$$

若 $\Omega: \alpha \leq \theta \leq \beta, \varphi_1(\theta) \leq \varphi \leq \varphi_2(\theta), \psi_1(\varphi, \theta) \leq r \leq \psi_2(\varphi, \theta),$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} d\varphi \int_{\psi_1(\varphi, \theta)}^{\psi_2(\varphi, \theta)} f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr$$

4. 在计算过程中, 注意三重积分对称性的使用.

微信公众号【顶尖考研】

七、重积分的应用

9 (2010, 12 题, 4 分) 设 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$, 则 Ω 的形心的竖坐标 $\bar{z} =$ _____.

【答案】 $\frac{2}{3}$.

$$\begin{aligned} \text{【解析】 } \bar{z} &= \frac{\iiint_{\Omega} z dx dy dz}{\iiint_{\Omega} dx dy dz} = \frac{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_{r^2}^1 z dz}{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_{r^2}^1 dz} = \frac{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r \left(\frac{1}{2} - \frac{r^4}{2} \right) dr}{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{4} - \frac{r^6}{12} \right) \Big|_0^1 d\theta}{\frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{1}{6} \cdot 2\pi}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

故应填 $\frac{2}{3}$.

10 (2013, 19 题, 10 分) 设直线 L 过 $A(1, 0, 0), B(0, 1, 1)$ 两点, 将 L 绕 z 轴旋转一周得到曲面 Σ , Σ 与平面 $z = 0, z = 2$ 所围成的立体为 Ω .

(I) 求曲面 Σ 的方程;

(II) 求 Ω 的形心坐标.

【分析】 利用定义求旋转曲面 Σ 的方程; 利用三重积分求 Ω 的形心坐标.

【解】 (I) 直线 L 的方程为 $\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$, 则有 $\begin{cases} x = 1 - z, \\ y = z, \end{cases}$



所以直线 L 绕 z 轴旋转一周得到曲面 Σ 的方程为

$$x^2 + y^2 = (1-z)^2 + z^2, \text{ 即 } x^2 + y^2 - 2z^2 + 2z - 1 = 0$$

(II) 从曲面 Σ 的方程可看出, Ω 关于 xOz , yOz 面是对称的, 则形心坐标为

$$\bar{x} = \bar{y} = 0, \bar{z} = \frac{\iiint_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz}{\iiint_{\Omega} dx \, dy \, dz}$$

曲面 Σ 的柱面坐标方程为 $r = \sqrt{2z^2 - 2z + 1}$, Ω 在 xOy 面的投影为 $D: x^2 + y^2 \leq 1$. 所以

$$\iiint_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz = \int_0^2 z \, dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2z^2 - 2z + 1}} r \, dr = \pi \int_0^2 z(2z^2 - 2z + 1) \, dz = \frac{14}{3}\pi$$

$$\iiint_{\Omega} dx \, dy \, dz = \int_0^2 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2z^2 - 2z + 1}} r \, dr = \pi \int_0^2 (2z^2 - 2z + 1) \, dz = \frac{10}{3}\pi$$

故 Ω 的形心坐标为 $(0, 0, \frac{7}{5})$.

【评注】 本题中三重积分的计算用先二后一较为方便.

II (2019, 19 题, 10 分) 设 Ω 是由锥面 $x^2 + (y-z)^2 = (1-z)^2$ ($0 \leq z \leq 1$) 与平面 $z=0$ 围成的锥体, 求 Ω 的形心坐标.

【解】 设 Ω 的形心坐标为 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, 因为 Ω 关于 yOz 平面对称, 所以 $\bar{x} = 0$,

对于 $0 \leq z \leq 1$, 记 $D_z = \{(x, y) \mid x^2 + (y-z)^2 \leq (1-z)^2\}$, 则

$$V = \iiint_{\Omega} dx \, dy \, dz = \int_0^1 dz \iint_{D_z} dx \, dy = \int_0^1 \pi(1-z)^2 \, dz = \frac{\pi}{3}$$

$$\iiint_{\Omega} y \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 dz \iint_{D_z} y \, dx \, dy = \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1-z} (z + r \sin \theta) r \, dr$$

$$= \int_0^1 \pi z(1-z)^2 \, dz = \frac{\pi}{12}$$

$$\iiint_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 dz \iint_{D_z} z \, dx \, dy = \int_0^1 \pi z(1-z)^2 \, dz = \frac{\pi}{12}$$

$$\text{所以 } \bar{y} = \frac{\iiint_{\Omega} y \, dx \, dy \, dz}{V} = \frac{1}{4}, \bar{z} = \frac{\iiint_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz}{V} = \frac{1}{4}.$$

故 Ω 的形心坐标为 $(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

小结

重积分的应用在考题中出现的频率较低, 考数学一的同学主要掌握几何应用即可.



第七章 曲线、曲面积分

本章导读

本章一直是研究生考试命题的重要内容,重点是第二类积分的计算、平面曲线积分与路径无关的判定和相关计算与证明,要熟练掌握与格林公式、高斯公式相关的各类题型及其思路、方法、技巧等.

试题特点

每年试题一般是一个大题、一个小题,分数约占试卷的9%.主要考查各类线面积分的计算,重点是第二类线面积分的计算.第一类积分的考查相对较少,且难度不大.

考题详析

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

一、第一类曲线积分的计算

1 (2009, 11 题, 4 分) 已知曲线 $L: y = x^2 (0 \leq x \leq \sqrt{2})$, 则 $\int_L x ds =$ _____.

【答案】 $\frac{13}{6}$.

【解析】 由题意可知 $ds = \sqrt{1+4x^2} dx$. 所以,

$$\begin{aligned}\int_L x ds &= \int_0^{\sqrt{2}} x \sqrt{1+4x^2} dx = \frac{1}{8} \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+4x^2} d(1+4x^2) \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{(1+4x^2)^3} \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{13}{6}\end{aligned}$$

2 (2018, 12 题, 4 分) 设 L 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线, 则 $\oint_L xy ds =$ _____.

【答案】 $-\frac{\pi}{3}$.

【解析】 利用第一类曲线积分的轮换对称性.

$$\begin{aligned}\oint_L xy ds &= \frac{1}{3} \oint_L (xy + yz + xz) ds = \frac{1}{6} \oint_L [(x+y+z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)] ds \\ &= -\frac{1}{6} \oint_L ds = -\frac{\pi}{3}\end{aligned}$$



【评注】 此题运用了变形的技巧及曲线积分的代入化简.

小结

计算第一类曲线积分,首先,应将积分曲线方程代入被积函数,对积分进行化简;其次,考查积分曲线是否关于 x 轴(或 y 轴)对称,并且被积函数(或被积函数的某一部分)是否关于变量 y (或变量 x) 为奇、偶函数,若是,则利用对称性化简积分;最后,写出积分曲线的参数方程,将曲线积分化为参变量的定积分.

1. 第一类曲线积分的对称性质

(1) 若积分曲线 L 关于 x 轴对称,则

$$\int_L f(x, y) ds = \begin{cases} 0, & f(x, -y) = -f(x, y), \\ 2 \int_{L_1} f(x, y) ds, & f(x, -y) = f(x, y) \end{cases}$$

其中 L_1 为 L 在 x 轴上方或下方的部分.

(2) 若积分曲线 L 关于 y 轴对称,则

$$\int_L f(x, y) ds = \begin{cases} 0, & f(-x, y) = -f(x, y), \\ 2 \int_{L_2} f(x, y) ds, & f(-x, y) = f(x, y) \end{cases}$$

其中 L_2 为 L 在 y 轴左边或右边的部分.

(3) 若积分曲线 L 关于变量 x, y 具有轮换对称性,即交换变量 x 与 y , 积分曲线 L 的方程不变,或积分曲线 L 关于直线 $y = x$ 对称,则有

$$\int_L f(x, y) ds = \int_L f(y, x) ds = \frac{1}{2} \int_L [f(x, y) + f(y, x)] ds$$

2. 第一类曲线积分的计算方法

设积分曲线 L 的参数方程为: $x = x(t), y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta$, 则

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f[x(t), y(t)] \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$$

特别地,若积分曲线 L 的直角坐标方程为: $y = y(x), a \leq x \leq b$, 则

$$\int_L f(x, y) ds = \int_a^b f[x, y(x)] \sqrt{1 + y'^2} dx$$

若积分曲线 L 的极坐标方程为: $r = r(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta$, 则

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f[r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta] \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta$$

二、第二类曲线积分的计算

3 (2010, 11 题, 4 分) 已知曲线 L 的方程为 $y = 1 - |x|, x \in [-1, 1]$, 起点是 $(-1, 0)$, 终点是 $(1, 0)$, 则曲线积分 $\int_L xy dx + x^2 dy =$ _____.

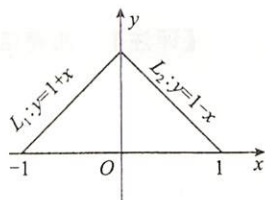


【答案】 0.

【解析】 如图所示 $L = L_1 + L_2$, 其中

$L_1: y = 1 + x, (-1 \leq x < 0), L_2: y = 1 - x, (0 \leq x < 1).$

所以



$$\begin{aligned} \int_L xy dx + x^2 dy &= \int_{L_1} xy dx + x^2 dy + \int_{L_2} xy dx + x^2 dy \\ &= \int_{-1}^0 [x(1+x) + x^2] dx + \int_0^1 [x(1-x) - x^2] dx \\ &= \int_{-1}^0 (2x^2 + x) dx + \int_0^1 (x - 2x^2) dx = 0 \end{aligned}$$

【评注】 此题也可补曲线, 用格林公式.

4 (2011, 12 题, 4 分) 设 L 是柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $z = x + y$ 的交线, 从 z 轴正方向往 z 轴负方向看去为逆时针方向, 则曲线积分 $\oint_L xz dx + x dy + \frac{y^2}{2} dz =$ _____.

【答案】 π .

【解析】 用斯托克斯公式直接计算

$$\begin{aligned} \oint_L xz dx + x dy + \frac{y^2}{2} dz &= \iint_{z=x+y} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & x & \frac{y^2}{2} \\ dy dz & dz dx & dx dy \end{vmatrix} = \iint_{z=x+y} y dy dz + x dz dx + dx dy \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (1-x-y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1-r\cos\theta - r\sin\theta) r dr = \pi. \end{aligned}$$

故应填 π .

【评注】 注意其中对坐标的曲面积分的计算, 用到了矢量点积法. 本题可把曲线的参数方程写出, 用参数法计算也可.

5 (2012, 19 题, 10 分) 已知 L 是第一象限中从点 $(0,0)$ 沿圆周 $x^2 + y^2 = 2x$ 到点 $(2,0)$, 再沿圆周 $x^2 + y^2 = 4$ 到点 $(0,2)$ 的曲线段. 计算曲线积分 $I = \int_L 3x^2 y dx + (x^3 + x - 2y) dy$.

【分析】 通过补线段后利用 Green 公式计算即可.

【解】 设点 $O(0,0), A(2,0), B(0,2)$, 补充线段 $\overline{BO}$, 且设由曲线弧 $\widehat{OA}, \widehat{AB}, \overline{BO}$ 围成的平面区域为 D , 则由 Green 公式有

$$\begin{aligned} I &= \int_L 3x^2 y dx + (x^3 + x - 2y) dy \\ &= \int_{L+\overline{BO}} 3x^2 y dx + (x^3 + x - 2y) dy - \int_{\overline{BO}} 3x^2 y dx + (x^3 + x - 2y) dy \\ &= \iint_D (3x^2 - 3x^2 + 1) dx dy - \int_2^0 (-2y) dy \\ &= \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 2^2 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1^2 + y^2 \Big|_2^0 = \frac{\pi}{2} - 4 \end{aligned}$$



6 (2013, 4 题, 4 分) 设 $L_1: x^2 + y^2 = 1, L_2: x^2 + y^2 = 2, L_3: x^2 + 2y^2 = 2, L_4: 2x^2 + y^2 = 2$ 为四条逆时针方向的平面曲线, 记 $I_i = \oint_{L_i} \left(y + \frac{y^3}{6} \right) dx + \left(2x - \frac{x^3}{3} \right) dy (i = 1, 2, 3, 4)$, 则 $\max\{I_1, I_2, I_3, I_4\} =$

(A) I_1 .(B) I_2 .(C) I_3 .(D) I_4 .

【答案】 D.

【解析】 题中 $I_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 是四个第二类曲线积分, 直接无法比较大小, 可利用格林公式转化为二重积分, 然后比较大小.

由题意知 $P(x, y) = y + \frac{y^3}{6}, Q(x, y) = 2x - \frac{x^3}{3}$, 于是 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - x^2 - \frac{y^2}{2}$.

设 $L_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 所围的区域为 $D_i (i = 1, 2, 3, 4)$, 用格林公式有

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{D_1} \left(1 - x^2 - \frac{y^2}{2} \right) dx dy = \frac{x = r \cos \theta}{y = r \sin \theta} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \left(1 - r^2 \cos^2 \theta - \frac{r^2 \sin^2 \theta}{2} \right) r dr \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \left(r - \frac{r^3 \cos^2 \theta}{2} - \frac{r^3}{2} \right) dr = \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4 \cos^2 \theta}{8} - \frac{r^4}{8} \right) \Big|_0^1 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{8} - \frac{\cos^2 \theta}{8} \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{8} - \frac{1 + \cos 2\theta}{16} \right) d\theta = \frac{5}{8} \pi \\ I_2 &= \iint_{D_2} \left(1 - x^2 - \frac{y^2}{2} \right) dx dy = \frac{x = r \cos \theta}{y = r \sin \theta} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \left(1 - r^2 \cos^2 \theta - \frac{r^2 \sin^2 \theta}{2} \right) r dr \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \left(r - \frac{r^3 \cos^2 \theta}{2} - \frac{r^3}{2} \right) dr = \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4 \cos^2 \theta}{8} - \frac{r^4}{8} \right) \Big|_0^{\sqrt{2}} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta}{2} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\theta}{4} d\theta = \frac{1}{2} \pi \\ I_3 &= \iint_{D_3} \left(1 - x^2 - \frac{y^2}{2} \right) dx dy = \frac{x = \sqrt{2} r \cos \theta}{y = r \sin \theta} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \left(1 - 2r^2 \cos^2 \theta - \frac{r^2 \sin^2 \theta}{2} \right) \sqrt{2} r dr \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \left(r - \frac{3}{2} r^3 \cos^2 \theta - \frac{r^3}{2} \right) dr = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{3r^4 \cos^2 \theta}{8} - \frac{r^4}{8} \right) \Big|_0^1 d\theta \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \frac{3}{8} \sin^2 \theta d\theta = \frac{3\sqrt{2}}{16} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2\theta) d\theta = \frac{3\sqrt{2}}{8} \pi \\ I_4 &= \iint_{D_4} \left(1 - x^2 - \frac{y^2}{2} \right) dx dy = \frac{x = r \cos \theta}{y = \sqrt{2} r \sin \theta} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1 - r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta) \sqrt{2} r dr \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r - r^3) dr = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} d\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi \end{aligned}$$

比较如上四个数的大小, $\max_{1 \leq i \leq 4} \{I_i\} = I_4$, 故应选 (D).

7 (2014, 12 题, 4 分) 设 L 是柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $y + z = 0$ 的交线, 从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向, 则曲线积分 $\oint_L z dx + y dz =$ _____.

【答案】 π .

【解析】 直接写出 L 的参数方程, 用参数法计算; 或利用斯托克斯公式转化为曲面积分.



L 的参数方程为 $\begin{cases} x = \cos \theta, \\ y = \sin \theta, \theta \text{ 从 } 0 \text{ 到 } 2\pi, \text{ 则} \\ z = -\sin \theta, \end{cases}$

$$\oint_L z dx + y dz = \int_0^{2\pi} (\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta) d\theta = \pi$$

【评注】 可由斯托克斯公式计算得

$$\oint_L z dx + y dz = \iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & 0 & y \end{vmatrix} = \iint_S dydz + dzdx = \iint_{D_{xy}} dxdy = \pi$$

其中 $D_{xy} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

8 (2015, 19 题, 10 分) 已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases} z = \sqrt{2-x^2-y^2}, \\ z = x, \end{cases}$ 起点为 $A(0, \sqrt{2}, 0)$, 终点为

$B(0, -\sqrt{2}, 0)$, 计算曲线积分 $I = \int_L (y+z)dx + (z^2-x^2+y)dy + x^2y^2dz$.

【分析】 直接写出空间曲线的参数方程, 用基本方法计算

【解】 曲线 L 投影到 xOy 面上的平面曲线方程为 $\begin{cases} x^2 + \frac{y^2}{2} = 1, \\ z = 0, \end{cases} (-\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2})$,

曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases} x = \cos \theta, \\ y = \sqrt{2} \sin \theta, (\theta \text{ 从 } \frac{\pi}{2} \text{ 到 } -\frac{\pi}{2}) \\ z = \cos \theta, \end{cases}$ 因而

$$\begin{aligned} & \int_L (y+z)dx + (z^2-x^2+y)dy + (x^2y^2)dz \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} [-(\sqrt{2}\sin\theta + \cos\theta)\sin\theta + \sqrt{2}\sin\theta\sqrt{2}\cos\theta + (\cos^2\theta \cdot 2\sin^2\theta)(-\sin\theta)]d\theta \\ &= -\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta \quad (\text{奇偶性}) \\ &= 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta = 2\sqrt{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi. \end{aligned}$$

【评注】 此题可利用斯托克斯公式转化为面积分来计算.

9 (2019, 4 题, 4 分) 设函数 $Q(x, y) = \frac{x}{y^2}$, 如果对上半平面 ($y > 0$) 内的任意有向光滑封闭曲线 C 都有 $\oint_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, 那么函数 $P(x, y)$ 可取为

- (A) $y - \frac{x^2}{y^3}$. (B) $\frac{1}{y} - \frac{x^2}{y^3}$. (C) $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$. (D) $x - \frac{1}{y}$.

【答案】 D.

【解析】 由题意知, 在上半平面内积分与路径无关, 因而 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{y^2}$, 选 $P(x, y) = x - \frac{1}{y}$.

【评注】选项(C)虽然也满足 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{y^2}$, 但其在 y 轴正半轴没意义.

10 (2020, 16 题, 10 分) 计算曲线积分 $I = \int_L \frac{4x-y}{4x^2+y^2} dx + \frac{x+y}{4x^2+y^2} dy$, 其中 L 为 $x^2+y^2=2$, 方向为逆时针方向.

【分析】挖去奇点 $(0,0)$, 用格林公式.

【解】取 $L_1: 4x^2+y^2=\epsilon^2$ (ϵ^2 足够小), 方向为顺时针方向,

$$\text{则 } I = \oint_{L+L_1} \frac{4x-y}{4x^2+y^2} dx + \frac{x+y}{4x^2+y^2} dy - \oint_{L_1} \frac{4x-y}{4x^2+y^2} dx + \frac{x+y}{4x^2+y^2} dy$$

$$\text{令 } P = \frac{4x-y}{4x^2+y^2}, Q = \frac{x+y}{4x^2+y^2},$$

$$\text{计算得 } \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-4x^2-8xy+y^2}{(4x^2+y^2)^2}$$

$$\text{因而 } I = 0 - \frac{1}{\epsilon^2} \oint_{L_1} (4x-y) dx + (x+y) dy = \frac{1}{\epsilon^2} \iint_{D_1} 2 dx dy$$

$$\text{其中 } D_1 = \{(x,y) \mid 4x^2+y^2 \leq \epsilon^2\}.$$

$$\text{所以 } I = \frac{2}{\epsilon^2} \times \pi \times \epsilon \times \frac{\epsilon}{2} = \pi.$$

小结

计算第二类平面曲线积分一直是历年考试的重点内容, 一般可按以下思路进行分析与求解:

1. 对于积分曲线 L 不是闭曲线的积分.

(1) 直接用参数法化曲线积分为参变量的定积分, 此时积分曲线 L 的方程容易写成参数方程, 且代入积分后所得的定积分容易计算.

设积分曲线 L 的参数方程为: $x = x(t), y = y(t)$, 则

$$\int_L P dx + Q dy = \int_a^\beta [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)] dt$$

特别注意: α, β 分别为积分曲线 L 的起点与终点所对应的参变量 t 的值.

(2) 添加有向曲线(直线)段 L^* , 使 $L + L^*$ 为闭曲线, 且方向同为正向(或负向), 则

$$\int_L P dx + Q dy = \int_{L+L^*} P dx + Q dy - \int_{L^*} P dx + Q dy$$

第一个积分利用格林公式, 第二个积分利用参数法计算.

(3) 考查积分是否与路径无关, 即检验 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ 是否成立. 若成立, 则取特殊路径积分, 即构造与 L 具有相同起点与终点的曲线 L^* (一般为平行于坐标轴的折线段), 且使得 P, Q 在 L 与 L^* 所围成的区域内没有奇点, 有 $\int_L P dx + Q dy = \int_{L^*} P dx + Q dy$; 若不成立, 但可将被积表达式分为两部分, 使其中的某一部分容易求出原函数, 则该部分的积分归结为求原函数, 另一部分用参数法计算.



2. 对于积分曲线 L 为闭曲线的积分:

(1) 如果在积分曲线 L 所围成的区域 D 内不含奇点, 则直接在 D 上利用格林公式.

(2) 如果在积分曲线 L 所围成的区域 D 内含有奇点(也就是使 P, Q 的一阶偏导数不连续的点, 一般地, 奇点都是使得 P, Q 或它们的偏导数没有意义的点), 则不能直接在 D 上利用格林公式, 此时可先考虑构造闭曲线挖去奇点, 再利用格林公式.

(3) 也可考虑用参数法化曲线积分为参变量的定积分.

注意: 在计算曲线曲面积分(不管是第一类还是第二类)时, 应先考虑能否将积分曲线曲面方程代入被积表达式, 对积分进行化简. 另若曲线 L 垂直于 x 轴, 则沿 L 对坐标 x 的积分为零.

三、平面曲线积分与路径无关的问题

11 (2016, 17 题, 10 分) 设函数 $f(x, y)$ 满足 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = (2x+1)e^{2x-y}$, 且 $f(0, y) = y+1, L_t$

是从点 $(0, 0)$ 到点 $(1, t)$ 的光滑曲线. 计算曲线积分 $I(t) = \int_{L_t} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy$, 并求 $I(t)$ 的最小值.

【分析】 利用偏积分法先求出 $f(x, y)$, 再利用积分与路径无关并选取特殊积分路径求出 $I(t)$.

【解】 因 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = (2x+1)e^{2x-y}$, 故 $f(x, y) = xe^{2x} \cdot e^{-y} + \varphi(y)$.

又 $f(0, y) = \varphi(y) = y+1$, 从而 $f(x, y) = xe^{2x-y} + y+1$, 则

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -xe^{2x-y} + 1$$

所以

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_{L_t} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy = \int_{L_t} (2x+1)e^{2x-y} dx + (1 - xe^{2x-y}) dy \\ &= \int_{L_t} P(x, y) dx + Q(x, y) dy \end{aligned}$$

由 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -(2x+1)e^{2x-y}$, 知曲线积分与路径无关,

$$\text{故 } I(t) = \int_0^1 (2x+1)e^{2x} dx + \int_0^t (1 - e^{2x-y}) dy = t + e^{2-t}.$$

由 $I'(t) = 1 - e^{2-t} = 0$, 得 $t = 2$, 而 $I''(t) = e^{2-t}$, $I''(2) = 1 > 0$,

所以, 当 $t = 2$ 时, $I(t)$ 取极小值, 即最小值, 最小值 $I(2) = 3$.

12 (2017, 11 题, 4 分) 若曲线积分 $\int_L \frac{x dx - ay dy}{x^2 + y^2 - 1}$ 在区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ 内与路径

无关, 则 $a =$ _____.

【答案】 -1 .

【解析】 记 $P = \frac{x}{x^2 + y^2 - 1}$, $Q = \frac{-ay}{x^2 + y^2 - 1}$, 计算得

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2 - 1)^2}, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2axy}{(x^2 + y^2 - 1)^2}$$

由积分与路径无关知 $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$, 得 $a = -1$.

小结

证明积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 与路径无关, 或已知积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 与路径无关, 求 P, Q 中所包含的未知函数、待定参数, 是常考的题型, 应熟练掌握其解题思路与方法.

1. 证明积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 与路径无关, 一般利用积分与路径无关的充要条件.

设 P, Q 在单连通区域 D 内具有一阶连续偏导数, 则在 D 内以下结论等价:

(1) 积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 在 D 内与路径 L 无关.

(2) $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

(3) 对于 D 内任一分段光滑有向闭曲线 L , 有积分 $\oint_L Pdx + Qdy = 0$.

(4) $Pdx + Qdy$ 在 D 内为某二元函数 $u(x, y)$ 的全微分 (称函数 $u(x, y)$ 为微分式 $Pdx + Qdy$ 的原函数).

(5) 向量 $Pi + Qj$ 在 D 内为某二元函数 $u(x, y)$ 的梯度.

2. 已知积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 在某单连通区域 D 内与路径无关, 求微分式 $Pdx + Qdy$ 的原函数, 一般有以下方法:

(1) 特殊路径积分法: 在区域 D 内取一特殊点 (x_0, y_0) , 有原函数

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy + C$$

或

$$u(x, y) = \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy + \int_{x_0}^x P(x, y) dx + C$$

(2) 不定积分法: 由积分与路径无关的充要条件得原函数 $u(x, y)$ 满足 $\frac{\partial u}{\partial x} = P, \frac{\partial u}{\partial y} = Q$.

由 $\frac{\partial u}{\partial x} = P$ (或 $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$) 两边对变量 x (或 y) 积分, 得

$$u(x, y) = \int P(x, y) dx + C(y) \text{ (或 } u(x, y) = \int Q(x, y) dy + C(x))$$

再由 $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$ (或 $\frac{\partial u}{\partial x} = P$) 确定 $C(y)$ (或 $C(x)$), 即可求得原函数 $u(x, y)$.

(3) 凑微分法: 对被积表达式 $Pdx + Qdy$ 进行凑微分.

3. 已知积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 在某单连通区域 D 内与路径无关, 求积分 $\int_C Pdx + Qdy$, 一般有以下方法:

(1) 原函数法: 求出微分式 $Pdx + Qdy$ 的原函数 $u(x, y)$, 则有



$$\int_C Pdx + Qdy = u(x, y) \Big|_A^B$$

其中 A, B 分别为积分曲线 C 的起点与终点.

(2) 特殊路径积分法: 构造与 C 具有相同起点与终点的曲线 C^* (一般为平行于坐标轴的折线段), 且使得 P, Q 在 C 与 C^* 所围成的区域内没有奇点, 则有

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_{C^*} Pdx + Qdy$$

4. 已知积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 与路径无关, 求 P, Q 中所包含的未知函数或待定参数, 一般利用积分

与路径无关的充要条件: $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

四、第一类曲面积分的计算

13 (2010, 19 题, 10 分) 设 P 为椭球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 - yz = 1$ 上的动点, 若 S 在点 P 处的切平面与 xOy 面垂直, 求点 P 的轨迹 C , 并计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} \frac{(x + \sqrt{3}) |y - 2z|}{\sqrt{4 + y^2 + z^2 - 4yz}} dS$, 其中 Σ 是椭球面 S 位于曲线 C 上方的部分.

【分析】 本题考查了空间曲线的计算与投影, 第一型曲面积分的计算等多个知识点, 属综合题.

【解】 (1) 求轨迹 C .

令 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - yz - 1$, 故动点 $P(x, y, z)$ 的切平面的法向量为

$$n = \{2x, 2y - z, 2z - y\}$$

由切平面垂直 xOy , 得 $2z - y = 0$.

注意到 P 在椭球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 - yz = 1$ 上, 故所求曲线 C 的方程为:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - yz = 1, \\ 2z - y = 0. \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} x^2 + \frac{3}{4}y^2 = 1, \\ 2z - y = 0 \end{cases}$$

(2) 计算曲面积分.

因为曲线 C 在 xOy 平面的投影为 $D_{xy}: x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$, 又方程 $x^2 + y^2 + z^2 - yz = 1$ 两边分别

对 x, y 求导得

$$2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad 2y + 2z \frac{\partial z}{\partial y} - z - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

解得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{y - 2z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y - z}{y - 2z}$$

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = \sqrt{1 + \left(\frac{2x}{y - 2z}\right)^2 + \left(\frac{2y - z}{y - 2z}\right)^2} dx dy \\ &= \frac{\sqrt{4x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 8yz}}{|y - 2z|} dx dy = \frac{\sqrt{4 + y^2 + z^2 - 4yz}}{|y - 2z|} dx dy \end{aligned}$$



于是

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma} \frac{(x+\sqrt{3})|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}} dS = \iint_{D_{xy}} (x+\sqrt{3}) dx dy = \sqrt{3} \iint_{D_{xy}} dx dy \\ &= \sqrt{3} \times \pi \times 1 \times \frac{2}{\sqrt{3}} = 2\pi \end{aligned}$$

【评注】 对于第一类曲面积分注意利用曲面的方程化简被积函数表达式.

14 (2012, 12 题, 4 分) 设 $\Sigma = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, 则 $\iint_{\Sigma} y^2 dS =$

【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

【解析】 由第一类曲面积分的计算公式得 ($z = 1 - x - y$)

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} y^2 dS &= \iint_{D_{xy}} y^2 \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy \\ &= \sqrt{3} \iint_{D_{xy}} y^2 dx dy = \sqrt{3} \int_0^1 dy \int_0^{1-y} y^2 dx = \frac{\sqrt{3}}{12} \end{aligned}$$

其中平面区域 $D_{xy}: x + y < 1, x \geq 0, y \geq 0$.

15 (2017, 19 题, 10 分) 设薄片型物体 S 是圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $z^2 = 2x$ 割下的有限部分, 其上任一点的密度为 $\mu(x, y, z) = 9\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. 记圆锥面与柱面的交线为 C .

(I) 求 C 在 xOy 平面上的投影曲线的方程;

(II) 求 S 的质量 M .

【解】 (I) 由题意知, C 的方程为 $\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ z^2 = 2x, \end{cases}$ 消去 z 得 $x^2 + y^2 = 2x$.

故 C 在 xOy 平面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x, \\ z = 0 \end{cases}$$

(II) S 的质量为

$$\begin{aligned} M &= \iint_S \mu(x, y, z) dS = \iint_S 9\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dS \\ &= \iint_D 9\sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{2} dx dy \end{aligned}$$

其中 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2x\}$, 所以

$$\begin{aligned} M &= 18 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r^2 dr = 48 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta \\ &= 96 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta = 96 \times \frac{2}{3} = 64 \end{aligned}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



小结

对于计算第一类曲面积分,首先,应将积分曲面方程代入被积函数,对积分进行化简;其次,考查积分曲面是否关于 xOy 面(或 yOz 面、 zOx 面)对称,并且被积函数(或被积函数的某一部分)是否关于变量 z (或变量 x 、变量 y)为奇、偶函数,若是,则利用对称性化简积分;最后,用投影法将曲面积分化为投影区域上的二重积分.

1. 第一类曲面积分的对称性质

若积分曲面 Σ 关于 xOy 面对称,则有

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \begin{cases} 0, & f(x, y, -z) = -f(x, y, z), \\ 2 \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z) dS, & f(x, y, -z) = f(x, y, z) \end{cases}$$

其中 Σ_1 为 xOy 在 xOy 面上方或下方的部分.

类似地,可得到积分曲面关于 yOz 面或 zOx 面对称的情形. 还有轮换对称性.

2. 第一类曲面积分的计算方法

若积分曲面 Σ 在 xOy 面(或 yOz 面、 zOx 面)上的投影区域较简单,将积分曲面 Σ 的方程写成形式: $z = z(x, y)$ (或 $x = x(y, z)$, $y = y(x, z)$), 则有

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS &= \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy \\ &= \left(\iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2} dy dz, \iint_{D_{zx}} f(x, y(x, z), z) \sqrt{1 + y_x'^2 + y_z'^2} dx dz \right) \end{aligned}$$

五、第二类曲面积分的计算

16 (2009, 19 题, 10 分) 计算曲面积分 $I = \oiint_{\Sigma} \frac{x dy dz + y dz dx + z dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$, 其中 Σ 是曲面 $2x^2 +$

$2y^2 + z^2 = 4$ 的外侧.

【分析】 用高斯公式但有奇点, 根据题目特点挖掉一个小球面 $\Sigma_1: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

【解】 $I = \oiint_{\Sigma} \frac{x dy dz + y dz dx + z dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$, 其中 Σ 是曲面 $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$,

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = \frac{y^2 + z^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = \frac{x^2 + z^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

所以

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$$

由于被积函数及其偏导数在点 $(0,0,0)$ 处不连续,作封闭曲面(内侧)

$$\Sigma_1: x^2 + y^2 + z^2 = R^2, 0 < R < 1$$

有

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \frac{x dy dz + y dz dx + z dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} &= \iint_{\Sigma + \Sigma_1} \frac{x dy dz + y dz dx + z dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \iint_{\Sigma_1} \frac{x dy dz + y dz dx + z dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= - \iint_{\Sigma_1} \frac{x dy dz + y dz dx + z dx dy}{R^3} \\ &= \frac{1}{R^3} \iiint_{\Omega} 3 dV = \frac{3}{R^3} \cdot \frac{4\pi R^3}{3} = 4\pi \end{aligned}$$

【评注】 这是常见的题型,但需注意挖去合适的曲面以及曲面侧的选取.

17 (2014, 18 题, 10 分) 设 Σ 为曲面 $z = x^2 + y^2 (z \leq 1)$ 的上侧, 计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} (x-1)^3 dy dz + (y-1)^3 dz dx + (z-1) dx dy$$

【分析】 本题考查第二类曲面积分的基本计算, 可补曲面后用高斯公式; 投影轮换法; 直接投影法(较复杂).

【解】 (方法一) Σ 非闭, 补 Σ_1 : 平面 $z = 1$, 被 $z = x^2 + y^2$ 所截有限部分下侧, 由 Gauss 公式有

$$\begin{aligned} &\iint_{\Sigma} (x-1)^3 dy dz + (y-1)^3 dz dx + (z-1) dx dy \\ &= \oiint_{\Sigma + \Sigma_1} (x-1)^3 dy dz + (y-1)^3 dz dx + (z-1) dx dy - \\ &\quad \iint_{\Sigma_1} (x-1)^3 dy dz + (y-1)^3 dz dx + (z-1) dx dy \\ &= - \iiint_{\Omega} [3(x-1)^2 + 3(y-1)^2 + 1] dV - \iint_{\Sigma_1} (z-1) dx dy \\ &= -3 \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dV + 6 \iiint_{\Omega} x dV + 6 \iiint_{\Omega} y dV - 7 \iiint_{\Omega} dV - \iint_{\Sigma_1} 0 dx dy \end{aligned}$$

Σ 和 Σ_1 所围立体为 Ω , Ω 关于 yOz 面和 zOx 面对称, 则 $\iiint_{\Omega} x dV = \iiint_{\Omega} y dV \equiv 0$,

$$\begin{aligned} \text{而 } \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dV &= \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) dx dy \int_{x^2 + y^2}^1 dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2 (1 - r^2) r dr \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{4} r^4 - \frac{1}{6} r^6 \right) \Big|_0^1 = 2\pi \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) = \frac{\pi}{6} \\ \iiint_{\Omega} dV &= \int_0^1 dz \iint_{x^2 + y^2 \leq z} dx dy = \int_0^1 \pi z dz = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

所以 $\iint_{\Sigma} (x-1)^3 dy dz + (y-1)^3 dz dx + (z-1) dx dy = -4\pi$.

(方法二) 投影轮换法



$$\begin{aligned}
& \iint_{\Sigma} (x-1)^3 dydz + (y-1)^3 dzdx + (z-1) dxdy \\
&= \iint_{\Sigma} [-2x(x-1)^3 - 2y(y-1)^3 + (z-1)] dxdy \\
&= \iint_{\Sigma} [-2x(x-1)^3 - 2y(y-1)^3 + (x^2 + y^2 - 1)] dxdy \\
&= \iint_{D_{xy}} [-2x(x-1)^3 - 2y(y-1)^3 + (x^2 + y^2 - 1)] dxdy \\
&= \iint_{D_{xy}} [-2(x^4 + y^4) + 6(x^3 + y^3) - 6(x^2 + y^2) + 2(x + y)] dxdy + (x^2 + y^2 - 1) dxdy
\end{aligned}$$

其中 $D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 1$, 而 $\iint_{D_{xy}} (x^3 + y^3) dxdy = \iint_{D_{xy}} (x + y) dxdy = 0$

所以

$$\begin{aligned}
& \iint_{\Sigma} (x-1)^3 dydz + (y-1)^3 dzdx + (z-1) dxdy \\
&= \iint_{D_{xy}} [-2(x^4 + y^4) - 5(x^2 + y^2)] dxdy - \pi \\
&= -2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\sin^2 \theta \cos^2 \theta) d\theta \int_0^1 r^5 dr - 5 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 dr - \pi \\
&= -2 \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta\right) d\theta \int_0^1 r^5 dr - \frac{5}{2} \pi = -4\pi.
\end{aligned}$$

18 (2016, 18 题, 10 分) 设有界区域 Ω 由平面 $2x + y + 2z = 2$ 与三个坐标平面围成, Σ 为 Ω 整个表面的外侧, 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + 1) dydz - 2y dzdx + 3z dxdy$.

【解】 由高斯公式得

$$\begin{aligned}
I &= \iiint_{\Omega} (2x - 2 + 3) dxdydz = \iiint_{\Omega} (2x + 1) dxdydz \\
&= \int_0^1 dx \iint_{D_x} (2x + 1) dydz = \int_0^1 (2x + 1) dx \iint_{D_x} dydz \\
&= \int_0^1 (2x + 1) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2(1 - x)^2 dx = \int_0^1 (2x^3 - 3x^2 + 1) dx = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

【评注】 在三重积分的计算中, 用先二后一积分较为简单, 当然也可化为三次积分计算.

19 (2018, 17 题, 10 分) 设 Σ 是曲面 $x = \sqrt{1 - 3y^2 - 3z^2}$ 的前侧, 计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} x dydz + (y^3 + 2) dzdx + z^3 dxdy$$

【分析】 补曲面用高斯公式.

【解】 补曲面 $\Sigma_1 \begin{cases} x = 0, \\ 3y^2 + 3z^2 \leq 1, \end{cases}$ 取后侧.

则 $I = \iint_{\Sigma + \Sigma_1} x dydz + (y^3 + 2) dzdx + z^3 dxdy - \iint_{\Sigma_1} x dydz + (y^3 + 2) dzdx + z^3 dxdy$



由高斯公式

$$\begin{aligned}
 & \iint_{\Sigma+z_1} x dy dz + (y^3 + 2) dz dx + z^3 dx dy \\
 &= \iiint_{\Omega} (1 + 3y^2 + 3z^2) dx dy dz \\
 &= \iiint_{\Omega} dx dy dz + 3 \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) dx dy dz \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} + 3 \iint_{3y^2+3z^2 \leq 1} (y^2 + z^2) \sqrt{1-3y^2-3z^2} dy dz \\
 &= \frac{2}{9} \pi + 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} r^2 \sqrt{1-3r^2} r dr = \frac{2}{9} \pi + \frac{4}{45} \pi = \frac{14}{45} \pi
 \end{aligned}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

而 $\iint_{\Sigma_1} x dy dz + (y^3 + 2) dz dx + z^3 dx dy = 0$. 所以 $I = \frac{14}{45} \pi$.

20 (2019, 12 题, 4 分) 设 Σ 为曲面 $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4 (z \geq 0)$ 的上侧, 则 $\iint_{\Sigma} \sqrt{4-x^2-4z^2} dx dy =$

【答案】 $\frac{32}{3}$.

【解析】 曲面 Σ 在 xOy 面上的投影为 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$, 代入曲面方程化简

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Sigma} \sqrt{4-x^2-4z^2} dx dy &= \iint_{\Sigma} |y| dx dy = \iint_D |y| dx dy \\
 &= 2 \int_0^{\pi} d\theta \int_0^2 r \sin \theta \cdot r dr = \frac{32}{3}
 \end{aligned}$$

21 (2020, 18 题, 10 分) 设 Σ 为曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2} (1 \leq x^2 + y^2 \leq 4)$ 下侧, $f(x)$ 为连续函数. 计算

$$I = \iint_{\Sigma} [xf(xy) + 2x - y] dy dz + [yf(xy) + 2y + x] dz dx + [zf(xy) + z] dx dy$$

【分析】 利用投影轮换法.

【解】 曲面 $\Sigma: z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 的法向量 $\mathbf{n} = \{z'_x, z'_y, -1\} = \left\{ \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -1 \right\}$,

$$\begin{aligned}
 \text{则 } I &= \iint_{\Sigma} \{P, Q, R\} \cdot \{-z'_x, -z'_y, 1\} dx dy \\
 &= \iint_{\Sigma} \left[-\frac{x(xf(xy) + 2x - y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y(yf(xy) + 2y + x)}{\sqrt{x^2 + y^2}} + zf(xy) + z \right] dx dy \\
 &= \iint_{\Sigma} [-\sqrt{x^2 + y^2} f(xy) - 2\sqrt{x^2 + y^2} + zf(xy) + z] dx dy \\
 &= \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy \quad (D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4) \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 r \cdot r dr = \frac{14}{3} \pi
 \end{aligned}$$



【评注】 本题只给出 $f(x)$ 连续, 因而不能采取补曲面高斯公式计算.

小结

计算第二类曲面积分一直是历年考试的重点内容, 一般有以下三种方法:

1. 直接投影法.

$$\iint_{\Sigma} P dy dz = \pm \iint_{D_{yz}} P dy dz \quad \left(\text{曲面 } \Sigma \text{ 的法向量与 } x \text{ 轴的夹角小于 } \frac{\pi}{2}, \text{ 取正号, 大于 } \frac{\pi}{2}, \text{ 取负号} \right).$$

$$\iint_{\Sigma} Q dz dx = \pm \iint_{D_{xz}} Q dz dx \quad \left(\text{曲面 } \Sigma \text{ 的法向量与 } y \text{ 轴的夹角小于 } \frac{\pi}{2}, \text{ 取正号, 大于 } \frac{\pi}{2}, \text{ 取负号} \right).$$

$$\iint_{\Sigma} R dx dy = \pm \iint_{D_{xy}} R dx dy \quad \left(\text{曲面 } \Sigma \text{ 的法向量与 } z \text{ 轴的夹角小于 } \frac{\pi}{2}, \text{ 取正号, 大于 } \frac{\pi}{2}, \text{ 取负号} \right).$$

特别注意: 不要忽略正、负号.

2. 矢量点积法.

对于曲面积分 $\iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy$, 若不能利用高斯公式, 且用直接投影法又比较复杂,

则可考虑积分曲面 Σ 在某个坐标面上的投影区域是否比较简单.

若积分曲面 Σ 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 比较简单, 则将积分曲面 Σ 的方程写成形式:

$z = z(x, y)$, 求出 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, 有

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy &= \iint_{\Sigma} \left[P \cdot \left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right) + Q \cdot \left(-\frac{\partial z}{\partial y}\right) + R \right] dx dy \\ &= \pm \iint_{D_{xy}} \left[P \cdot \left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right) + Q \cdot \left(-\frac{\partial z}{\partial y}\right) + R \right] dx dy \end{aligned}$$

类似地, 有其他两种情形.

3. 高斯公式.

若积分曲面 Σ 为闭曲面 (或者通过添加辅助有向曲面 Σ^* , 使 $\Sigma + \Sigma^*$ 成为闭曲面), 且在积分曲面 Σ (或 $\Sigma + \Sigma^*$) 所围成的闭区域 Ω 内, P, Q, R 具有一阶连续偏导数, 表达式 $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ 比较简单, 则利用高斯公式计算积分 $\oiint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \pm \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv$ (Σ 取外侧, 正号; 取内侧, 负号).

添加辅助有向曲面 Σ^* , 使 $\Sigma + \Sigma^*$ 成为闭曲面, 应考虑 Σ 的侧来确定 Σ^* 的侧, 使 Σ^* 与 Σ 所围成闭曲面后同为外侧 (或内侧).

注意: (1) 在计算曲线曲面积分 (不管是第一类还是第二类) 时, 应先考虑能否将积分曲线曲面方程代入被积表达式, 对积分进行化简.

(2) 若投影为 xOy 平面上一条直线, 则 $\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = 0$.

第八章 无穷级数

本章导读

本章主要考查如下几个方面:一是判别或证明数项级数的敛散性,特别是判定抽象级数的敛散性;二是求幂级数的和函数及数项级数的和;三是求函数的幂级数展开式;对于傅里叶级数,考试频率低,应熟练掌握狄利克雷收敛定理.

试题特点

每年试题一般是一个大题、一个小题,分数约占试卷的9%. 小题主要是抽象级数敛散性的判定,一般以选择题的形式出现,往往有一定难度;大题主要涉及求幂级数的和函数以及把函数展开成幂级数,题目难度不是很大. 对于傅里叶级数,在2008,2013年考过.

考题详析

一、数项级数敛散性的判定

1 (2009, 4题, 4分) 设有两个数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则

(A) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

(B) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散.

(C) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛.

(D) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 发散.

【答案】 C.

【解析】 取 $a_n = b_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$, 排除(A). 取 $a_n = b_n = \frac{1}{n}$, 排除(B)(D).

【评注】 可直接证明(C)正确, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 知存在 $M > 0$, 当 n 充分大时, 有

$|a_n| \leq M$, 因而 $a_n^2 b_n^2 \leq M^2 b_n^2$, 由 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛可知 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 收敛, 所以应选(C).

2 (2014, 19题, 10分) 设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足 $0 < a_n < \frac{\pi}{2}, 0 < b_n < \frac{\pi}{2}, \cos a_n - a_n = \cos b_n$,

且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛.

(I) 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$;



(II) 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$ 收敛.

【分析】(I) 用极限的夹逼定理; (II) 用级数收敛的比较判别法.

【证明】(I) 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. 而

$$a_n = \cos a_n - \cos b_n = -2 \sin \frac{a_n + b_n}{2} \sin \frac{a_n - b_n}{2} > 0, \text{ 且 } \sin \frac{a_n + b_n}{2} > 0$$

有 $\sin \frac{a_n - b_n}{2} < 0$.

又 $-\frac{\pi}{4} < \frac{a_n - b_n}{2} < \frac{\pi}{4}$, 故 $-\frac{\pi}{4} < \frac{a_n - b_n}{2} < 0$, 即 $0 < a_n < b_n$, 由夹逼定理 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

(II) (方法一) 由 (I) $a_n = -2 \sin \frac{a_n + b_n}{2} \sin \frac{a_n - b_n}{2}$, 所以

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{-2 \sin \frac{a_n + b_n}{2} \sin \frac{a_n - b_n}{2}}{b_n} \leq \frac{2 \frac{a_n + b_n}{2} \frac{b_n - a_n}{2}}{b_n} = \frac{b_n^2 - a_n^2}{2b_n} < \frac{b_n^2}{2b_n} = \frac{b_n}{2}$$

又 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 进而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2}$ 收敛, 用比较判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$ 收敛.

(方法二) 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_n}{b_n}}{\frac{b_n}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos b_n}{b_n^2} \cdot \frac{a_n}{1 - \cos b_n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{1 - \cos b_n}$
 $= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_n + 1 - \cos a_n} = \frac{1}{2},$

且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 于是由正项级数的比较判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{a_n}$ 收敛.

3 (2016, 19 题, 10 分) 已知函数 $f(x)$ 可导, 且 $f(0) = 1, 0 < f'(x) < \frac{1}{2}$, 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1} = f(x_n) (n = 1, 2, \dots)$ 证明:

(I) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (x_{n+1} - x_n)$ 绝对收敛;

(II) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 且 $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} x_n < 2$.

【证明】(I) 依题意知

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| = |f'(\xi)(x_n - x_{n-1})| \quad (\text{其中 } \xi \text{ 介于 } x_n, x_{n-1} \text{ 之间})$$

$$< \frac{1}{2} |x_n - x_{n-1}| < \frac{1}{2^2} |x_{n-1} - x_{n-2}|$$

$$< \dots < \frac{1}{2^{n-1}} |x_2 - x_1|$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} |x_2 - x_1| = |x_2 - x_1| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ 收敛,

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} |x_{n+1} - x_n|$ 收敛, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} (x_{n+1} - x_n)$ 绝对收敛.

(II) 由 (I) 的结论知 $\sum_{n=1}^{\infty} (x_{n+1} - x_n)$ 绝对收敛, 其部分和的极限



$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} - x_1$$

存在,故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 由于 $f(x)$ 可导, 从而 $f(x)$ 连续, 对 $x_{n+1} = f(x_n)$ 两边取极限得 $a = f(a)$.

又 $f(a) - f(0) = f'(\xi)a$, ξ 介于 $0, a$ 之间, 从而 $a - 1 = f'(\xi)a$, 即

$$a = \frac{1}{1 - f'(\xi)}$$

由已知条件知 $0 < f'(\xi) < \frac{1}{2}$, 故 $0 < a < 2$, 即 $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} x_n < 2$.

4 (2019, 3 题, 4 分) 设 $\{u_n\}$ 是单调增加的有界数列, 则下列级数中收敛的是

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$. (B) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{u_n}$. (C) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$. (D) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1}^2 - u_n^2)$.

【答案】 D.

【解析】 对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1}^2 - u_n^2)$, 其部分和

$$S_n = (u_{n+1}^2 - u_n^2) + (u_n^2 - u_{n-1}^2) + \cdots + (u_2^2 - u_1^2) = u_{n+1}^2 - u_1^2$$

数列 $\{u_n\}$ 单调增加且有界, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ 存在.

因而 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 存在, 即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1}^2 - u_n^2)$ 收敛.

练习题

1. (2005, 数三, 4 分) 设 $a_n > 0, n = 1, 2, \cdots$, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛, 则下列结论正确的是

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 发散. (B) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 发散.
(C) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ 收敛. (D) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} - a_{2n})$ 收敛.

2. (2011, 数三, 4 分) 设 $\{u_n\}$ 是数列, 则下列命题正确的是

(A) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛. (B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.
(C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ 收敛. (D) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

3. (2012, 数三, 4 分) 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n} \sin \frac{1}{n^\alpha}$ 绝对收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$ 条件收敛, 则

(A) $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$. (B) $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$. (C) $1 < \alpha \leq \frac{3}{2}$. (D) $\frac{3}{2} < \alpha < 2$.

4. (2004, 数三, 4 分) 设有下列命题:

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.
(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1000}$ 收敛.



(3) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

(4) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛.

则以上命题中正确的是

- (A) (1)(2). (B) (2)(3). (C) (3)(4). (D) (1)(4).

练习题参考答案

1. 【答案】 D.

【解析】 取 $a_n = \frac{1}{n}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 均发散, 排除 (A)(B) 选项, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ 发散, 进一步排除 (C), 故应选 (D). 事实上, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} - a_{2n})$ 的部分和数列极限存在.

【评注】 通过反例用排除法找答案是求解类似无穷级数选择问题的最常用方法.

2. 【答案】 A.

【解析】 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则该级数加括号后得到的级数仍收敛, 因此应选 (A).

3. 【答案】 D.

【解析】 本题考查绝对收敛和条件收敛的性质, 及 P -级数的收敛性.

由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n} \sin \frac{1}{n^\alpha}$ 绝对收敛, 且当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\left| (-1)^n \sqrt{n} \sin \frac{1}{n^\alpha} \right| \sim \frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}$, 故 $\alpha - \frac{1}{2} > 1$,

即 $\alpha > \frac{3}{2}$. 由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$ 条件收敛知, $\alpha < 2$. 应选 (D).

4. 【答案】 B.

【解析】 可以通过举反例及级数的性质来说明 4 个命题的正确性.

(1) 是错误的, 如令 $u_n = (-1)^n$, 显然, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 分散, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛.

(2) 是正确的, 因为改变、增加或减少级数的有限项, 不改变级数的收敛性.

(3) 是正确的, 因为由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ 可得到 u_n 不趋向于零 ($n \rightarrow \infty$), 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

(4) 是错误的, 如令 $u_n = \frac{1}{n}, v_n = -\frac{1}{n}$, 显然, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 收敛.

故选 (B).

【评注】 本题主要考查级数的性质与收敛性的判别法, 属于基本题型.

小结

1. 解题思路:

(1) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散; 否则进一步判断.

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 先化简 u_n , 视其特点选择适当的判别法:

① 若 u_n 中含有 $\frac{1}{n^a}$ (或 $\frac{1}{n^a \ln^p n}$), 则可与 p 级数 (或对数 p 级数) 比较;

② 若 u_n 中含有 n 的乘积的形式 (包括 $n!$), 则可考虑用比值判别法;

③ 若 u_n 中含有形如 $a^{f(n)}$ 的因子, 则可考虑用根值判别法;

④ 以上方法均失效, 则可利用已知级数的敛散性质, 结合敛散的定义和性质, 考查其收敛性.

(3) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为任意项级数, 则可用方法 (1) 和 (2) 判断 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 的敛散性.

① 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛;

② 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 则看 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是否是交错级数, 若是, 用莱布尼茨判别法判断 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是否条件收敛.

2. 除了掌握以上判定级数敛散性的基本思路, 熟悉以下结论有助于我们判定级数的敛散性.

(1) 对于三个级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$,

① 如果有两个收敛, 则第三个收敛;

② 如果其中一个收敛, 另一个发散, 则第三个发散;

③ 如果有两个发散, 则第三个的敛散性不能确定;

④ 如果有两个绝对收敛, 则第三个绝对收敛;

⑤ 如果其中一个绝对收敛, 另一个条件收敛, 则第三个条件收敛;

⑥ 如果有两个条件收敛, 则第三个收敛, 但不能判定它是绝对收敛还是条件收敛.

(2) ① 对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}$ 都收敛;

② $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u_n| + u_n}{2}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u_n| - u_n}{2}$ 都收敛;

③ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u_n| + u_n}{2}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u_n| - u_n}{2}$ 都发散;

④ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u_n| + u_n}{2}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u_n| - u_n}{2}$, 一个收敛, 一个发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

(3) 对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^p$ ($p \geq 1$) 一定收敛; 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}$,

$\sum_{n=1}^{\infty} u_{3n}$ 等均收敛.



二、幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域

5 (2011, 2 题, 4 分) 设数列 $\{a_n\}$ 单调减少, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ($n = 1, 2, \dots$) 无界, 则幂级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 的收敛域是

(A) $(-1, 1]$.

(B) $[-1, 1)$.

(C) $[0, 2)$.

(D) $(0, 2]$

【答案】 C.

【解析】 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 的收敛区间是以 1 为中心的对称区间, 排除 (A) (B). 而 $x = 0$

时, 由莱布尼茨判别法, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛. $x = 2$ 时, 由部分和数列 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ($n = 1, 2, \dots$) 发

散知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. 因此应选 (C).

6 (2015, 3 题, 4 分) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 则 $x = \sqrt{3}$ 与 $x = 3$ 依次为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^n$ 的

(A) 收敛点, 收敛点.

(B) 收敛点, 发散点.

(C) 发散点, 收敛点.

(D) 发散点, 发散点.

【答案】 B.

【解析】 由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛可知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x = 2$ 处条件收敛, 则 $x = 2$ 为

幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 的收敛区间的端点, 故其收敛半径为 1.

由幂级数的性质可知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^n$ 的收敛半径也为 1.

由于 $|\sqrt{3} - 1| < 1$, $|3 - 1| > 1$.

则 $x = \sqrt{3}$ 为收敛点, $x = 3$ 为发散点, 故应选 (B).

7 (2020, 4 题, 4 分) 设 R 为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径, r 是实数, 则

(A) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 发散时, $|r| \geq R$.

(B) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 收敛时, $|r| \leq R$.

(C) 当 $|r| \geq R$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 发散.

(D) 当 $|r| \leq R$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 收敛.

【答案】 A.

【解析】 由阿贝尔定理, 当 $|r| < R$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n$ 收敛, 进而, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 收敛.

所以, 当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 发散时, $|r| \geq R$. 答案选 (A).

【评注】 解析中用到了原命题成立时, 它的逆否命题一定成立.

练习题

1. (2009, 数三, 4分) 幂函数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n - (-1)^n}{n^2} x^n$ 的收敛半径为_____.

2. (2002, 数三, 3分) 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 与 $\frac{1}{3}$, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{b_n^2} x^n$ 的收敛半径为

- (A) 5. (B) $\frac{\sqrt{5}}{3}$. (C) $\frac{1}{3}$. (D) $\frac{1}{5}$.

练习题参考答案

1. 【答案】 $\frac{1}{e}$.

【解析】 由题意知, $a_n = \frac{e^n - (-1)^n}{n^2} > 0$,

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{e^{n+1} - (-1)^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{e^n - (-1)^n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{e^{n+1} \left[1 - \left(-\frac{1}{e}\right)^{n+1} \right]}{e^n \left[1 - \left(-\frac{1}{e}\right)^n \right]} \rightarrow e (n \rightarrow \infty).$$

所以该幂级数的收敛半径为 $\frac{1}{e}$.

【评注】 也可用下法求解, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^2} x^n$ 的收敛半径为 $\frac{1}{e}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} x^n$ 的收敛半径为 1, 取两者最小值即为所求.

2. 【答案】 A.

【解析】 由题设, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{3}{\sqrt{5}}, \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = 3$, 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\left(\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \right)^2}{\left(\frac{a_n}{b_n} \right)^2} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right)^2}{\left(\frac{b_{n+1}}{b_n} \right)^2} \right| = \frac{1}{5}$$

故幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{b_n^2} x^n$ 的收敛半径为 5, 应选(A).

小结

本题型的解题思路:

1. 对于一般函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, 先求 $\rho(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right|$ 或 $\rho(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|}$, 则

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域为 $\{x \in \mathbf{R}; \rho(x) < 1\} \cup \{a \in \mathbf{R}; \rho(a) = 1 \text{ 且 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a) \text{ 收敛}\}$.

2. 对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, 先求 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ 或 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, 则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的收敛半径 $R = \frac{1}{\rho}$, 收敛区间为 $(x_0 - R, x_0 + R)$, 收敛域为

$$(x_0 - R, x_0 + R) \cup \left\{ x = x_0 \pm R, \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \text{ 收敛} \right\}$$

3. 若 $a_n \geq 0, b_n \geq 0$ (可以从某项开始), 则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ 的收敛区间(域)的交集就是 $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(x-x_0)^n$ 的收敛区间(域).

4. 幂级数经过有限次的逐项求导或积分, 不改变其收敛半径与收敛区间, 但在收敛区间的端点处的敛散性可能会改变.

三、求幂级数的和函数及数项级数的和

8 (2009, 16 题, 9 分) 设 a_n 为曲线 $y = x^n$ 与 $y = x^{n+1} (n = 1, 2, \dots)$ 所围成区域的面积, 记 $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$, 求 S_1 与 S_2 的值.

【解】 曲线 $y = x^n$ 与 $y = x^{n+1}$ 的交点为 $(0, 0), (1, 1)$, 所以

$$a_n = \int_0^1 (x^n - x^{n+1}) dx = \left(\frac{1}{n+1} x^{n+1} - \frac{1}{n+2} x^{n+2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

从而

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N+2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \dots$$

由 $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$, 令 $x = 1$, 得

$$\ln 2 = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots \right) = 1 - S_2 \Rightarrow S_2 = 1 - \ln 2$$

【评注】 此题是定积分的几何意义与级数求和的一个综合题, 特别是用到了常见函数 $\ln(1+x)$ 的幂级数展开式.

9 (2010, 18 题, 10 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

【分析】 用比值判别法确定收敛区间, 进而确定收敛域; 利用幂级数的逐项求导求和函数.

【解】 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2n+2}(2n-1)}{x^{2n}(2n+1)} \right| = x^2$, 所以当 $x^2 < 1$, 即 $-1 < x < 1$ 时,

原幂级数绝对收敛.

当 $x = \pm 1$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$, 由莱布尼茨判别法显然收敛, 故原幂级数的收敛域为 $[-1, 1]$.

$$\text{又 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}, \text{ 令}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}, x \in (-1, 1)$$

$$\text{则 } f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2(n-1)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$\text{由于 } f(0) = 0, \text{ 所以 } f(x) = \int_0^x f'(t) dt + f(0) = \arctan x.$$

从而幂级数的收敛域为 $[-1, 1]$, 和函数为 $x \arctan x, x \in [-1, 1]$.

【评注】对于缺项的幂级数, 一般用比值判别法确定收敛区间; 本题也可令 $t = x^2$ 转化为不缺项的幂级数.

例 10 (2012, 17 题, 10 分) 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n+1} x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

【分析】由此幂级数的构成知, 其和函数可以通过几何级数求导和求积分得到, 因此可以先求和函数, 再由幂级数的性质得收敛半径, 然后讨论端点处的收敛性, 得幂级数的收敛域.

$$\begin{aligned} \text{【解】 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n+1} x^{2n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)^2 + 2}{2n+1} x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} x^{2n}, \end{aligned}$$

$$\text{因为 } \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) x^{2n} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} \right)' = \left(\frac{x}{1-x^2} \right)' = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}, -1 < x < 1,$$

$$\text{当 } x \neq 0 \text{ 时, } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} x^{2n} = \frac{2}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1},$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, -1 < x < 1,$$

$$\text{因为 } x = 0 \text{ 时, } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} x^{2n} = 2, \text{ 所以}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} x^{2n} = \begin{cases} \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x}, & x \in (-1, 0) \cup (0, 1), \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

当 $x = \pm 1$ 时, 原级数为 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n+1}$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n+1} = +\infty \neq 0$ 知级数发散.

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n+1} x^{2n} = 3,$$

因此, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n+1} x^{2n}$ 的收敛域为 $-1 < x < 1$,



$$\text{和函数 } S(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x}, & x \in (-1, 0) \cup (0, 1), \\ 3, & x = 0. \end{cases}$$

11 (2013, 16 题, 10 分) 设数列 $\{a_n\}$ 满足条件: $a_0 = 3, a_1 = 1, a_{n-2} - n(n-1)a_n = 0 (n \geq 2)$,

$S(x)$ 是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数.

(I) 证明 $S''(x) - S(x) = 0$;

(II) 求 $S(x)$ 的表达式.

【分析】 利用幂级数可逐项求导的性质, 验证 (I) 成立; 解微分方程求出 $S(x)$, 注意初值条件的使用.

【解】 (I) $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 得 $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, S''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$,

再由 $a_{n-2} - n(n-1)a_n = 0$, 有

$$S''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x)$$

即 $S''(x) - S(x) = 0$.

(II) 二阶常系数齐次线性微分方程 $S''(x) - S(x) = 0$ 的特征方程为 $\lambda^2 - 1 = 0$, 解得 $\lambda = \pm 1$, 于是 $S''(x) - S(x) = 0$ 的通解为

$$S(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

显然, 初值条件为 $\begin{cases} S(0) = a_0, \\ S'(0) = a_1, \end{cases}$ 进而有 $\begin{cases} C_1 + C_2 = 3, \\ C_1 - C_2 = 1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} C_1 = 2, \\ C_2 = 1. \end{cases}$

所以 $S(x) = 2e^x + e^{-x}$.

12 (2017, 12 题, 4 分) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n x^{n-1}$ 在区间 $(-1, 1)$ 内的和函数 $S(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{1}{(1+x)^2}$.

【解析】 $S(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n \right)' = \left(\frac{x}{1+x} \right)' = \frac{1}{(1+x)^2}$.

13 (2018, 3 题, 4 分) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+3}{(2n+1)!} =$

(A) $\sin 1 + \cos 1$.

(B) $2\sin 1 + \cos 1$.

(C) $2\sin 1 + 2\cos 1$.

(D) $2\sin 1 + 3\cos 1$.

【答案】 B.

【解析】 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2n+3}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n+1)!}$
 $= \cos 1 + 2\sin 1$.

【评注】 此题利用了 $\sin x$ 及 $\cos x$ 的幂级数展开式.

14 (2019, 11 题, 4 分) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^n$ 在 $(0, +\infty)$ 内的和函数 $S(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\cos \sqrt{x}$.



【解析】 利用余弦函数的幂级数展开式可得

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\sqrt{x})^{2n} = \cos \sqrt{x}$$

15 (2020, 17 题, 10 分) 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, (n+1)a_{n+1} = \left(n + \frac{1}{2}\right)a_n$.

证明: 当 $|x| < 1$ 时, 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 收敛, 并求其和函数.

【分析】 得到和函数的微分方程, 解微分方程求出和函数.

【解】 由阿达玛公式 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \frac{1}{2}}{n+1} = 1$.

幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R = \frac{1}{\rho} = 1$, 所以, 当 $|x| < 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 收敛.

令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, 则

$$\begin{aligned} S'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + a_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) a_n x^n + 1 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + 1 = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right)' + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + 1 \end{aligned}$$

$$\text{即 } S'(x) = x S'(x) + \frac{1}{2} S(x) + 1, \quad \frac{S'(x)}{S(x)+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-x}.$$

$$\ln |S(x)+2| = -\frac{1}{2} \ln |1-x| + \ln C_1$$

$$|S(x)+2| = \frac{C_1}{\sqrt{1-x}}, \quad S(x)+2 = \frac{\pm C_1}{\sqrt{1-x}}.$$

$$\text{亦是 } S(x)+2 = \frac{C}{\sqrt{1-x}},$$

$$\text{由 } S(0) = 0 \text{ 得 } C = 2, \text{ 所求和函数为 } S(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x}} - 2.$$

练习题

1. (2005, 数三, 9 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1} - 1\right) x^{2n}$ 在区间 $(-1, 1)$ 内的和函数 $S(x)$.

2. (2006, 数三, 10 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n+1}}{n(2n-1)}$ 的收敛域及和函数 $S(x)$.

3. (2014, 数三, 10 分) 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+3)x^n$ 的收敛域及和函数.

练习题参考答案

1. 【分析】 幂级数求和函数一般采用逐项求导或逐项积分, 转化为几何级数或已知函数的幂级数展开式, 从而达到求和的目的.



【解】 设

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1} - 1 \right) x^{2n}$$

$$S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n}, S_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n}$$

则由于

$$S(x) = S_1(x) - S_2(x), x \in (-1, 1)$$

$$S_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} = \frac{x^2}{1-x^2}$$

$$(xS_1(x))' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} = \frac{x^2}{1-x^2}, x \in (-1, 1)$$

$$\text{因此 } xS_1(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1-t^2} dt = -x + \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

又由于 $S_1(0) = 0$, 故

$$S_1(x) = \begin{cases} -1 + \frac{1}{2x} \ln \frac{1+x}{1-x}, & |x| < 1, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$\text{所以 } S(x) = S_1(x) - S_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x} \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{1-x^2}, & |x| < 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

【评注】 而幂级数求和尽量将其转化为形如 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 或 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 的幂级数, 再通过逐项求导或逐项积分求出其和函数. 本题应特别注意 $x=0$ 的情形.

2. 【分析】 因为幂级数缺项, 按函数项级数收敛域的求法计算; 利用逐项求导或积分并结合已知函数的幂级数展开式计算和函数.

【解】 记 $u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1} x^{2n+1}}{n(2n-1)}$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n x^{2n+3}}{(n+1)(2n+1)}}{\frac{(-1)^{n-1} x^{2n+1}}{n(2n-1)}} \right| = |x|^2$$

所以当 $|x|^2 < 1$, 即 $|x| < 1$ 时, 所给幂级数收敛; 当 $|x| > 1$ 时, 所给幂级数发散;

当 $x = \pm 1$ 时, 所给幂级数为 $\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}, \frac{(-1)^n}{n(2n-1)}$, 均收敛,

故所给幂级数的收敛域为 $[-1, 1]$.

$$\text{在 } (-1, 1) \text{ 内, } S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n+1}}{n(2n-1)} = 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{(2n-1)(2n)} = 2xS_1(x),$$

$$\text{而 } S_1'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1}, S_1''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2} = \frac{1}{1+x^2},$$

所以 $S_1'(x) - S_1'(0) = \int_0^x S_1''(t) dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan x$, 又 $S_1'(0) = 0$,

于是 $S_1'(x) = \arctan x$. 同理

$$\begin{aligned} S_1(x) - S_1(0) &= \int_0^x S_1'(t) dt = \int_0^x \arctan t dt \\ &= t \arctan t \Big|_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2} dt = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \end{aligned}$$

又 $S_1(0) = 0$, 所以 $S_1(x) = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$.

故 $S(x) = 2x^2 \arctan x - x \ln(1+x^2)$, $x \in (-1, 1)$.

由于所给幂级数在 $x = \pm 1$ 处都收敛, 且 $S(x) = 2x^2 \arctan x - x \ln(1+x^2)$ 在 $x = \pm 1$ 处都连续, 所以 $S(x)$ 在 $x = \pm 1$ 成立, 即

$$S(x) = 2x^2 \arctan x - x \ln(1+x^2), x \in [-1, 1]$$

【评注】 本题幂级数是缺项幂级数, 则应采用函数项级数求收敛域的方法, 属基本题型.

3. **【分析】** 利用已知几何级数的收敛性与收敛域, 幂级数的逐项求导、逐项积分性质求解.

【解】 (方法一) 因几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, 且收敛域为 $x \in (-1, 1)$. 又

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+3)x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2} \right)'' + \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} \right)' \\ &= \left(\frac{x^2}{1-x} \right)'' + \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \left[\frac{2x-x^2}{(1-x)^2} \right]' + \frac{1}{(1-x)^2} \\ &= \frac{3-x}{(1-x)^3}, \quad x \in (-1, 1) \end{aligned}$$

由幂级数的逐项求导性质知 $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+3)x^n$ 的收敛域为 $(-1, 1)$,

和函数 $S(x) = \frac{3-x}{(1-x)^3}$, $x \in (-1, 1)$.

(方法二) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+3)x^n$ 的系数 $a_n = (n+1)(n+3)$, 又

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)(n+4)}{(n+1)(n+3)} = 1$$

所以收敛半径 $R = 1$,

当 $x = 1$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+3)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+3)$ 发散;

当 $x = -1$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+3)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+3)(-1)^n$ 发散,

故所求收敛域为 $(-1, 1)$.

设 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+3)x^n$, $x \in (-1, 1)$. 则



$$\begin{aligned}
 \int_0^x S(t) dt &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} \\
 &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (n+2)t^{n+1} dt \right]' + \frac{x}{1-x} \\
 &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2} \right)' + \frac{x}{1-x} = \left(\frac{x^2}{1-x} \right)' + \frac{x}{1-x} \\
 &= \frac{2x-x^2}{(1-x)^2} + \frac{x}{1-x} = \frac{3x-2x^2}{(1-x)^2}
 \end{aligned}$$

故和函数 $S(x) = \left[\frac{3x-2x^2}{(1-x)^2} \right]' = \frac{3-x}{(1-x)^3}, x \in (-1, 1)$.

【评注】 幂级数逐项求导后, 其收敛半径不变, 但端点可能由收敛变为不收敛, 即收敛域可能缩小; 逐项积分后, 其收敛半径不变, 但端点可能由不收敛变为收敛, 即收敛域可能扩大.

小结

1. 求幂级数的和函数 $S(x)$ 主要有以下两种方法:

(1) 先通过幂级数的代数运算、逐项微分、逐项积分等性质将其化为典型的幂级数求和问题

(例如 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$).

(2) 通过幂级数的代数运算、逐项微分、逐项积分等性质转化为关于和函数 $S(x)$ 的微分方程问题.

2. 求数项级数的和主要有以下的思路与方法:

(1) 构造幂级数法: 即通过构造幂级数, 转化为幂级数求和函数问题. 应先用级数的代数运算等性质对级数进行适当变形, 以便构造易于求和的幂级数形式.

对于收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b^n$, 一般构造幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ (显然要求它在 $x=b$ 处收敛), 求出其和函数 $S(x)$, 则有 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b^n = S(b)$. 而对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 相当于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b^n$ 当 $b=1$ 时的特殊情形.

(2) 利用收敛级数的定义及其性质: 即求部分和数列的极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, 也经常将通项 u_n 进行分解:

$u_n = a_n \pm b_n$, 先求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的和, 再根据级数的运算性质得到级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的和.

(3) 利用常见函数的幂级数展开式.

四、函数的幂级数展开

练习题

(2007, 数三, 10 分) 将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x - 4}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数, 并指出其收敛区间.



练习题参考答案

【分析】 本题考查函数的幂级数展开,利用间接法.

【解】 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x - 4} = \frac{1}{(x-4)(x+1)} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+1} \right)$, 而

$$\frac{1}{x-4} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x-1}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-1}{3} \right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{3^{n+1}}, \quad -2 < x < 4$$

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x-1}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x-1}{2} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{2^{n+1}}, \quad -1 < x < 3$$

$$\text{所以 } f(x) = \frac{1}{5} \left(-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{3^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{2^{n+1}} \right) = -\frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \right] (x-1)^n,$$

收敛区间为 $-1 < x < 3$.

小结

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

将函数在某点处展开成幂级数是重要的考试内容. 幂级数展开有直接法与间接法, 一般考查间接展开法, 即通过适当的恒等变形、求导或积分等, 将函数转化为幂级数展开式已知的函数.

1. 求出展开式后, 要写出展开式成立的区间. 幂级数经过有限次的逐项求导、积分不改变其收敛半径及收敛区间, 但在收敛区间的端点处的敛散性可能会改变. 因此, 需判别展开式在收敛区间的端点处是否收敛.

2. 幂级数展开式的两个简单应用.

(1) 利用幂级数展开式求数项级数的和. 求出展开式, 根据要求和的级数的特点, 在展开式中令 x 取某特殊值, 即可得到所求级数的和.

(2) 求函数 $f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x_0)$, 特别是 $f^{(n)}(0)$. 求出函数 $f(x)$ 的幂级数展开式 $f(x) =$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 又 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$, 根据函数幂级数展开式的唯一性, 得

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = a_n x^n, \text{ 即 } f^{(n)}(0) = a_n \cdot n!$$

五、傅里叶级数

16 (2013, 3 题, 4 分) 设 $f(x) = \left| x - \frac{1}{2} \right|$, $b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx$ ($n = 1, 2, \dots$), 令 $S(x) =$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$, 则 $S\left(-\frac{9}{4}\right) =$

(A) $\frac{3}{4}$.

(B) $\frac{1}{4}$.

(C) $-\frac{1}{4}$.

(D) $-\frac{3}{4}$.



【答案】 C.

【解析】 由题意知,需要对 $f(x) = \left|x - \frac{1}{2}\right|$ 作周期为 2 的奇延拓,然后用狄利克雷收敛定理.

$f(x) = \left|x - \frac{1}{2}\right|$ 作周期为 2 的奇延拓,则

$$S\left(-\frac{9}{4}\right) = S\left(-2 - \frac{1}{4}\right) = S\left(-\frac{1}{4}\right) = -S\left(\frac{1}{4}\right) = -f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}. \text{ 故选(C).}$$

小结

对于傅里叶级数,主要考查以下三个方面的内容:

1. 求函数 $f(x)$ 的傅里叶级数与傅里叶系数.

先确定 $f(x)$ 的周期 $2l$,利用公式求出傅里叶系数

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx (n = 0, 1, 2, \dots), b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx (n = 1, 2, \dots);$$

再由傅里叶系数得到傅里叶级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

2. 求傅里叶级数的和.

这类问题主要考查傅里叶级数的收敛定理,即狄利克雷定理.

设 $f(x)$ 在 $[-l, l]$ 上满足狄利克雷定理的条件,则 $f(x)$ 的以 $2l$ 为周期的傅里叶级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \text{ 的和函数}$$

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & x \text{ 为 } f(x) \text{ 的连续点, } x \in (-l, l), \\ \frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)], & x \text{ 为 } f(x) \text{ 的间断点, } x \in (-l, l), \\ \frac{1}{2}[f(-l+0) + f(l-0)], & x = \pm l \end{cases}$$

3. 求函数 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式.

设 $f(x)$ 在 $[-l, l]$ 上有定义,且满足狄利克雷的条件,则

(1) 若 $f(x)$ 在 $(-l, l)$ 连续,则

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right), (-l < x < l)$$

(2) 若 $f(x)$ 在 $[-l, l]$ 连续,且 $f(-l) = f(l)$,则

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right), (-l \leq x \leq l)$$

第九章 常微分方程

本章导读

本章主要侧重于一阶微分方程及二阶常系数线性微分方程的求解,其他类型的方程考试出现的频率较低.一阶微分方程重点掌握可分离变量、齐次及一阶线性微分方程的求解,特别是一阶线性微分方程的求解.

试题特点

每年试题一般是一个小题,以大题出现的形式较少,分数约占试卷的4%,难度不是很大.除了各种微分方程的求解,对常系数线性微分方程解的结构及性质的考查也是测试的一个重要方面.

考题详析

一、一阶微分方程

1 (2011,10题,4分) 微分方程 $y' + y = e^{-x} \cos x$ 满足条件 $y(0) = 0$ 的解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $e^{-x} \sin x$.

【解析】 微分方程的通解为 $y = e^{-\int dx} \left(C + \int e^{-x} \cos x e^{\int dx} dx \right) = e^{-x} (C + \sin x)$.

由初值条件 $y(0) = 0$ 得 $C = 0$. 所以应填 $e^{-x} \sin x$.

2 (2014,11题,4分) 微分方程 $xy' + y(\ln x - \ln y) = 0$ 满足条件 $y(1) = e^3$ 的解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $xe^{2x+1} (x > 0)$.

【解析】 这是典型的齐次微分方程,按一般方法求解.

$xy' + y(\ln x - \ln y) = 0$ 变形为 $y' = \frac{y}{x} \ln \left(\frac{y}{x} \right)$.

令 $u = \frac{y}{x}$, 则 $y = xu$, $y' = xu' + u$, 代入原方程 $xu' + u = u \ln u$, 即 $u' = \frac{u(\ln u - 1)}{x}$,

分离变量得 $\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}$, 两边积分可得

$$\ln |\ln u - 1| = \ln x + \ln C_1, \text{ 即 } \ln u - 1 = Cx$$

故 $\ln \frac{y}{x} - 1 = Cx$. 代入初值条件 $y(1) = e^3$, 可得 $C = 2$, 即 $\ln \frac{y}{x} = 2x + 1$.



综上,方程的解为 $y = xe^{2x+1} (x > 0)$.

3 (2016, 3 题, 4 分) 若 $y = (1+x^2)^2 - \sqrt{1+x^2}$, $y = (1+x^2)^2 + \sqrt{1+x^2}$ 是微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的两个解, 则 $q(x) =$

(A) $3x(1+x^2)$.

(B) $-3x(1+x^2)$.

(C) $\frac{x}{1+x^2}$.

(D) $-\frac{x}{1+x^2}$.

【答案】 A.

【解析】 利用线性微分方程解的性质与结构.

由 $y_1 = (1+x^2)^2 - \sqrt{1+x^2}$, $y_2 = (1+x^2)^2 + \sqrt{1+x^2}$ 是微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$

的两个解, 知 $y_1 - y_2$ 是 $y' + p(x)y = 0$ 的解.

故 $(y_1 - y_2)' + p(x)(y_1 - y_2) = 0$, 即

$$-2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x - 2\sqrt{1+x^2}p(x) = 0$$

从而得 $p(x) = -\frac{x}{1+x^2}$.

又 $\frac{y_1 + y_2}{2}$ 是微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的解, 代入方程, 有

$$[(1+x^2)^2]' + p(x)(1+x^2)^2 = q(x)$$

解得 $q(x) = 3x(1+x^2)$. 因此应选(A).

【评注】 本题也可把题中两个解代入微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$, 得到关于 $p(x), q(x)$ 的方程组, 解方程组可求得 $p(x), q(x)$.

4 (2018, 18 题, 10 分) 已知微分方程 $y' + y = f(x)$, 其中 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的连续函数.

(I) 若 $f(x) = x$, 求方程的通解.

(II) 若 $f(x)$ 是周期为 T 的函数, 证明: 方程存在唯一的以 T 为周期的解.

【解】 (I) 若 $f(x) = x$, 则方程化为 $y' + y = x$, 其通解为

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int f(x) dx} \left(C + \int x e^{\int dx} dx \right) = e^{-x} \left(C + \int x e^x dx \right) \\ &= e^{-x} (C + x e^x - e^x) = C e^{-x} + x - 1 \end{aligned}$$

(II) 设 $y(x)$ 为方程的任意解, 则 $y'(x+T) + y(x+T) = f(x+T)$.

而 $f(x)$ 周期为 T , 有 $f(x+T) = f(x)$. 又 $y'(x) + y(x) = f(x)$.

因此 $y'(x+T) + y(x+T) - y'(x) - y(x) = 0$, 有 $(e^x[y(x+T) - y(x)])' = 0$,

即 $e^x[y(x+T) - y(x)] = C$. 取 $C = 0$ 得 $y(x+T) - y(x) = 0$,

$y(x)$ 为唯一以 T 为周期的解.

5 (2019, 10 题, 4 分) 微分方程 $2yy' - y^2 - 2 = 0$ 满足条件 $y(0) = 1$ 的特解 $y =$ _____.

【答案】 $\sqrt{3e^x - 2}$.



【解析】 方程变形为 $\frac{2y}{2+y^2}dy = dx$, 有

$$\ln(2+y^2) = x + C$$

由 $y(0) = 1$ 得 $C = \ln 3$.

$$2+y^2 = 3e^x$$

所求特解为 $y = \sqrt{3e^x - 2}$.

【评注】 由初始条件 $y(0) = 1$, 开方取正号.

6 (2019, 15 题, 10 分) 设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y' + xy = e^{-\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(0) = 0$ 的特解.

(I) 求 $y(x)$;

(II) 求曲线 $y = y(x)$ 的凹凸区间及拐点.

【解】 (I) 由一阶线性微分方程的通解公式知

$$y = e^{-\int x dx} \left(\int e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^{\int x dx} dx + C \right) = e^{-\frac{x^2}{2}} (x + C)$$

由 $y(0) = 0$ 知, $C = 0$, 故 $y(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

(II) 由 $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ 知

$$y' = (1 - x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$y'' = (x^3 - 3x)e^{-\frac{x^2}{2}} = x(x^2 - 3)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

令 $y'' = (x^3 - 3x)e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$ 得 $x_1 = 0, x_2 = -\sqrt{3}, x_3 = \sqrt{3}$.

当 $x < -\sqrt{3}$ 或 $0 < x < \sqrt{3}$ 时, $y''(x) < 0$;

当 $-\sqrt{3} < x < 0$ 或 $x > \sqrt{3}$ 时, $y''(x) > 0$.

由此可知, 曲线 $y = y(x)$ 凹的区间为 $(-\sqrt{3}, 0)$ 和 $(\sqrt{3}, +\infty)$; 凸的区间为 $(-\infty, -\sqrt{3})$ 和 $(0, \sqrt{3})$.

拐点为 $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}), (0, 0), (\sqrt{3}, \sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}})$.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

练习题

1. (2005, 数三, 4 分) 微分方程 $xy' + y = 0$ 满足初始条件 $y(1) = 2$ 的特解为 _____.

2. (2006, 数三, 4 分) 非齐次线性微分方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 有两个不同的解 $y_1(x), y_2(x)$,

C 为任意常数, 则该方程的通解是

(A) $C[y_1(x) - y_2(x)]$.

(B) $y_1(x) + C[y_1(x) - y_2(x)]$.

(C) $C[y_1(x) + y_2(x)]$.

(D) $y_1(x) + C[y_1(x) + y_2(x)]$.

3. (2007, 数三, 4 分) 微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x} \right)^3$ 满足 $y|_{x=1} = 1$ 的特解为 $y =$ _____.

4. (2008, 数二, 4 分) 微分方程 $(y + x^2 e^{-x})dx - xdy = 0$ 的通解是 $y =$ _____.



练习题参考答案

1.【答案】 $xy = 2$.

【解析】 原方程可化为 $(xy)' = 0$, 积分得 $xy = C$, 代入初始条件得 $C = 2$, 故所求特解为 $xy = 2$.

【评注】 本题虽属基本题型, 也可先变形 $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$, 再积分求解.

2.【答案】 B.

【解析】 由于 $y_1(x) - y_2(x)$ 是对应齐次线性微分方程 $y' + P(x)y = 0$ 的非零解, 所以它的通解是 $Y = C[y_1(x) - y_2(x)]$, 故原方程的通解为

$$y = y_1(x) + Y = y_1(x) + C[y_1(x) - y_2(x)]$$

故应选(B).

【评注】 本题属基本题型, 考查一阶线性非齐次微分方程解的结构:

$$y = y^* + Y$$

其中 y^* 是所给一阶线性微分方程的特解, Y 是对应齐次微分方程的通解.

3.【答案】 $y = \frac{x}{\sqrt{\ln x + 1}}, x > e^{-1}$.

【解析】 令 $u = \frac{y}{x}$, 则原方程变为

$$u + x \frac{du}{dx} = u - \frac{1}{2}u^3 \Rightarrow \frac{du}{u^3} = -\frac{dx}{2x}$$

两边积分得

$$-\frac{1}{2u^2} = -\frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{2}\ln C$$

即 $x = \frac{1}{C}e^{\frac{1}{u^2}} \Rightarrow x = \frac{1}{C}e^{\frac{x^2}{y^2}}$, 将 $y|_{x=1} = 1$ 代入左式得 $C = e$,

故满足条件的方程的特解为 $ex = e^{\frac{x^2}{y^2}}$, 即 $y = \frac{x}{\sqrt{\ln x + 1}}, x > e^{-1}$.

4.【答案】 $x(C - e^{-x})$, C 为任意常数.

【解析】 原方程可改写为

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x} \cdot y = xe^{-x}$$

于是通解为

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left(\int xe^{-x} e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right) \\ &= x \left(\int e^{-x} dx + C \right) = x(C - e^{-x}) \end{aligned}$$



小结

1. 此类题解题步骤:

(1) 判断方程的类型, 可将方程写成形式: $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ 或 $\frac{dx}{dy} = g(x, y)$ (这里将变量 x 看作函数, y 看作自变量).

(2) 若不能确定类型, 考虑用适当的变量代换.

2. 应熟练掌握考试大纲所要求的一阶方程类型及其解法:

(1) 可分离变量方程: 分离变量化为 $f(x)dx = g(y)dy$, 两边积分得通解.

(2) 齐次方程: 将方程化为 $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$, 令 $u = \frac{y}{x}$, 有 $y = xu$, $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$ 代入方程并化为可分离变量方程 $\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}$.

(3) 一阶线性方程: 将方程化为标准形式: $y' + P(x)y = Q(x)$, 由通解公式得通解为

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx + C \right]$$

(4) 伯努利方程: 先将方程化为标准形式: $y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha$ ($\alpha \neq 0, 1$), 令 $z = y^{1-\alpha}$, 方程化为一阶线性方程 $z' + (1-\alpha)P(x)z = (1-\alpha)Q(x)$.

(5) 全微分方程: 方程 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ 为全微分方程的充要条件是:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

通解为 $u(x, y) = C$, 其中 $u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y)dy$.

或者 $u(x, y) = \int_{y_0}^y Q(x_0, y)dy + \int_{x_0}^x P(x, y)dx$.

另外, 如果方程中出现 $f(x \pm y)$, $f(xy)$, $f(x^2 \pm y^2)$, $f\left(\frac{y}{x}\right)$, $f\left(\frac{x}{y}\right)$ 等复合函数, 通常作相应的变量代换: $u = x \pm y$, xy , $x^2 \pm y^2$, $\frac{y}{x}$, $\frac{x}{y}$, 将方程化为上述基本类型.

特别值得注意的是, 可降阶的微分方程数学一多年没有考题, 但属于考纲要求的内容, 应掌握三种可降阶的二阶微分方程的求解.

二、高阶常系数微分方程的求解

7 (2009, 10 题, 4 分) 若二阶常系数线性齐次微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2x)e^x$, 则非齐次方程 $y'' + ay' + by = x$ 满足条件 $y(0) = 2, y'(0) = 0$ 的解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-xe^x + x + 2$.



【解析】 由二阶常系数线性齐次微分方程的通解为 $y = (C_1 + C_2x)e^x$,

得对应特征方程的两个特征根为 $r_1 = r_2 = 1$, 故 $a = -2, b = 1$;

对应非齐次微分方程为 $y'' - 2y' + y = x$, 设其特解为 $y^* = Ax + B$,

代入得 $-2A + Ax + B = x$, 有 $A = 1, B = 2$.

所以特解为 $y^* = x + 2$, 因而非齐次微分方程的通解为 $y = (C_1 + C_2x)e^x + x + 2$,

把 $y(0) = 2, y'(0) = 0$ 代入, 得 $C_1 = 0, C_2 = -1$.

所求特解为 $y = -xe^x + x + 2$.

【评注】 此题通常是考查二阶常系数线性微分方程解的结构和形式.

8 (2010, 15 题, 10 分) 求微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 2xe^x$ 的通解.

【分析】 直接利用二阶常系数线性微分方程的求解方法.

【解】 由方程 $y'' - 3y' + 2y = 0$ 的特征方程 $r^2 - 3r + 2 = 0$, 解得特征根 $r_1 = 1, r_2 = 2$,

所以方程 $y'' - 3y' + 2y = 0$ 的通解为 $\bar{y} = C_1e^x + C_2e^{2x}$.

设 $y'' - 3y' + 2y = 2xe^x$ 的特解为 $y^* = x(ax + b)e^x$, 则

$$(y^*)' = (ax^2 + 2ax + bx + b)e^x, (y^*)'' = (ax^2 + 4ax + bx + 2a + 2b)e^x$$

代入原方程, 解得 $a = -1, b = -2$, 故特解为 $y^* = x(-x - 2)e^x$,

所以原方程的通解为

$$y = \bar{y} + y^* = C_1e^x + C_2e^{2x} - x(x + 2)e^x, \text{ 其中 } C_1, C_2 \text{ 为任意常数.}$$

9 (2012, 9 题, 4 分) 若函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$ 及 $f''(x) + f(x) = 2e^x$, 则 $f(x) =$ _____.

【答案】 e^x .

【解析】 齐次线性微分方程 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$ 的特征方程为 $r^2 + r - 2 = 0$, 特征根为 $r_1 = 1, r_2 = -2$, 因此齐次微分方程的通解为 $f(x) = C_1e^x + C_2e^{-2x}$. 于是

$$f'(x) = C_1e^x - 2C_2e^{-2x}, f''(x) = C_1e^x + 4C_2e^{-2x}$$

代入 $f''(x) + f(x) = 2e^x$ 得

$$2C_1e^x + 5C_2e^{-2x} = 2e^x$$

从而 $C_1 = 1, C_2 = 0$, 故 $f(x) = e^x$. 应填 e^x .

10 (2013, 10 题, 4 分) 已知 $y_1 = e^{3x} - xe^{2x}, y_2 = e^x - xe^{2x}, y_3 = -xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解, 则该方程的通解为 $y =$ _____.

【答案】 $C_1e^{3x} + C_2e^x - xe^{2x}$, 其中 C_1, C_2 为任意常数.

【解析】 本题主要考查二阶常系数线性微分方程 $y'' + py' + qy = f(x)$ 解的性质和结构, 关键是找出对应齐次线性微分方程的两个线性无关的解.

由线性微分方程解的性质知 $y_1 - y_3 = e^{3x}, y_2 - y_3 = e^x$ 是对应齐次线性微分方程的两个线性无关的解, 则该方程的通解为

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^x - xe^{2x}, \text{ 其中 } C_1, C_2 \text{ 为任意常数}$$



11 (2015, 2 题, 4 分) 设 $y = \frac{1}{2}e^{2x} + \left(x - \frac{1}{3}\right)e^x$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的一个特解, 则

(A) $a = -3, b = 2, c = -1$.

(B) $a = 3, b = 2, c = -1$.

(C) $a = -3, b = 2, c = 1$.

(D) $a = 3, b = 2, c = 1$.

【答案】 A.

【解析】 把 $y = \frac{1}{2}e^{2x} + \left(x - \frac{1}{3}\right)e^x$ 代入微分方程, 待定系数即可求得 a, b, c .

由 $y = \frac{1}{2}e^{2x} + \left(x - \frac{1}{3}\right)e^x$ 得 $y' = e^{2x} + \left(x + \frac{2}{3}\right)e^x, y'' = 2e^{2x} + \left(x + \frac{5}{3}\right)e^x$,

把 y, y', y'' 代入方程 $y'' + ay' + by = ce^x$, 有

$$\left(2 + a + \frac{1}{2}b\right)e^{2x} + (1 + a + b)xe^x + \left(\frac{5}{3} + \frac{2}{3}a - \frac{1}{3}b\right)e^x = ce^x$$

$$\text{待定系数} \begin{cases} 2 + a + \frac{1}{2}b = 0, \\ 1 + a + b = 0, \\ \frac{5}{3} + \frac{2}{3}a - \frac{1}{3}b = c, \end{cases} \quad \text{得} \begin{cases} a = -3, \\ b = 2, \\ c = -1. \end{cases} \quad \text{因此应选(A).}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

【评注】 其实, 我们可看出齐次线性微分方程的特征根为 1 和 2, 非齐次线性微分方程的一个特解可为 $y = xe^x$, 进一步求得 a, b, c .

12 (2016, 16 题, 10 分) 设函数 $y(x)$ 满足方程 $y'' + 2y' + ky = 0$, 其中 $0 < k < 1$.

(I) 证明: 反常积分 $\int_0^{+\infty} y(x)dx$ 收敛;

(II) 若 $y(0) = 1, y'(0) = 1$, 求 $\int_0^{+\infty} y(x)dx$ 的值.

【解】 (I) $y'' + 2y' + ky = 0$ 的特征方程为 $r^2 + 2r + k = 0$, 其特征根为

$$r_1 = -1 - \sqrt{1-k}, r_2 = -1 + \sqrt{1-k}$$

均小于零, 故 $y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$.

$$\text{而} \int_0^{+\infty} y(x)dx = C_1 \frac{1}{r_1} e^{r_1 x} \Big|_0^{+\infty} + C_2 \frac{1}{r_2} e^{r_2 x} \Big|_0^{+\infty} = -\left(\frac{C_1}{r_1} + \frac{C_2}{r_2}\right),$$

所以 $\int_0^{+\infty} y(x)dx$ 收敛.

$$(II) \text{ 由 } y(0) = 1, y'(0) = 1, \text{ 得 } \begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ r_1 C_1 + r_2 C_2 = 1, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} C_1 = \frac{1-r_2}{r_1-r_2} = \frac{\sqrt{1-k}-2}{2\sqrt{1-k}}, \\ C_2 = \frac{r_1-1}{r_1-r_2} = \frac{\sqrt{1-k}+2}{2\sqrt{1-k}}, \end{cases}$$

$$\text{因此} \int_0^{+\infty} y(x)dx = -\left(\frac{C_1}{r_1} + \frac{C_2}{r_2}\right) = \frac{3}{k}.$$



13 (2017, 10 题, 4 分) 微分方程 $y'' + 2y' + 3y = 0$ 的通解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $e^{-x}(C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \sin \sqrt{2}x)$.

【解析】 对应的特征方程为 $r^2 + 2r + 3 = 0$, 解得 $r_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}i$,

故通解为 $y = e^{-x}(C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \sin \sqrt{2}x)$.

练习题

1. (2006, 数二, 4 分) 函数 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + x e^x$ 满足的一个微分方程是

(A) $y'' - y' - 2y = 3x e^x$.

(B) $y'' - y' - 2y = 3e^x$.

(C) $y'' + y' - 2y = 3x e^x$.

(D) $y'' + y' - 2y = 3e^x$.

2. (2010, 数二, 4 分) 三阶常系数线性齐次微分方程 $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$ 的通解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. (2011, 数二, 4 分) 微分方程 $y'' - \lambda^2 y = e^{\lambda x} + e^{-\lambda x} (\lambda > 0)$ 的特解形式为

(A) $a(e^{\lambda x} + e^{-\lambda x})$.

(B) $ax(e^{\lambda x} + e^{-\lambda x})$.

(C) $x(ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x})$.

(D) $x^2(ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x})$.

4. (2013, 数三, 4 分) 微分方程 $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0$ 的通解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

练习题参考答案

1. 【答案】 D.

【解析】 由所给解的形式, 可知原微分方程对应的齐次微分方程的特征根为

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$$

则对应的齐次微分方程的特征方程为 $(\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0$, 即 $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$.

故对应的齐次微分方程为

$$y'' + y' - 2y = 0$$

又 $y^* = x e^x$ 为原微分方程的一个特解, 而 $\lambda = 1$ 为特征单根, 故原非齐次线性微分方程右端的非齐次项应具有形式 $f(x) = C e^x$ (C 为常数). 所以综合比较四个选项, 应选(D).

【评注】 对于由常系数非齐次线性微分方程的通解反求微分方程的问题, 关键是要掌握对应齐次微分方程的特征根和对应特解的关系以及非齐次方程的特解形式.

2. 【答案】 $C_1 e^{2x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x$, (C_1, C_2, C_3 为任意常数).

【解析】 $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$ 的特征方程为 $\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$,
即 $(\lambda - 2)(\lambda^2 + 1) = 0$, 解得 $\lambda_1 = 2, \lambda_{2,3} = \pm i$, 所以通解为

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x, (C_1, C_2, C_3 \text{ 为任意常数})$$

【评注】 虽然此题是三阶微分方程, 但是属于考试大纲明确要求会的内容.

3.【答案】 C.

【解析】 $\pm\lambda$ 均是特征方程 $r^2 - \lambda^2 = 0$ 的根. 自由项为 $e^{\lambda x}$ 及 $e^{-\lambda x}$ 的特解形式分别为 $x(ae^{\lambda x})$ 及 $x(be^{-\lambda x})$, 所以微分方程 $y'' - \lambda^2 y = e^{\lambda x} + e^{-\lambda x} (\lambda > 0)$ 的特解形式为 $x(ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x})$. 因此应选(C).

【评注】 此题主要考查线性微分方程解的结构.

4.【答案】 $(C_1 + C_2 x)e^{\frac{1}{2}x}$, $(C_1, C_2$ 为任意常数).

【解析】 本题是二阶常系数齐次线性微分方程的求解问题, 先求出对应特征方程的根, 然后直接写出方程的通解.

方程 $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0$ 的特征方程为 $\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} = 0$, 解得两个根为 $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}$,

则所求的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{\frac{1}{2}x}$, 其中 C_1, C_2 为任意常数.

小结

1. 求二阶常系数非齐次线性微分方程的解的步骤:

- (1) 求特征方程的根.
- (2) 写出齐次线性微分方程的通解.
- (3) 求出非齐次线性微分方程的一个特解.
- (4) 写出非齐次线性微分方程的通解.

2. 对于高阶线性微分方程, 应掌握解的性质、叠加原理以及通解的结构.

3. 对于二阶常系数线性微分方程 $y'' + py' + qy = f(x)$, 应熟练掌握求通解的方法.

(1) 对于对应的齐次线性微分方程 $y'' + py' + qy = 0$, 会根据其特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的根的情况, 写出齐次线性微分方程的通解.

(2) 当自由项 $f(x)$ 为多项式函数、指数函数、三角函数以及它们的和、差、积所得的函数时, 应熟练掌握用待定系数法确定特解.

4. 对于二阶常系数齐次线性微分方程 $y'' + py' + qy = 0$, 函数 $Ae^{\alpha x}$ 是其解的充要条件为 $r = \alpha$ 是特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的根; 函数 $Ae^{\alpha x} \sin \beta x, Be^{\alpha x} \cos \beta x$ 或 $e^{\alpha x}(A \sin \beta x + B \cos \beta x)$ 是其解的充要条件为 $r = \alpha \pm \beta i$ 是特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的根. 利用以上结论, 可由方程的解, 确定其对应的特征方程的根, 从而得到特征方程及其对应的齐次微分方程.

5. 对于简单的高于二阶的常系数齐次线性微分方程, 应能根据其特征方程的根的情况, 写出其通解.



第二部分 线性代数

第一章 行列式

本章导读

历年来单纯考行列式的考题不多,分值也不高,相对重要的是抽象型行列式的计算,另一方面大家要注意如何通过行列式的计算来帮助回答矩阵、向量、方程组、特征值、二次型中的各种问题,即行列式的应用.

一、数字型行列式的计算

试题特点

对于数字型行列式的计算主要是用按行、按列展开公式,但在展开之前往往先运用行列式性质对其作恒等变形,以期某行或某列有较多的零元素,这时再展开可减轻计算量.同时,也要注意一些特殊公式,如上(下)三角、范德蒙行列式、拉普拉斯展开式的运用.

计算行列式时,一些常用的技巧有:把第一行的 k_i 倍加至第 i 行;把每行都加到第一行;逐行相加;...

1 (2014, 5 题, 4 分) 行列式
$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$$

(A) $(ad - bc)^2$.

(B) $-(ad - bc)^2$.

(C) $a^2 d^2 - b^2 c^2$.

(D) $b^2 c^2 - a^2 d^2$.

【答案】 B.

【解析】 数字型行列式, 有较多的 0 且有规律, 应当有拉普拉斯公式的构思.

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c & 0 & 0 & d \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & a & b & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & d & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & c \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d & c \\ b & a \end{vmatrix} = -(ad - bc)^2.$$

或按第 1 列展开, $D = aA_{21} + cA_{41} = -a \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & d & 0 \end{vmatrix}.$

2 (2015, 13 题, 4 分) n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $2(2^n - 1).$

【解析】 (方法一) (从第 1 行开始, 每一行的 $\frac{1}{2}$ 倍加到下一行)

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 + \frac{2}{2} \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & \frac{2+2^2}{2} \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & \frac{2+2^2+2^3}{2^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{2+2^2}{2} \\ 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \frac{2+2^2+2^3}{2^2} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 2 & \frac{2+2^2+\cdots+2^{n-1}}{2^{n-2}} & & & & \\ & \frac{2+2^2+\cdots+2^n}{2^{n-1}} & & & & \end{vmatrix}$$

$$= 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2(2^n - 1).$$

(方法二) (第 2 行开始, 每一行的 2 倍加到第一行)

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2^2 & 0 & \cdots & 0 & 2+2^2 \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2^3 & \cdots & 0 & 2+2^2+2^3 \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$



$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 2^{n-1} & 2+2^2+\cdots+2^{n-1} \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2+2^2+\cdots+2^n \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (2+2^2+\cdots+2^n)(-1)^{n+1} \cdot (-1)^{n-1} = 2(2^n-1).$$

(方法三) (用递推法) 按第 1 行展开, 建立递推公式, 有

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2D_{n-1} + 2(-1)^{n+1} \cdot (-1)^{n-1} = 2D_{n-1} + 2$$

$$D_n = 2D_{n-1} + 2 = 2(2D_{n-2} + 2) + 2 = 2^2D_{n-2} + 2 + 2^2$$

$$= 2^2(2D_{n-3} + 2) + 2 + 2^2 = 2^3D_{n-3} + 2 + 2^2 + 2^3$$

.....

$$= 2^{n-1}D_1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2(2^n-1).$$

$$\text{或 } D_n + 2 = 2(D_{n-1} + 2) = 2^2(D_{n-2} + 2) = \cdots = 2^{n-2}(D_2 + 2).$$

$$\text{又因 } D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6, \text{ 所以 } D_n + 2 = 2^{n-2} \cdot 8, \text{ 故 } D_n = 2^{n+1} - 2.$$

【评注】 本题难度系数 0.257.

3 (2016, 13 题, 4 分) 行列式 $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 4.$

【解析】 按第 1 列展开

$$D = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} + 4(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \end{vmatrix}$$



$$\begin{aligned}
 &= \lambda \left(\lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ \lambda & -1 \end{vmatrix} \right) + 4 \\
 &= \lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 4
 \end{aligned}$$

或用逐行相加

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ \lambda^2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ \lambda^2 & 0 & -1 & 0 \\ \lambda^3 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} & \lambda & -1 & 0 & 0 \\ & \lambda^2 & 0 & -1 & 0 \\ & \lambda^3 & 0 & 0 & -1 \\ 4+3\lambda+2\lambda^2+(\lambda+1)\lambda^3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
 &= (\lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 4) \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\
 &= \lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 4.
 \end{aligned}$$

4 (2020, 13 题, 4 分) 行列式

$$\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 $a^2(a^2 - 4)$.

【解析】 由行列式性质恒等变形, 例如把 2 行加到 1 行, 3 行加到 4 行, 再把 1 列的 -1 倍加到 2 列, 4 列的 -1 倍加到 3 列

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 2 & -1 \\ -1 & 2 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} \\
 &= a^2 \begin{vmatrix} a & 2 \\ 2 & a \end{vmatrix} = a^2(a^2 - 4)
 \end{aligned}$$

【评注】 基本计算题, 解法非常多, 也可每列都加到第 1 列, 再消 0, ...

练习题

(看看下面的计算)

1. (1999, 数二, 3 分) 记行列式 $\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$ 为 $f(x)$, 则方程 $f(x) = 0$



的根的个数为

(A)1.

(B)2.

(C)3.

(D)4.

2. (2000, 数四, 3 分) 设 $\alpha = (1, 0, -1)^T$, 矩阵 $A = \alpha\alpha^T$, n 为正整数, 则 $|aE - A^n| =$ _____.

3. (1997, 数四, 3 分) 设 n 阶矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

则 $|A| =$ _____.

练习题参考答案

1. 【答案】 B.

【解析】 问方程 $f(x) = 0$ 有几个根, 也就是问 $f(x)$ 是 x 的几次多项式. 将第 1 列的 -1 倍依次加至其余各列, 有

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{(2)+(4)} \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2x-2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-7 & -6 \end{vmatrix} = x(5x-5) \end{aligned}$$

可见由拉普拉斯展开式知 $f(x)$ 是 x 的 2 次多项式, 故应选 (B).

【评注】 由于行列式中各项均含有 x , 若直接展开是烦琐的, 故一定要先恒等变形; 更不要错误地认为 $f(x)$ 一定是 4 次多项式.

2. 【答案】 $a^2(a - 2^n)$.

【解析】 因为

$$A = \alpha\alpha^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} (1, 0, -1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 而 } \alpha^T\alpha = (1, 0, -1) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 2$$

则 $A^2 = (\alpha\alpha^T)(\alpha\alpha^T) = \alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T = 2\alpha\alpha^T = 2A$. 于是

$$A^n = 2^{n-1}A$$

那么

$$|aE - A^n| = |aE - 2^{n-1}A| = \begin{vmatrix} a - 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & a & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & a - 2^{n-1} \end{vmatrix} = a^2(a - 2^n)$$



【评注】 若对特征值熟练,由 $r(A) = 1$, 知 A 的特征值为 $2, 0, 0$. 那么, A^n 的特征值是 $2^n, 0, 0$. 从而 $aE - A^n$ 的特征值是 $a - 2^n, a, a$. 故 $|aE - A^n| = (a - 2^n)a^2$.

3. 【答案】 $(-1)^{n-1}(n-1)$.

【解析】 把第 $2, 3, \dots, n$ 各行均加至第 1 行, 则第 1 行为 $n-1$, 提取公因数 $n-1$ 后, 再把第 1 行的 -1 倍加至第 $2, 3, \dots, n$ 各行, 可化为上三角行列式. 即

$$|A| = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)$$

【评注】 除去用行列式性质及展开公式计算外, 你能利用特征值更简单地求出行列式 $|A|$ 的值吗?

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

二、抽象型行列式的计算

试题特点

对于抽象型行列式的计算, 有可能考查行列式性质的理解、运用, 有可能涉及矩阵的运算, 也可能用特征值、相似等处理. 这一类题目往往综合性强, 涉及知识点多. 因此, 考生复习时要注意知识的衔接与转换, 如果内在联系把握得好, 解题时的思路就灵活. 这一类题目计算量一般不会太大.

【5】(2013, 13 题, 4 分) 设 $A = (a_{ij})$ 是三阶非零矩阵, $|A|$ 为 A 的行列式, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 若 $a_{ij} + A_{ij} = 0 (i, j = 1, 2, 3)$, 则 $|A| =$ _____.

【答案】 -1 .

【解析】 由 $a_{ij} = -A_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$ 知 $A^T = -A^*$.

那么 $|A| = |A^T| = |-A^*| = (-1)^3 |A^*| = -|A|^2$,

即 $|A|(1 + |A|) = 0$, 故 $|A|$ 为 0 或 -1 .

又 A 是非零矩阵, 不妨设 $a_{11} \neq 0$. 于是

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = -(a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2) \neq 0$$

所以 $|A| = -1$.

【6】(2018, 13 题, 4 分) 设二阶矩阵 A 有两个不同特征值, α_1, α_2 是 A 的线性无关的特征向量, 且满足 $A^2(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2$, 则 $|A| =$ _____.

【答案】 -1 .



【解析】 设 $A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1, A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2, \lambda_1 \neq \lambda_2$, 由 $A^2(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2$ 有

$$\lambda_1^2\alpha_1 + \lambda_2^2\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_2, (\lambda_1^2 - 1)\alpha_1 + (\lambda_2^2 - 1)\alpha_2 = 0$$

因为 α_1, α_2 是不同特征值的特征向量, 必线性无关, 所以
$$\begin{cases} \lambda_1^2 - 1 = 0, \\ \lambda_2^2 - 1 = 0, \\ \lambda_1 \neq \lambda_2. \end{cases}$$

不妨设 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$, 故 $|A| = \lambda_1\lambda_2 = -1$.

练习题 (下面又选三道题再次提醒三种解法)

1. (1993, 数四, 3分) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ 都是四维列向量, 且四阶行列式 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1| = m$, $|\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3| = n$, 则四阶行列式 $|\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta_1 + \beta_2| =$

(A) $m + n$.

(B) $-(m + n)$.

(C) $n - m$.

(D) $m - n$.

2. (2003, 数二, 4分) 设三阶方阵 A, B 满足 $A^2B - A - B = E$, 其中 E 为三阶单位矩阵, 若 $A =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 则 } |B| = \underline{\hspace{2cm}}.$$

3. (2000, 数三, 3分) 若四阶矩阵 A 与 B 相似, 矩阵 A 的特征值为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, 则行列式 $|B^{-1} - E| = \underline{\hspace{2cm}}.$

练习题参考答案

1. 【答案】 C.

【解析】 利用行列式的性质, 有

$$\begin{aligned} |\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta_1 + \beta_2| &= |\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta_1| + |\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta_2| \\ &= -|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1| - |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2| \\ &= -m + |\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3| = n - m \end{aligned}$$

所以应选(C).

【评注】 作为抽象行列式, 本题主要考查用行列式的性质恒等变形, 化简求值.

2. 【答案】 $\frac{1}{2}$.

【解析】 由已知条件有 $(A^2 - E)B = A + E$, 即 $(A + E)(A - E)B = A + E$.

因为 $A + E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 知 $A + E$ 可逆. 故 $(A - E)B = E$.

两边取行列式, 并用行列式乘法公式, 有 $|A - E| \cdot |B| = 1$



$$\text{而 } |A - E| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2, \text{ 故 } |B| = \frac{1}{2}.$$

【评注】 本题考查的是利用矩阵的运算.

3. 【答案】 24.

【解析】 本题已知条件是特征值和相似, 而要求出行列式的值, 由于 $|A| = \prod \lambda_i$, 故应求出 $B^{-1} - E$ 的特征值.

由 $A \sim B$, 知 B 的特征值是 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$. 于 B^{-1} 的特征值是 2, 3, 4, 5. 那么 $B^{-1} - E$ 的特征值是 1, 2, 3, 4. 从而 $|B^{-1} - E| = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$.

三、行列式 $|A|$ 是否为零的判定

试题特点

常用的判断 $|A| = 0$ 是否为零的问题的思路有:

- ① 利用秩, 设法证 $r(A) < n$;
- ② 用齐次方程组 $Ax = 0$ 是否有非零解;
- ③ 据 $|A| = \prod \lambda_i$, 判断 0 是否是特征值;
- ④ 反证法;
- ⑤ 相反数 $|A| = -|A|$.

最近十年没有考这类题型.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



第二章 矩阵

本章导读

矩阵是线性代数的核心内容,矩阵的概念、运算及理论贯穿线性代数的始终.几乎年年都有单纯的矩阵知识的考题,而且其他考题也回避不了矩阵的知识,矩阵的重要性不言而喻.

二十多年来,矩阵的解答题考得很少,但复习时,对于填空与选择不要大意失荆州.

一、矩阵运算、初等变换

试题特点

试题简单、基本但容易失误.由于矩阵乘法没有交换律、没有消去律、有零因子,这和大家熟悉的算术运算有很大区别,试题往往就是考查这里的基本功,因此复习时对于矩阵的运算要正确、熟练,不要眼高手低、犯低级失误.

矩阵的初等行变换是左乘初等矩阵、矩阵的初等列变换是右乘初等矩阵,在这里要分清左乘、右乘,记住初等矩阵的逆矩阵.

1 (2011, 5 题, 4 分) 设 A 为三阶矩阵, 将 A 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 B , 再交换 B 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵. 记 $P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $A =$

(A) $P_1 P_2$.

(B) $P_1^{-1} P_2$.

(C) $P_2 P_1$.

(D) $P_2 P_1^{-1}$.

【答案】 D.

【解析】 本题是常规的也是基本的初等变换、初等矩阵的考题. 按题意

$$A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} B = E$$

即 $AP_1 = B, P_2 B = E$, 从而

$$P_2(AP_1) = E$$

故 $A = P_2^{-1} E P_1^{-1} = P_2 P_1^{-1}$.

即应选(D).

【评注】 搞清“左乘”和“右乘”, 记住初等矩阵逆矩阵的公式. 本题难度系数 0.796.



2 (2012, 6 题, 4 分) 设 A 为三阶矩阵, P 为三阶可逆矩阵, 且 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & & \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. 若 $P = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, $Q = [\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3]$, 则 $Q^{-1}AQ =$

- (A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. (C) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

【答案】 B.

【解析】 本题考查初等矩阵, 由于 P 经列变换(把第 2 列加至第 1 列)为 Q , 有

$$Q = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = PE_{21}(1)$$

那么 $Q^{-1}AQ = [PE_{21}(1)]^{-1}A[PE_{21}(1)]$

$$= E_{21}^{-1}(1)P^{-1}APE_{21}(1)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

【评注】 近十年没有出单纯矩阵运算的考题, 但早年考的一些题型应当复习.

3 (2020, 5 题, 4 分) 若矩阵 A 经初等列变换化成 B , 则

- (A) 存在矩阵 P , 使得 $PA = B$. (B) 存在矩阵 P , 使得 $BP = A$.
(C) 存在矩阵 P , 使得 $PB = A$. (D) 方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解.

【答案】 B.

【解析】 矩阵 A 经初等列变换得到 B , 故存在初等矩阵 $P_i (i = 1, 2, \dots, l)$ 使

$$AP_1P_2 \cdots P_l = B$$

因 P_i 均可逆, 故有 $A = BP_l^{-1} \cdots P_2^{-1}P_1^{-1}$, 记 $P = P_l^{-1} \cdots P_2^{-1}P_1^{-1}$, 故应选(B).

练习题

1. (2003, 数二, 4 分) 设 α 为三维列向量, α^T 是 α 的转置, 若 $\alpha\alpha^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $\alpha^T\alpha =$ _____.

2. (1999, 数三, 数四, 3 分) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 而 $n \geq 2$ 为正整数, 则 $A^n - 2A^{n-1} =$ _____.

3. (2004, 数四, 4 分) 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = P^{-1}AP$, 其中 P 为三阶可逆矩阵, 则 $B^{2004} =$ _____.



$$2A^2 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

练习题参考答案

1. 【答案】 3.

【解析】 设 $\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, 则

$$\alpha\alpha^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} (a_1, a_2, a_3) = \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ a_2 a_1 & a_2^2 & a_2 a_3 \\ a_3 a_1 & a_3 a_2 & a_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

而 $\alpha^T \alpha = (a_1, a_2, a_3) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$, 所以 $\alpha^T \alpha = 1 + 1 + 1 = 3$.

【评注】 本题 $\alpha\alpha^T$ 是秩为 1 的矩阵, $\alpha^T \alpha$ 是一个数, 这两个符号不要混淆. 且若 $A = \alpha\beta^T$, 其中 α, β 均为 n 维列向量, 则 $\alpha^T \beta = \beta^T \alpha = \sum a_{ii}$. (矩阵 A 主对角线元素之和).

2. 【答案】 O .

【解析】 由于 $A^n - 2A^{n-1} = (A - 2E)A^{n-1}$, 而

$$A - 2E = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

易见 $(A - 2E)A = O$, 从而 $A^n - 2A^{n-1} = O$.

【评注】 由于

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2A$$

利用数学归纳法也容易得出 $A^n - 2A^{n-1} = O$. 本题若用相似对角化的理论来求 A^n , 虽说可得到正确结论, 但烦琐.

3. 【答案】 $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

【解析】 本题考查 n 阶方阵方幂的运算. 由于

$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} A^n & O \\ O & B^n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a_1^n & & \\ & a_2^n & \\ & & a_3^n \end{bmatrix}$$



又 $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. 易见

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

从而 $A^{2004} = (A^2)^{1002} = E$. 那么

$$B^{2004} - 2A^2 = P^{-1}A^{2004}P - 2A^2 = P^{-1}EP - 2A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

【评注】 若 $P^{-1}AP = B$ 则 $P^{-1}A^nP = B^n$, 通过相似求 A^n 是求 A 的方幂的重要方法.

二、伴随矩阵、可逆矩阵

试题特点

伴随与可逆是矩阵中最重要的知识点, 关键公式:

$$AA^* = A^*A = |A|E$$

进而有 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$ 或 $A^* = |A|A^{-1}$. 涉及伴随与可逆的试题非常多, 要想到并灵活运用 $AA^* = A^*A = |A|E$ 这一核心公式.

☆ 定义法, 单位矩阵恒等变形, 可逆的充要条件都是重要的考点.

【4】(2009, 6 题, 4 分) 设 A, B 均为二阶方阵, A^*, B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵. 若 $|A| = 2, |B| = 3$, 则分块矩阵 $\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}$ 的伴随矩阵为

(A) $\begin{bmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{bmatrix}$. (C) $\begin{bmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{bmatrix}$.

【答案】 B.

【解析】 由 $\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{2 \times 2} |A| |B| = 6$, 知矩阵 $\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}$ 可逆, 那么

$$\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^* = \begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^{-1} = 6 \begin{bmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & 6B^{-1} \\ 6A^{-1} & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{bmatrix}$$

故应选 (B).

本题也可设 $\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}$, 那么由 $AA^* = |A|E$ 有

$$\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} \begin{bmatrix} E & O \\ O & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6E & O \\ O & 6E \end{bmatrix}$$



由 $AX_3 = 6E \Rightarrow X_3 = 6A^{-1} = 3A^*$

故应选(B).

(由题中 4 个选项可知必有 $X_1 = O, X_4 = O$, 只需检查 X_2 或 X_3 即可)

【评注】 本题考查的知识点有: $AA^* = |A|E$ 或 $A^* = |A|A^{-1}$ 或 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$; 行列式的拉普拉斯展开式; 分块矩阵的求逆公式. 这些都是线性代数的基本内容.
 本题难度系数 0.651.

5 (2017, 5 题, 4 分) 设 α 为 n 维单位列向量, E 为 n 阶单位矩阵, 则

(A) $E - \alpha\alpha^T$ 不可逆.

(B) $E + \alpha\alpha^T$ 不可逆.

(C) $E + 2\alpha\alpha^T$ 不可逆.

(D) $E - 2\alpha\alpha^T$ 不可逆.

【答案】 A.

【解析】 $A = \alpha\alpha^T$ 是秩为 1 的矩阵, 又 α 为单位列向量, 有 $\alpha^T\alpha = 1$.

故矩阵 A 的特征值为 $1, 0, \dots, 0$ ($n-1$ 个),

所以 $E - \alpha\alpha^T$ 的特征值为 $0, 1, \dots, 1$ ($n-1$ 个),

因此矩阵 $E - \alpha\alpha^T$ 不可逆. 应选(A).

练习题

(下面是一些考题, 希望你认真地做, 好好体会与把握处理伴随和可逆的思想方法)

1. (2000, 数二, 3 分) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{bmatrix}$, E 为四阶单位矩阵, 且 $B = (E + A)^{-1}(E -$

$A)$, 则 $(E + B)^{-1} =$ _____.

2. (1995, 数三、数四, 3 分) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, A^* 是 A 的伴随矩阵, 则 $(A^*)^{-1} =$ _____.

3. (1998, 数二, 3 分) 设 A 是任一 n ($n \geq 3$) 阶方阵, A^* 是其伴随矩阵, 又 k 为常数, 且 $k \neq 0, \pm 1$, 则必有 $(kA)^* =$

(A) kA^* .

(B) $k^{n-1}A^*$.

(C) k^nA^* .

(D) $k^{-1}A^*$.

4. (2002, 数四, 3 分) 设 A, B 为 n 阶矩阵, A^*, B^* 分别为 A, B 对应的伴随矩阵, 分块矩阵 $C =$

$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$, 则 C 的伴随矩阵 $C^* =$

(A) $\begin{bmatrix} |A|A^* & O \\ O & |B|B^* \end{bmatrix}$.

(B) $\begin{bmatrix} |B|B^* & O \\ O & |A|A^* \end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix} |A|B^* & O \\ O & |B|A^* \end{bmatrix}$.

(D) $\begin{bmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{bmatrix}$.

5. (2002, 数二, 6 分) 已知 A, B 为三阶矩阵, 且满足 $2A^{-1}B = B - 4E$, 其中 E 是三阶单位矩阵.

(I) 证明: 矩阵 $A - 2E$ 可逆;

(II) 若 $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 求矩阵 A .

6. (1997, 数三, 6 分; 数四, 7 分) 设 A 为 n 阶非奇异矩阵, α 为 n 维列向量, b 为常数, 记分块矩阵

$$P = \begin{bmatrix} E & 0 \\ -\alpha^T A^* & |A| \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & b \end{bmatrix}$$

其中 A^* 是矩阵 A 的伴随矩阵, E 为 n 阶单位矩阵.

(I) 计算并化简 PQ ;

(II) 证明矩阵 Q 可逆的充分必要条件是 $\alpha^T A^{-1} \alpha \neq b$.

7. (2003, 数三, 4 分) 设 n 维向量 $\alpha = (a, 0, \dots, 0, a)^T$, $a < 0$, E 为 n 阶单位矩阵. 矩阵 $A = E - \alpha\alpha^T$, $B = E + \frac{1}{a}\alpha\alpha^T$, 其中 A 的逆矩阵为 B , 则 $a =$ _____.

练习题参考答案

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

1. 【答案】 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$.

【解析】 虽可以由 A 先求出 $(E+A)^{-1}$, 再作矩阵乘法求出 B , 最后通过求逆得到 $(E+B)^{-1}$. 但这种方法计算量太大.

本题实际是考查单位矩阵恒等变形的技巧, 我们有

$$\begin{aligned} B+E &= (E+A)^{-1}(E-A)+E \\ &= (E+A)^{-1}[(E-A)+(E+A)] = 2(E+A)^{-1} \end{aligned}$$

所以

$$(E+B)^{-1} = [2(E+A)^{-1}]^{-1} = \frac{1}{2}(E+A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

或者, 由 $B = (E+A)^{-1}(E-A)$, 左乘 $E+A$ 得 $(E+A)B = E-A$. 所以

$$(E+A)B + (E+A) = E-A + E+A = 2E$$

即有

$$(E+A)(E+B) = 2E$$

【评注】 本题既综合又灵活, 这是考生失误较多的一道考题, 其解题思路方法值得好好体会.

2. 【答案】 $\frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.



【解析】 由 $AA^* = |A|E$ 有 $\frac{A}{|A|}A^* = E$, 故 $(A^*)^{-1} = \frac{A}{|A|}$. 因为 $|A| = 10$. 所以

$$(A^*)^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

3.【答案】 B.

【解析】 对任何 n 阶矩阵都要成立的关系式, 对特殊的 n 阶矩阵自然也要成立. 那么, 当 A 可逆时, 由 $A^* = |A|A^{-1}$ 有

$$(kA)^* = |kA|(kA)^{-1} = k^n |A| \cdot \frac{1}{k} A^{-1} = k^{n-1} A^*$$

故应选(B).

一般地, 若 $A = (a_{ij})$, 有 $kA = (ka_{ij})$, 那么矩阵 kA 的 i 行 j 列元素的代数余子式为

$$(kA)_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1,j-1} & ka_{1,j+1} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i-1,1} & \cdots & ka_{i-1,j-1} & ka_{i-1,j+1} & \cdots & ka_{i-1,n} \\ ka_{i+1,1} & \cdots & ka_{i+1,j-1} & ka_{i+1,j+1} & \cdots & ka_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{n1} & \cdots & ka_{n,j-1} & ka_{n,j+1} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{i+j} k^{n-1} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k^{n-1} A_{ij}$$

即 $|kA|$ 中每个元素的代数余子式恰好是 $|A|$ 相应元素的代数余子式的 k^{n-1} 倍, 因而, 按伴随矩阵的定义知 $(kA)^*$ 的元素是 A^* 对应元素的 k^{n-1} 倍.

4.【答案】 D.

【解析】 对任何 n 阶矩阵 A, B 关系式要成立, 那么 A, B 可逆时仍应成立, 故可看 A, B 可逆时 $C^* = ?$

由于

$$C^* = |C|C^{-1} = \begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^{-1} = |A||B| \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |B||A^* & O \\ O & |A||B^* \end{bmatrix}$$

所以应选(D).

作为选择题, 根据这四个选项, 也可如下判断:



设 $C^* = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}$, 由 $CC^* = |C|E$, 有

$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AX_1 & AX_2 \\ BX_3 & BX_4 \end{bmatrix} = |A| |B| \begin{bmatrix} E & O \\ O & E \end{bmatrix}$$

因为 $AX_1 = |A| |B| E \Rightarrow X_1 = |A| |B| A^{-1} = |B| A^*$. 故应选(D).

5.【解】 (I) 由 $2A^{-1}B = B - 4E$ 左乘 A 知 $AB - 2B - 4A = O$.

从而 $(A - 2E)(B - 4E) = 8E$, 或 $(A - 2E) \cdot \frac{1}{8}(B - 4E) = E$

故 $A - 2E$ 可逆, 且 $(A - 2E)^{-1} = \frac{1}{8}(B - 4E)$.

(II) 由(I)知 $A = 2E + 8(B - 4E)^{-1}$. 而

$$(B - 4E)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

故 $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

【评注】 如果只是想证明 $A - 2E$ 可逆, 那么由

$$AB - 2B - 4A = O \Rightarrow (A - 2E)B = 4A$$

因为 A 可逆, 知 $|4A| = 4^3 |A| \neq 0$. 故 $|A - 2E| \cdot |B| \neq 0$, 就可证出 $A - 2E$ 可逆.

6.【解】 (I) 由 $AA^* = A^*A = |A|E$ 及 $A^* = |A|A^{-1}$, 有

$$\begin{aligned} PQ &= \begin{bmatrix} E & 0 \\ -\alpha^T A^* & |A| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \alpha \\ -\alpha^T A^* A + |A| \alpha^T & -\alpha^T A^* \alpha + b |A| \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A & \alpha \\ 0 & |A| (b - \alpha^T A^{-1} \alpha) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(II) 用行列式拉普拉斯展开公式及行列式乘法公式, 有

$$|P| = \begin{vmatrix} E & 0 \\ -\alpha^T A^* & |A| \end{vmatrix} = |A|$$

$$|P| |Q| = |PQ| = \begin{vmatrix} A & \alpha \\ 0 & |A| (b - \alpha^T A^{-1} \alpha) \end{vmatrix} = |A|^2 (b - \alpha^T A^{-1} \alpha)$$

又因 A 可逆, $|A| \neq 0$, 故 $|Q| = |A| (b - \alpha^T A^{-1} \alpha)$.

由此可知 Q 可逆的充分必要条件是 $b - \alpha^T A^{-1} \alpha \neq 0$, 即 $\alpha^T A^{-1} \alpha \neq b$.

【评注】 本题考查分块矩阵的运算, 要把握住小块矩阵的左右位置. 要看清 $\alpha^T A^{-1} \alpha$ 是 1 阶矩阵, 是一个数.



7.【答案】 -1.

【解析】 按可逆定义,有 $AB = E$,即

$$(E - \alpha\alpha^T)\left(E + \frac{1}{a}\alpha\alpha^T\right) = E$$

所以

$$E + \frac{1}{a}\alpha\alpha^T - \alpha\alpha^T - \frac{1}{a}\alpha\alpha^T\alpha\alpha^T = E$$

$$\text{又 } \alpha^T\alpha = (a, 0, \dots, 0, a) \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ \vdots \\ a \end{bmatrix} = 2a^2, \text{ 有}$$

$$\left(\frac{1}{a} - 1 - 2a\right)\alpha\alpha^T = O$$

由 $\alpha\alpha^T \neq O$, 所以 $\frac{1}{a} - 1 - 2a = 0 \Rightarrow 2a^2 + a - 1 = 0$.

解得 $a = -1, a = \frac{1}{2}$ (舍去).

三、矩阵的秩

试题特点

矩阵的秩是重点也是难点,要正确理解矩阵秩的概念:

$r(A) = r \Leftrightarrow A$ 中有 r 阶子式不为 0, 每个 $r+1$ 阶子式(若还有)全为 0.

在这里要分清“有一个”与“每一个”, 当 $r(A) = r$ 时, A 中能否有 $r-1$ 阶子式为 0? 能否有 $r+1$ 阶子式不为 0?

你如何用行列式来描述 $r(A) \geq r$? 如何描述 $r(A) < r$?

要搞清矩阵的秩与向量组秩之间的关系, 这种转换是重要的. 在线性相关的判断与证明中往往是由矩阵的秩推导向量组的秩, 而解方程组时往往由相关、无关推导矩阵的秩.

经初等变换矩阵的秩不变, 这是求秩的最重要的方法, 有时可以把定义法与初等变换法相结合来分析推导矩阵的秩.

要会用 ① $|A|$ 是否为 0 ② 相关、无关 ③ 方程组的解其中的两个信息夹逼求出矩阵 A 的秩.

6 (2010, 5 题, 4 分) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times m$ 矩阵, E 为 m 阶单位矩阵. 若 $AB = E$, 则

(A) 秩 $r(A) = m$, 秩 $r(B) = m$.

(B) 秩 $r(A) = m$, 秩 $r(B) = n$.

(C) 秩 $r(A) = n$, 秩 $r(B) = m$.

(D) 秩 $r(A) = n$, 秩 $r(B) = n$.

【答案】 A.

【解析】 本题考的是矩阵秩的概念和公式.

因为 $AB = E$ 是 m 阶单位矩阵, 知 $r(AB) = m$.

又因 $r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$, 故

$$m \leq r(A), m \leq r(B) \quad ①$$

另一方面, A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, 又有

$$r(A) \leq m, r(B) \leq m \quad ②$$



比较①②得 $r(A) = m, r(B) = m$. 所以选(A).

【评注】 本题难度系数 0.564.

7 (2012, 13 题, 4 分) 设 α 为三维单位列向量, E 为三阶单位矩阵, 则矩阵 $E - \alpha\alpha^T$ 的秩为

【答案】 2.

【解析】 设 $\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, 则 $\alpha^T \alpha = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$, 又

$$A = \alpha\alpha^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} [a_1, a_2, a_3] = \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ a_2 a_1 & a_2^2 & a_2 a_3 \\ a_3 a_1 & a_3 a_2 & a_3^2 \end{bmatrix}$$

由于秩 $r(A) = 1$. 那么

$$|\lambda E - A| = \lambda^3 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\lambda^2 = \lambda^3 - \lambda^2$$

所以, 矩阵 A 的特征值为 $1, 0, 0$.

从而 $E - A$ 的特征值为 $0, 1, 1$.

又 $E - A$ 为对称矩阵, 故 $E - A \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

因此 $r(E - \alpha\alpha^T) = 2$.

8 (2018, 6 题, 4 分) 设 A, B 为 n 阶矩阵, 记 $r(X)$ 为矩阵 X 的秩, $(X \ Y)$ 表示分块矩阵, 则

(A) $r(A \ AB) = r(A)$.

(B) $r(A \ BA) = r(A)$.

(C) $r(A \ B) = \max\{r(A), r(B)\}$.

(D) $r(A \ B) = r(A^T \ B^T)$.

【答案】 A.

【解析】 记 $AB = C$, 对 A, C 按列分块有

$$[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n]$$

即 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表出. 由矩阵的秩就是列向量组的秩, 故

$$r(A, AB) = r(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \gamma_1, \dots, \gamma_n) = r(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = r(A)$$

所以选(A).

【评注】 如令 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,

可见 $(A, BA) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 其秩为 2, 而 $r(A) = 1$. 所以(B) 不正确.

如令 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $r(A, B) = r \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2$, 而 $r(A) = 1, r(B) = 1$,

知(C) 不正确. 此时 $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, r(A^T, B^T) = r \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1$. 知(D) 不正确.



练习题

1. (1998, 数二, 3 分) 设 $n(n \geq 3)$ 阶矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

若矩阵 A 的秩为 $n-1$, 则 a 必为

- (A) 1. (B) $\frac{1}{1-n}$. (C) -1. (D) $\frac{1}{n-1}$.

2. (2003, 数三, 4 分) 设三阶矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}$, 若 A 的伴随矩阵的秩等于 1, 则必有

- (A) $a = b$ 或 $a + 2b = 0$. (B) $a = b$ 或 $a + 2b \neq 0$.
(C) $a \neq b$ 且 $a + 2b = 0$. (D) $a \neq b$ 且 $a + 2b \neq 0$.

3. (2003, 数四, 4 分) 设矩阵 $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 已知矩阵 A 相似于 B , 则秩 $(A-2E)$ 与秩 $(A-E)$

之和等于

- (A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 5.

练习题参考答案

1. 【答案】 B.

【解析】 本题可用秩的概念: $|A| = 0$ 但有 $n-1$ 阶子式不为 0 来分析、推断, 由于

$$|A| = [(n-1)a+1] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix} = [(n-1)a+1](1-a)^{n-1}$$

由 $r(A) = n-1$ 知 $|A| = 0$, 故 a 取自于 $\frac{1}{1-n}$ 或 1. 显然 $a = 1$ 时,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

而 $r(A) = 1$ 不符合题意, 故应选 (B).



【评注】 因为 A 是实对称矩阵, 若特征值熟练, 亦可用相似来处理.

注意: $A = (1-a)E + \begin{bmatrix} a & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & a \end{bmatrix}$, 所以 A 的特征值: $(n-1)a+1, 1-a(n-1)$ 个)

$$\text{故 } A \sim \begin{bmatrix} (n-1)a+1 & & & \\ & 1-a & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1-a \end{bmatrix}.$$

4. 【答案】 C.

【解析】 已知矩阵 A 而需求是 $r(A^*)$, 故应以 $r(A^*)$ 公式为背景. 根据伴随矩阵 A^* 秩的关系式

$$r(A^*) = \begin{cases} n, & \text{若 } r(A) = n, \\ 1, & \text{若 } r(A) = n-1, \\ 0, & \text{若 } r(A) < n-1 \end{cases}$$

知 $r(A^*) = 1 \Leftrightarrow r(A) = 2$

若 $a = b$, 易见 $r(A) \leq 1$, 故可排除 (A)(B).

当 $a \neq b$ 时, A 中有二阶子式 $\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} \neq 0$, 若 $r(A) = 2$, 按定义只需 $|A| = 0$. 由于

$$|A| = \begin{vmatrix} a+2b & a+2b & a+2b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} = (a+2b)(a-b)^2$$

所以应选 (C).

3. 【答案】 C.

【解析】 若 $P^{-1}AP = B$, 则 $P^{-1}(A+kE)P = B+kE$, 即若 $A \sim B$, 则 $A+kE \sim B+kE$. 又因相似矩阵有相同的秩, 故

$$\begin{aligned} r(A-2E) + r(A-E) &= r(B-2E) + r(B-E) \\ &= r \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 4 \end{aligned}$$

故应选 (C).

【评注】 本题是考如 $A \sim B$, 则 $r(A) = r(B)$, 利用相似来处理矩阵的秩, 其中用到相似的性质: 如 $A \sim B$, 则 $A+kE \sim B+kE$.



四、矩阵方程

试题特点

解矩阵方程时,首先要根据矩阵的运算法则、性质把方程化简(特别要注意矩阵的乘法没有交换律),化简之后有三种形式:

$$AX = B; XA = B; AXB = C$$

对于前两个方程,若判断出 A 可逆,则有

$$X = A^{-1}B; X = BA^{-1}$$

对于第三个方程,若 A, B 均可逆,则有 $X = A^{-1}CB^{-1}$.

那么,再通过求逆等运算就可求出 X .

近十年未考矩阵方程,以往的考题请练习.

练习题

1. (1998, 数二, 5 分) 设 $(2E - C^{-1}B)A^T = C^{-1}$, 其中 E 是四阶单位矩阵, A^T 是四阶矩阵 A 的转置矩阵, 且 $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 求矩阵 A .

2. (2001, 数二, 6 分) 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 且矩阵 X 满足 $AXA + BXB =$

$AXB + BXA + E$, 其中 E 是三阶单位矩阵, 求 X .

3. (2005, 数四, 4 分) 设 A, B, C 均为 n 阶矩阵, E 为 n 阶单位矩阵, 若 $B = E + AB, C = A + CA$, 则 $B - C =$

- (A) E . (B) $-E$. (C) A . (D) $-A$.

4. (2015, 数二、数三, 11 分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$, 且 $A^3 = O$.

(I) 求 a 的值;

(II) 若矩阵 X 满足 $X - XA^2 - AX + AXA^2 = E$, 其中 E 为三阶单位矩阵, 求 X .

练习题参考答案

1. 【解】 用矩阵 C 左乘已知矩阵方程的两端, 有 $(2C - B)A^T = E$. 对上式两端取转置, 有 $A(2C^T - B^T) = E$. 因为 A 是四阶方阵, 故



$$A = (2C^T - B^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

2.【解】 化简矩阵方程,有

$$AX(A-B) + BX(B-A) = E, \text{ 即 } (A-B)X(A-B) = E$$

由于 $|A-B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, 所以矩阵 $A-B$ 可逆, 且 $(A-B)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. 于是

$$X = [(A-B)^{-1}]^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.【答案】 A.

【解析】 $B = E + AB \Rightarrow (E-A)B = E \Rightarrow B = (E-A)^{-1}$

$C = A + CA \Rightarrow C(E-A) = A \Rightarrow C = A(E-A)^{-1}$

那么

$$B - C = (E-A)^{-1} - A(E-A)^{-1} = (E-A)(E-A)^{-1} = E$$

故应选(A).

4.【解】 (I) 因为 $A^3 = O \Rightarrow |A^3| = 0 \Rightarrow |A| = 0$,

而 $|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3$,

所以 $a = 0$. 且知 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(II) 由 $X(E-A^2) - AX(E-A^2) = E$,

$\Rightarrow (E-A)X(E-A^2) = E, E-A, E-A^2$ 必可逆.

$$\begin{aligned} \text{于是 } X &= (E-A)^{-1}(E-A^2)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$



第三章 向量

本章导读

向量既是重点又是难点,由于向量的抽象性及逻辑推理上有较高的要求,同学们在复习时要迎难而上.

考研的重点首先是对线性相关、无关概念的理解与判断,要清楚选择、填空、证明各类题型的解题思路 and 技巧;其次,要把握线性表出问题的处理;第三,要理解向量组的极大线性无关组和向量组秩的概念,会推导和计算;第四,向量空间的相应概念.

一、向量的线性表出

试题特点

向量 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出 $\Leftrightarrow$ 方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_s\alpha_s = \beta$ 有解
 $\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta)$

☆ 如果已知向量的坐标,那就通过判断方程组是否有解来回答向量能否线性表出的问题,不仅要会一个向量 β 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出,还要会分析、讨论一个向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出的问题.

☆ 如果向量 β 的坐标是未知的,那就要能用秩、用概念以及相关的定理来推理、分析.

例 1 (2011, 20 题, 11 分) 设向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T, \alpha_2 = (0, 1, 1)^T, \alpha_3 = (1, 3, 5)^T$ 不能由向量组 $\beta_1 = (1, 1, 1)^T, \beta_2 = (1, 2, 3)^T, \beta_3 = (3, 4, a)^T$ 线性表示.

(I) 求 a 的值;

(II) 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

【解】 (I) 因为 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

那么 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 不能由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示 $\Leftrightarrow \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关. 即

$$|\beta_1, \beta_2, \beta_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a-3 \end{vmatrix} = a-5 = 0$$

所以 $a = 5$.

(II) 如果方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta_j (j = 1, 2, 3)$ 都有解, 即 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示. 因为现在的三个方程组系数矩阵是相同的, 故可拼在一起加减消元, 然后再独立地求解. 对



$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2, \beta_3]$ 作初等行变换, 有

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 3 & 5 \end{array} \right] &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right] &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & 2 & 1 & 5 \\ & 1 & & 4 & 2 & 10 \\ & & 1 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right] \end{aligned}$$

所以 $\beta_1 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 - \alpha_3$, $\beta_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2$, $\beta_3 = 5\alpha_1 + 10\alpha_2 - 2\alpha_3$.

【评注】 因为 4 个三维向量 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha$ 必线性相关, 所以若 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关, 那么 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 必可由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表出, 与题设矛盾, 故 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 一定相关, 由此亦可推出 $|\beta_1, \beta_2, \beta_3| = 0$.

本题已给出向量坐标故用解方程组的方法来处理. 下面的练习题中, 有两个题有向量坐标就解方程, 还有两个没有向量坐标, 就用概念、秩、定理来分析推导.

难度系数数一 0.657, 数二 0.627, 数三 0.630.

2 (2013, 5 题, 4 分) 设 A, B, C 均为 n 阶矩阵, 若 $AB = C$, 且 B 可逆, 则

- (A) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价.
- (B) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价.
- (C) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价.
- (D) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 B 的列向量组等价.

【答案】 B.

【解析】 对矩阵 A, C 分别按列分块, 记 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$, $C = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n]$.

由 $AB = C$ 有

$$[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n]$$

$$\text{又} \begin{cases} \gamma_1 = b_{11}\alpha_1 + b_{21}\alpha_2 + \cdots + b_{n1}\alpha_n, \\ \gamma_2 = b_{12}\alpha_1 + b_{22}\alpha_2 + \cdots + b_{n2}\alpha_n, \\ \vdots \\ \gamma_n = b_{1n}\alpha_1 + b_{2n}\alpha_2 + \cdots + b_{nn}\alpha_n, \end{cases}$$

即 C 的列向量组可以由 A 的列向量组线性表出.

因为 B 可逆, 有 $CB^{-1} = A$. 类似地, A 的列向量组也可由 C 的列向量组线性表出, 因此选 (B).

3 (2020, 6 题, 4 分) 已知直线 $L_1: \frac{x-a_2}{a_1} = \frac{y-b_2}{b_1} = \frac{z-c_2}{c_1}$ 与直线 $L_2: \frac{x-a_3}{a_2} = \frac{y-b_3}{b_2} = \frac{z-c_3}{c_2}$

相交于一点, 法向量 $\alpha_i = \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{bmatrix}$, $i = 1, 2, 3$. 则

- (A) α_1 可由 α_2, α_3 线性表示.
- (B) α_2 可由 α_1, α_3 线性表示.
- (C) α_3 可由 α_1, α_2 线性表示.
- (D) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

【答案】 C.



【解析】 由直线标准方程知 L_1, L_2 的方向向量分别是 $\alpha_1 = (a_1, b_1, c_1)^T, \alpha_2 = (a_2, b_2, c_2)^T$, 直线

L_1, L_2 分别经过 $A(a_2, b_2, c_2), B(a_3, b_3, c_3)$ 两点. 于是 L_1, L_2 交于一点 $\Leftrightarrow \begin{cases} |\alpha_1, \alpha_2, \overrightarrow{AB}| = 0 \\ \alpha_1, \alpha_2 \text{ 不平行} \end{cases}$, 即有

$$|\alpha_1, \alpha_2, \overrightarrow{AB}| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 - a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 - b_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 - c_2 \end{vmatrix} = |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = 0$$

于是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关且 α_1, α_2 线性无关.

从而 α_3 必可由 α_1, α_2 线性表示.

练习题

1. (1998, 数二, 8分) 已知 $\alpha_1 = (1, 4, 0, 2)^T, \alpha_2 = (2, 7, 1, 3)^T, \alpha_3 = (0, 1, -1, a)^T, \beta = (3, 10, b, 4)^T$, 问

(I) a, b 取何值时, β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出?

(II) a, b 取何值时, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出? 并写出此表示式.

2. (2003, 数四, 13分) 设有向量组(I): $\alpha_1 = (1, 0, 2)^T, \alpha_2 = (1, 1, 3)^T, \alpha_3 = (1, -1, a+2)^T$ 和向量组(II): $\beta_1 = (1, 2, a+3)^T, \beta_2 = (2, 1, a+6)^T, \beta_3 = (2, 1, a+4)^T$. 试问: 当 a 为何值时, 向量组(I)与(II)等价? 当 a 为何值时, 向量组(I)与(II)不等价?

3. (1998, 数四, 3分) 若向量组 α, β, γ 线性无关; α, β, δ 线性相关, 则

(A) α 必可由 β, γ, δ 线性表示.

(B) β 必不可由 α, γ, δ 线性表示.

(C) δ 必可由 α, β, γ 线性表示.

(D) δ 必不可由 α, β, γ 线性表示.

4. (1999, 数四, 3分) 设向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示, 但不能由向量组(I): $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$ 线性表示, 记向量组(II): $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}, \beta$, 则

(A) α_m 不能由(I)线性表示, 也不能由(II)线性表示.

(B) α_m 不能由(I)线性表示, 但可由(II)线性表示.

(C) α_m 可由(I)线性表示, 也可由(II)线性表示.

(D) α_m 可由(I)线性表示, 但不可由(II)线性表示.

练习题参考答案

1. 【分析】 本题已知向量的坐标, 故应当用讨论带参数的非齐次线性方程组是否有解的方法来回答.

【解】 设 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$. 对 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta]$ 作初等行变换有

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & -1 & a & -2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \end{array} \right]$$

所以

(I) 当 $b \neq 2$ 时, 线性方程组 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]x = \beta$ 无解, 此时 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.

(II) 当 $b = 2, a \neq 1$ 时, 线性方程组 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]x = \beta$ 有唯一解, 即

$$x = (x_1, x_2, x_3)^T = (-1, 2, 0)^T$$



于是 β 可唯一表示为 $\beta = -\alpha_1 + 2\alpha_2$.

当 $b = 2, a = 1$ 时, 线性方程组 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]x = \beta$ 有无穷多个解. 即

$$x = (x_1, x_2, x_3)^T = k(-2, 1, 1)^T + (3, 0, -2)^T$$

于是 $\beta = (-2k+3)\alpha_1 + k\alpha_2 + (k-2)\alpha_3, k$ 为任意常数.

【评注】 常规的基础题, 方法、思路应清晰, 计算不能出错, 讨论要全面、严谨.

2. **【分析】** 所谓向量组 (I) 与 (II) 等价, 即向量组 (I) 与 (II) 可以互相线性表出. 若方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$ 有解, 即 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出. 若对同一个 a , 三个方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta_i (i = 1, 2, 3)$ 均有解, 即向量组 (II) 可以由 (I) 线性表出.

【解】 设 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta_i (i = 1, 2, 3)$, 由于这三个方程组的系数矩阵一样, 故可拼成一个大的增广矩阵统一的加减消元. 对 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 : \beta_1, \beta_2, \beta_3]$ 作初等行变换, 有

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 : \beta_1, \beta_2, \beta_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & a+3 & a+6 & a+4 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & a+1 & a+2 & a \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & a-1 & a+1 & a-1 \end{array} \right]$$

(1) 当 $a \neq -1$ 时, 行列式 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = a+1 \neq 0$, 由克拉默法则, 知三个线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta_i (i = 1, 2, 3)$ 均有唯一解. 所以 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可由向量组 (I) 线性表出.

由于行列式

$$|\beta_1, \beta_2, \beta_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ a+3 & a+6 & a+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ a+3 & a+6 & -2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

故对任意的 a , 方程组 $x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 = \alpha_j (j = 1, 2, 3)$ 恒有唯一解, 即 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 总可由向量组 (II) 线性表出.

因此, 当 $a \neq -1$ 时, 向量组 (I) 与 (II) 等价.

(2) 当 $a = -1$ 时, 有

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 : \beta_1, \beta_2, \beta_3] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \end{array} \right]$$

由于秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1)$, 线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta_1$ 无解, 故向量 β_1 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示. 因此, 向量组 (I) 与 (II) 不等价.

3. **【答案】** C.

【解析】 由 α, β, γ 无关 $\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha, \beta \text{ 无关} \\ \alpha, \beta, \delta \text{ 相关} \end{array} \right\} \Rightarrow \delta \text{ 可由 } \alpha, \beta \text{ 线性表出} \Rightarrow \delta \text{ 可由 } \alpha, \beta, \gamma \text{ 线性表出}.$

或者, 用秩来分析, 推理:

α, β, γ 无关 $\Rightarrow r(\alpha, \beta, \gamma) = 3 \Rightarrow r(\alpha, \beta) = 2$,

α, β, δ 相关 $\Rightarrow r(\alpha, \beta, \delta) < 3$, 从而 $r(\alpha, \beta, \delta) = 2$, 那么

$$r(\alpha, \beta, \gamma) = r(\alpha, \beta, \delta, \gamma)$$



所以 δ 必可由 α, β, γ 线性表出. 选(C).

4.【答案】 B.

【解析】 因为 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示, 故可设

$$\beta = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m$$

由于 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$ 线性表示, 故上述表达式中必有 $k_m \neq 0$. 因此

$$\alpha_m = \frac{1}{k_m} (\beta - k_1 \alpha_1 - k_2 \alpha_2 - \dots - k_{m-1} \alpha_{m-1})$$

即 α_m 可由 (II) 线性表示, 可排除(A)(D).

若 α_m 可由 (I) 线性表示, 设 $\alpha_m = l_1 \alpha_1 + \dots + l_{m-1} \alpha_{m-1}$, 则

$$\beta = (k_1 + k_m l_1) \alpha_1 + (k_2 + k_m l_2) \alpha_2 + \dots + (k_{m-1} + k_m l_{m-1}) \alpha_{m-1}$$

与题设矛盾, 故应选(B).

【评注】 本题能否用秩来分析、推导?

提示: $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta)$,

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}) + 1 = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}, \beta)$$

二、向量组的线性相关和线性无关

试题特点

线性相关是难点之一, 也是历年考生在考试时丢分最多的一个考点.

如果存在不全为0的数组 $k_1, k_2, \dots, k_s$, 使 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_s \alpha_s = 0$ 成立, 则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关.

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \text{ 线性相关} \Leftrightarrow \text{齐次方程组} [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{bmatrix} = 0 \text{ 有非零解}$$

$$\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) < s$$

若使 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_s \alpha_s = 0$ 成立, 必有 $k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_s = 0$, 则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关.

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \text{ 线性无关} \Leftrightarrow \text{齐次方程组} [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{bmatrix} = 0 \text{ 只有零解}$$

$$\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = s.$$

☆ 证无关, 若用定义法就是设法证 $k_1 = 0, \dots, k_s = 0$; 若用秩, 就是设法证 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = s$ (这里就是要通过用矩阵秩的定理、公式转换推导出向量组秩的信息).



4 (2012, 5 题, 4 分) 设 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ c_2 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ c_3 \end{bmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ c_4 \end{bmatrix}$, 其中 c_1, c_2, c_3, c_4 为任

意常数, 则下列向量组线性相关的为

- (A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. (B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$. (C) $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$. (D) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

【答案】 C.

【解析】 n 个 n 维向量相关 $\Leftrightarrow |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| = 0$, 显然

$$|\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ c_1 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} = 0$$

所以 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 必线性相关.

5 (2014, 6 题, 4 分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为三维向量, 则对任意常数 k, l , 向量组 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关的

- (A) 必要非充分条件. (B) 充分非必要条件.
(C) 充分必要条件. (D) 既非充分也非必要条件.

【答案】 A.

【解析】 记 $\beta_1 = \alpha_1 + k\alpha_3, \beta_2 = \alpha_2 + l\alpha_3$, 则

$$[\beta_1, \beta_2] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ k & l \end{bmatrix}$$

若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 是三阶可逆矩阵, 故 $r(\beta_1, \beta_2) = r \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ k & l \end{bmatrix} = 2$, 即 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关.

反之, 设 α_1, α_2 线性无关, $\alpha_3 = 0$, 则对任意常数 k, l 必有 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关, 但 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

所以 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关的必要而非充分条件.

练习题

(这里的选择题、证明题能独立完成吗? 思路 and 技巧是什么?)

1. (2008, 数二, 数三, 10 分) 设 A 为三阶矩阵, α_1, α_2 为 A 的分别属于特征值 $-1, 1$ 的特征向量, 向量 α_3 满足 $A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$.

(I) 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关; (II) 令 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 求 $P^{-1}AP$.

2. (1996, 数三, 8 分) 设向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 是齐次方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系, 向量 β 不是方程组 $Ax = 0$ 的解即 $A\beta \neq 0$. 试证明: 向量组 $\beta, \beta + \alpha_1, \beta + \alpha_2, \dots, \beta + \alpha_t$ 线性无关.

3. (2001, 数四, 8 分) 设 $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})^T (i = 1, 2, \dots, r; r < n)$ 是 n 维实向量, 且 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关. 已知 $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ 是线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n = 0 \end{cases}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



的非零解向量. 试判断向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t, \beta$ 的线性相关性.

练习题参考答案

1. (I) 【证明】 由特征值特征向量定义有: $A\alpha_1 = -\alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_2$.

设 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$,

用 A 乘 ① 得: $-k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3(\alpha_2 + \alpha_3) = 0$.

① - ② 得: $2k_1\alpha_1 - k_3\alpha_2 = 0$.

因为 α_1, α_2 是矩阵 A 不同特征值的特征向量, α_1, α_2 线性无关, 所以 $k_1 = 0, k_3 = 0$.

代入 ① 有 $k_2\alpha_2 = 0$. 因为 α_2 是特征向量, $\alpha_2 \neq 0$, 故 $k_2 = 0$. 从而 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

(II) 【解】 由于 $A\alpha_1 = -\alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_2, A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$, 有

$$A[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [-\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所以

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. 【证明】 (方法一) (定义法) 若有一组数 $k, k_1, k_2, \dots, k_t$, 使得

$$k\beta + k_1(\beta + \alpha_1) + k_2(\beta + \alpha_2) + \dots + k_t(\beta + \alpha_t) = 0 \quad (1)$$

则因 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 是 $Ax = 0$ 的解, 知 $A\alpha_i = 0 (i = 1, 2, \dots, t)$, 用 A 左乘上式的两边, 有

$$(k + k_1 + k_2 + \dots + k_t)A\beta = 0$$

由于 $A\beta \neq 0$, 故

$$k + k_1 + k_2 + \dots + k_t = 0 \quad (2)$$

对(1)重新分组为 $(k + k_1 + \dots + k_t)\beta + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_t\alpha_t = 0$,

把(2)代入(3), 得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_t\alpha_t = 0$.

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 是基础解系, 它们线性无关, 故必有 $k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_t = 0$,

代入(2)式得 $k = 0$.

因此, 向量组 $\beta, \beta + \alpha_1, \dots, \beta + \alpha_t$ 线性无关.

(方法二) (用秩) 经初等变换向量组的秩不变. 把第 1 列的 -1 倍分别加至其余各列, 有

$$[\beta, \beta + \alpha_1, \beta + \alpha_2, \dots, \beta + \alpha_t] \rightarrow [\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t]$$

因此

$$r(\beta, \beta + \alpha_1, \dots, \beta + \alpha_t) = r(\beta, \alpha_1, \dots, \alpha_t)$$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 是基础解系, 它们是线性无关的, 秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t) = t$, 又 β 必不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 线性表出(否则 $A\beta = 0$), 故 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t, \beta) = t + 1$. 所以

$$r(\beta, \beta + \alpha_1, \beta + \alpha_2, \dots, \beta + \alpha_t) = t + 1$$

即向量组 $\beta, \beta + \alpha_1, \beta + \alpha_2, \dots, \beta + \alpha_t$ 线性无关.

【评注】 用定义法证线性无关时, 应当对

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_t\alpha_t = 0$$

作恒等变形, 常用技巧是“同乘”与“重组”, 本题这两个技巧都要用到.

另外, 用秩也是一种常见的方法.

3.【解】 设 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r + l\beta = 0$,

(1)

因为 β 为方程组的非零解,有

$$\begin{cases} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \cdots + a_{1n}b_n = 0, \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \cdots + a_{2n}b_n = 0, \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{r1}b_1 + a_{r2}b_2 + \cdots + a_{rn}b_n = 0 \end{cases}$$

即 $\beta \neq 0, \beta^T \alpha_1 = 0, \cdots, \beta^T \alpha_r = 0$.

用 β^T 左乘(1),并把 $\beta^T \alpha_i = 0$ 代入,得 $l\beta^T \beta = 0$.

因为 $\beta \neq 0$,有 $\beta^T \beta > 0$,故必有 $l = 0$.

从而(1)式为 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r = 0$,由于 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关,所以有

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0$$

因此向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta$ 线性无关.

【评注】 由于不清楚 β 是齐次方程组的解,即 $\beta^T \alpha_i = 0$.许多考生没想到本题应当用 β^T 左乘(1)式.

三、向量组的极大线性无关组与秩

试题特点

虽然单纯的极大无关组或向量组秩的考题很少,但是齐次方程组的基础解系实际上就是解向量的极大线性无关组,这在方程组求解和求特征向量时是回避不了的;向量空间的维数和基实际上就是向量组的秩和极大无关组概念在向量空间的延伸,所以复习时这里的概念、计算、证明仍然要认真对待.

6 (2017,13题,4分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为线性无关的3维列向量组,则向量组 $A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$ 的秩为_____.

【答案】 2.

【解析】 因 $[A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3] = A[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$,

又 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是三维线性无关列向量,所以 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 为三阶可逆矩阵.

故 $r(A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3) = r(A) = 2$.

练习题

1. (2006,数三、数四,13分) 设四维向量组 $\alpha_1 = (1+a, 1, 1, 1)^T, \alpha_2 = (2, 2+a, 2, 2)^T, \alpha_3 = (3, 3, 3+a, 3)^T, \alpha_4 = (4, 4, 4, 4+a)^T$, 问 a 为何值时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关? 当 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关时,求其一个极大线性无关组,并将其余向量用该极大线性无关组线性表出.

2. (1995,数三,9分) 已知向量组(I): $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; (II): $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$; (III): $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$. 如果



各向量组的秩分别为 $r(\text{I}) = r(\text{II}) = 3, r(\text{III}) = 4$. 证明向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4$ 的秩为 4.

3. (2000, 数二, 7 分) 已知向量组

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta_3 = \begin{bmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

与向量组

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ -7 \end{bmatrix}$$

具有相同的秩, 且 β_3 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 求 a, b 的值.

练习题参考答案

1. 【解】 对 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$ 作初等行变换(把第 n 行的 -1 倍分别加至每一行), 有

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] = \begin{bmatrix} 1+a & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+a & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+a & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1+a & 2 & 3 & 4 \\ -a & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

若 $a = 0$, 则秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关.

极大线性无关组 α_1 , 且 $\alpha_2 = 2\alpha_1, \alpha_3 = 3\alpha_1, \alpha_4 = 4\alpha_1$.

若 $a \neq 0$, 则有

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] \rightarrow \begin{bmatrix} 1+a & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a+10 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

当 $a = -10$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, 极大线性无关组 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, 且 $\alpha_1 = -\alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4$.

【评注】 当 $a = -10$ 时,

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B$$

显然, 矩阵 B 中第 2, 3, 4 列线性无关, 故我们可回答 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是极大线性无关组.

(注: 极大无关组答案不唯一), 在 B 中, 易见

$$(0, -1, -1, -1)^T = -(0, 1, 0, 0)^T - (0, 0, 1, 0)^T - (0, 0, 0, 1)^T$$

故可回答 $\alpha_1 = -\alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4$.

这样一种求极大线性无关组和回答线性表出的方法, 大家要掌握.

2. 【证明】 因为 $r(\text{I}) = r(\text{II}) = 3$, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 而 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, 因此 α_4 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 设为 $\alpha_4 = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3$.

若 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4(\alpha_5 - \alpha_4) = 0$, 即



$$(k_1 - l_1 k_4)\alpha_1 + (k_2 - l_2 k_4)\alpha_2 + (k_3 - l_3 k_4)\alpha_3 + k_4\alpha_5 = 0$$

由于 $r(\text{III}) = 4$, 即 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$ 线性无关, 故必有

$$\begin{cases} k_1 - l_1 k_4 = 0, \\ k_2 - l_2 k_4 = 0, \\ k_3 - l_3 k_4 = 0, \\ k_4 = 0 \end{cases}$$

解出 $k_4 = 0, k_3 = 0, k_2 = 0, k_1 = 0$. 于是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4$ 线性无关. 即其秩为 4.

【评注】 本题考查向量组秩的概念, 涉及到线性相关, 线性无关等概念以及线性相关性向量组秩之间的关系.

3. **【解】** 因 β_3 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 故线性方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 0 & 6 \\ -3 & 1 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

有解. 对增广矩阵施行初等行变换:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 9 & b \\ 2 & 0 & 6 & 1 \\ -3 & 1 & -7 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 9 & b \\ 0 & -6 & -12 & 1-2b \\ 0 & 10 & 20 & 3b \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 9 & b \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2b-1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3b}{10} - \frac{2b-1}{6} \end{array} \right].$$

由非齐次线性方程组有解的条件知 $\frac{3b}{10} - \frac{2b-1}{6} = 0$ 得 $b = 5$.

又 α_1 和 α_2 线性无关, $\alpha_3 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2$, 所以向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的秩为 2.

由题设知向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的秩也是 2, 从而 $\begin{vmatrix} 0 & a & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$, 解得 $a = 15$.

四、向量空间

试题特点

复习向量空间这部分内容时应了解向量空间、子空间、解空间、基底、维数、坐标等概念, 要了解基变换与坐标变换公式(在二次型化标准形中会用到), 应会求过渡矩阵, 要会线性无关向量组的施密特正交规范化方法, 由此可构造规范正交基.

不要混淆向量维数和空间维数的概念, 例如 $\alpha_1 = (1, 2, 3)^T, \alpha_2 = (2, 4, 5)^T$ 是三维向量(因为它们有 3 个分量), 但由 α_1, α_2 生成的空间 $L(\alpha_1, \alpha_2)$ 是 2 维的向量空间(因为 α_1, α_2 线性无关, 它们就是空间的基, 而基里有 2 个向量即空间是 2 维).

过渡矩阵的概念不要搞反, 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是三维向量空间的两组基, 且



$$\begin{cases} \beta_1 = c_{11}\alpha_1 + c_{21}\alpha_2 + c_{31}\alpha_3, \\ \beta_2 = c_{12}\alpha_1 + c_{22}\alpha_2 + c_{32}\alpha_3, \\ \beta_3 = c_{13}\alpha_1 + c_{23}\alpha_2 + c_{33}\alpha_3 \end{cases}$$

$$\text{即 } [\beta_1, \beta_2, \beta_3] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix},$$

则称 $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$ 为由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵.

7 (2009, 5 题, 4 分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是三维向量空间 $\mathbb{R}^3$ 的一组基, 则由基 $\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3$ 到基 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 的过渡矩阵为

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$

(B) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$

(C) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}.$

(D) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}.$

【答案】 A.

【解析】 本题考查过渡矩阵的概念, 用观察法易见

$$[\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1] = [\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

所以选(A)

【评注】 本题难度系数 0.665.

8 (2010, 13 题, 4 分) 设 $\alpha_1 = (1, 2, -1, 0)^T, \alpha_2 = (1, 1, 0, 2)^T, \alpha_3 = (2, 1, 1, a)^T$. 若由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 生成的向量空间的维数为 2, 则 $a =$ _____.

【答案】 6.

【解析】 本题考查向量空间及其维数的概念, 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 所生成的向量空间是 2 维, 亦即向量组的秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$.

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & a-6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由秩为 2, 知 $a = 6$.

【评注】 本题难度系数 0.816.



9 (2015, 20 题, 11 分) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一个基, $\beta_1 = 2\alpha_1 + 2k\alpha_3, \beta_2 = 2\alpha_2, \beta_3 = \alpha_1 + (k+1)\alpha_3$.

(I) 证明向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一个基;

(II) 当 k 为何值时, 存在非零向量 ξ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标相同? 并求所有的 ξ .

【解】 (I) 由已知有

$$\begin{aligned} [\beta_1, \beta_2, \beta_3] &= [2\alpha_1 + 2k\alpha_3, 2\alpha_2, \alpha_1 + (k+1)\alpha_3] \\ &= [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

因为 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2k & k+1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, 矩阵 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{bmatrix}$ 可逆,

所以 $r(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$, 即 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基.

(II) 设非零向量 ξ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下坐标相同, 为 $(x_1, x_2, x_3)^T$, 则

$$\begin{aligned} \xi &= x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 = [\beta_1, \beta_2, \beta_3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

因 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的基, 它们线性无关, ξ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下坐标唯一, 有

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{故} \begin{cases} x_1 + x_3 = 0, \\ x_2 = 0, \\ 2kx_1 + (k+1)x_3 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

由 $\xi \neq 0$ 知 x_1, x_2, x_3 不全为 0. 那么系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{vmatrix} = -k = 0$$

时方程组(1)有非零解, 所以 $k=0$ 时, 存在非零向量 ξ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下坐标相同.

由(1)解出: $x_1 = t, x_2 = 0, x_3 = -t$

故 $\xi = t\alpha_1 - t\alpha_3$ 在这两组基下有相同的坐标.

【评注】 本题难度系数 0.479.

10 (2019, 20 题, 11 分) 设向量组 $\alpha_1 = (1, 2, 1)^T, \alpha_2 = (1, 3, 2)^T, \alpha_3 = (1, a, 3)^T$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一组基, $\beta = (1, 1, 1)^T$, 在这组基下的坐标为 $(b, c, 1)^T$.

(I) 求 a, b, c 的值;

(II) 证明 $\alpha_2, \alpha_3, \beta$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一组基, 并求 $\alpha_2, \alpha_3, \beta$ 到 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的过渡矩阵.



【解】 (I) 因 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的基

$$|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 - a \neq 0$$

又 β 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下坐标为 $(b, c, 1)^T$, 即

$$b\alpha_1 + c\alpha_2 + \alpha_3 = \beta$$

$$\text{有} \begin{cases} b + c + 1 = 1 \\ 2b + 3c + a = 1 \\ b + 2c + 3 = 1 \end{cases}$$

解出 $a = 3, b = 2, c = -2$.

(II) 因为

$$|\alpha_2, \alpha_3, \beta| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$\alpha_2, \alpha_3, \beta$ 线性无关, 从而 $\alpha_2, \alpha_3, \beta$ 也是 $\mathbb{R}^3$ 的基.

由 $\beta = 2\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3$, 有

$$[\alpha_2, \alpha_3, \beta] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{于是} [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [\alpha_2, \alpha_3, \beta] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = [\alpha_2, \alpha_3, \beta] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

那么由基 $\alpha_2, \alpha_3, \beta$ 到基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的过渡矩阵

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

【评注】 如用过渡矩阵的概念, 由 $\beta = 2\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3$ 立有 $\alpha_1 = \alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_3 + \frac{1}{2}\beta$.

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [\alpha_2, \alpha_3, \beta] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

于是过渡矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 为所求, 这样处理更简单.

第四章 线性方程组

本章导读

线性方程组是否有解?若有解,那么一共有多少解?有解时怎样求出其所有的解?如何求齐次方程组的基础解系?

当给出具体的方程组时,如何加减消元化简(注意只用行变换)?如何求出所有的解(可能还涉及对一些参数的讨论)?

没有具体的方程组时,如何利用解的结构(注意对矩阵秩的推断)分析、推导出通解?

面对两个方程组,如何处理公共解或同解问题?

这一切都是大家在复习方程组时要认真对待的,方程组历年来都是考试的重点,比重大、分值高、解答题多,一定要好好复习.

一、齐次方程组、基础解系

试题特点

考查的主要定理是:

(1) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵,齐次方程组 $Ax = 0$ 有非零解 $\Leftrightarrow$ 秩 $r(A) < n$;

(2) 齐次方程组 $Ax = 0$ 如有非零解,则必有无穷多解,而线性无关的解向量个数为 $n - r(A)$.

☆ 求基础解系是重点、是关键.

$n - r(A)$ 既表示 $Ax = 0$ 线性无关解向量的个数,也表示方程组中自由变量的个数,如何确定自由变量?如何给自由变量赋值并求解,是基本功.

不论是 $Ax = 0$ 还是 $Ax = b$ 都要涉及求 $Ax = 0$ 的基础解系,这里的计算一定要过关(正确、熟练).

线性无关的证明题另一种出题方法就是证基础解系.

1 (2011, 6题, 4分) 设 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$ 是四阶矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵. 若 $(1, 0, 1, 0)^T$ 是方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系, 则 $A^*x = 0$ 的基础解系可为

- (A) α_1, α_3 . (B) α_1, α_2 . (C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. (D) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

【答案】 D.

【解析】 本题没有给出具体的方程组,因而求解应当由解的结构、由秩开始.

因为 $Ax = 0$ 只有 1 个线性无关的解,即 $n - r(A) = 1$, 从而 $r(A) = 3$. 那么



$$r(A^*) = 1 \Rightarrow n - r(A^*) = 4 - 1 = 3$$

故 $A^*x = 0$ 的基础解系中有 3 个线性无关的解, 可见选项(A)(B) 均错误.

再由 $A^*A = |A|E$, 及 $|A| = 0$, 有 $A^*A = O$, 知 A 的列向量全是 $A^*x = 0$ 的解, 而秩 $r(A) = 3$, 故 A 的列向量中必有 3 个线性无关.

$$\text{最后, 按 } A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0, \text{ 即 } [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0, \text{ 即 } \alpha_1 + \alpha_3 = 0,$$

说明 α_1, α_3 相关 $\Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 相关. 从而应选(D).

【评注】 不要忘记

$$r(A^*) = \begin{cases} n, & \text{若 } r(A) = n, \\ 1, & \text{若 } r(A) = n-1, \\ 0, & \text{若 } r(A) < n-1 \end{cases}$$

当没有具体的方程组时, 一定要有用解的结构, 用秩来分析、推导的构思.

本题难度系数 0.407.

下面的考题既涉及如何加减消元求基础解系也涉及到如何判断矩阵的秩和基础解系的证明.

2 (2019, 13 题, 4 分) 设 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 为 3 阶矩阵. 若 α_1, α_2 线性无关, 且 $\alpha_3 = -\alpha_1 + 2\alpha_2$, 则线性方程组 $Ax = 0$ 的通解为_____.

【答案】 $k(1, -2, 1)^T, k$ 为任意常数.

【解析】 考查抽象方程组求解, 由秩出发.

由 α_1, α_2 线性无关知 $r(A) \geq 2$. 又 $\alpha_3 = -\alpha_1 + 2\alpha_2$ 知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 有 $r(A) < 3$.

从而必有 $r(A) = 2$, 于是 $n - r(A) = 3 - 2 = 1$. $Ax = 0$ 的基础解系由 1 个非零向量构成.

$$\text{因 } \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \text{ 即 } A \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0,$$

从而 $Ax = 0$ 的通解为 $k(1, -2, 1)^T, k$ 是任意常数.

练习题

1. (2002, 数三, 8 分) 设齐次线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots + bx_n = 0, \\ bx_1 + ax_2 + bx_3 + \cdots + bx_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ bx_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots + ax_n = 0 \end{cases}$$

其中 $a \neq 0, b \neq 0, n \geq 2$. 试讨论 a, b 为何值时, 方程组仅有零解, 有无穷多组解? 在有无穷多组解时, 求出全部解, 并用基础解系表示全部解.



2. (2004, 数三, 4分) 设 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵 $A^* \neq O$, 若 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的互不相等的解, 则对应的齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系

- (A) 不存在. (B) 仅含一个非零解向量.
(C) 含有两个线性无关的解向量. (D) 含有三个线性无关的解向量.

练习题参考答案

1. 【分析】 这是 n 个未知数 n 个方程的齐次线性方程组, $Ax = 0$ 只有零解的充分必要条件是 $|A| \neq 0$, 故可从计算系数行列式入手.

【解】 方程组的系数行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = [a + (n-1)b](a-b)^{n-1}$$

(1) 当 $a \neq b$ 且 $a \neq (1-n)b$ 时, 方程组只有零解.

(2) 当 $a = b$ 时, 对系数矩阵作初等行变换, 有

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ a & a & a & \cdots & a \\ a & a & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

由于 $n - r(A) = n - 1$, 取自由变量为 $x_2, x_3, \dots, x_n$, 得到基础解系为:

$$\alpha_1 = (-1, 1, 0, \dots, 0)^T, \alpha_2 = (-1, 0, 1, \dots, 0)^T, \dots, \alpha_{n-1} = (-1, 0, 0, \dots, 1)^T$$

方程组的通解是: $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_{n-1}\alpha_{n-1}$, 其中 $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$ 为任意常数.

(3) 当 $a = (1-n)b$ 时, 对系数矩阵作初等行变换, 把第 1 行的 -1 倍分别加至每一行, 有

$$\begin{bmatrix} (1-n)b & b & b & \cdots & b & b \\ b & (1-n)b & b & \cdots & b & b \\ b & b & (1-n)b & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & (1-n)b & b \\ b & b & b & \cdots & b & (1-n)b \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} (1-n)b & b & b & \cdots & b & b \\ nb & -nb & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ nb & 0 & -nb & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ nb & 0 & 0 & \cdots & -nb & 0 \\ nb & 0 & 0 & \cdots & 0 & -nb \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix}$$



$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

由于 $r(A) = n-1$, 有 $n-r(A) = 1$, 即基础解系只有 1 个解向量, 取自由变量为 x_n , 则基础解系为 $\alpha = (1, 1, 1, \cdots, 1)^T$. 故通解为 $k\alpha$, (k 为任意常数).

2. 【答案】 B.

【解析】 因为 $\xi_1 \neq \xi_2$, 知 $\xi_1 - \xi_2$ 是 $Ax = 0$ 的非零解, 故秩 $r(A) < n$. 又因伴随矩阵 $A^* \neq O$, 说明有代数余子式 $A_{ij} \neq 0$, 即 $|A|$ 中有 $n-1$ 阶子式非零. 因此秩 $r(A) = n-1$. 那么 $n-r(A) = 1$, 即 $Ax = 0$ 的基础解系仅含有一个非零解向量. 应选(B).

二、非齐次方程组的求解

试题特点

记住解的结构

$$\alpha + k_1 \eta_1 + k_2 \eta_2 + \cdots + k_{n-r} \eta_{n-r}$$

其中 α 是 $Ax = b$ 的特解, $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$ 是 $Ax = 0$ 的基础解系.

往届考生在加减消元时计算错误较多(一定要多动手认真做); 讨论参数时不能丢三落四, 要严谨.

求 A 的秩、求特解、求基础解系、讨论参数是复习时要注意的知识点.

3 (2009, 20 题, 11 分) 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{bmatrix}, \xi_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

(I) 求满足 $A\xi_2 = \xi_1, A^2\xi_3 = \xi_1$ 的所有向量 ξ_2, ξ_3 ;

(II) 对(I)中的任意向量 ξ_2, ξ_3 , 证明 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关.

【分析】 本题的第(I)问, 实际是求方程组 $Ax = \xi_1$ 和 $A^2x = \xi_1$ 的解, 而且要求把通解写成向量的形式.

【解】 (I) 对增广矩阵 $(A \mid \xi_1)$ 作初等行变换:

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$



得到方程组 $Ax = \xi_1$ 的通解为 $(0, 0, 1)^T + k(-1, 1, -2)^T$, 从而 $\xi_2 = (-k, k, 1-2k)^T$, k 是任意常数.

由于 $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, 对 $A^2x = \xi_1$, 由增广矩阵作初等行变换, 有

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & -2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

得方程组通解 $x_1 = -\frac{1}{2} - u, x_2 = u, x_3 = v$, 即 $\xi_3 = \left(-\frac{1}{2} - u, u, v\right)^T$, 其中 u, v 为任意常数.

(II) 因为行列式

$$|\xi_1, \xi_2, \xi_3| = \begin{vmatrix} -1 & -k & -\frac{1}{2} - u \\ 1 & k & u \\ -2 & 1-2k & v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & k & u \\ -2 & 1-2k & v \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0,$$

所以对任意的 k, u, v , 恒有 $|\xi_1, \xi_2, \xi_3| \neq 0$, 即对任意的 ξ_2, ξ_3 , 恒有 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关.

【评注】 本题若能发现 $A\xi_1 = 0$, 那么 (II) 也可用定义法来处理:

(II) 证法 2 由题设可得 $A\xi_1 = 0$. 设存在数 k_1, k_2, k_3 , 使得

$$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3 = 0 \quad ①$$

等式两端左乘 A , 得

$$k_2A\xi_2 + k_3A\xi_3 = 0$$

$$\text{即} \quad k_2\xi_1 + k_3A\xi_3 = 0 \quad ②$$

等式两端再左乘 A , 得

$$k_3A^2\xi_3 = 0$$

$$\text{即} \quad k_3\xi_1 = 0, \text{ 又 } \xi_1 \neq 0$$

于是 $k_3 = 0$ 代入 ② 式, 得 $k_2\xi_1 = 0$, 故 $k_2 = 0$. 将 $k_2 = k_3 = 0$ 代入 ① 式, 可得 $k_1 = 0$, 从而 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关.

本题难度系数数一 0.356, 数二 0.366, 数三 0.378, 不应当是难题吧, 是不是复习出问题了?

4 (2010, 20 题, 11 分) 设 $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. 已知线性方程组 $Ax = b$ 存在 2 个不同的解,

(I) 求 λ, a ;

(II) 求方程组 $Ax = b$ 的通解.

【解】 (I) 因为方程组 $Ax = b$ 有 2 个不同的解, 所以 $r(A) = r(\bar{A}) < 3$,

$$\text{解得 } |A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1) \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-1)^2 = 0,$$



知 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = -1$,

当 $\lambda = 1$ 时,

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

显然 $r(A) = 1, r(\bar{A}) = 2$, 此时方程组无解, $\lambda = 1$ 舍去.

当 $\lambda = -1$ 时, 对 $Ax = b$ 的增广矩阵施以初等行变换:

$$(A, b) = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & a+2 \end{array} \right]$$

因为 $Ax = b$ 有解, 所以 $a = -2$.

(II) 当 $\lambda = -1, a = -2$ 时,

$$\bar{A} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

所以 $Ax = b$ 的通解为

$$x = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ 其中 } k \text{ 为任意常数}$$

【评注】 本题难度系数数一 0.662, 数二 0.592, 数三 0.627.

5 (2012, 20 题, 11 分) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$

(I) 计算行列式 $|A|$;

(II) 当实数 a 为何值时, 方程组 $Ax = \beta$ 有无穷多解? 并求其通解.

【解】 (I) 按第一列展开,

$$|A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + a(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = 1 - a^4$$

(II) 当 $|A| = 0$ 时, 方程组 $Ax = \beta$ 有可能有无穷多解, 由 (I) 知 $a = 1$ 或 -1 .

(1) 如果 $a = 1$,



$$(A:\beta) = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right]$$

于是 $r(A) \neq r(A:\beta)$, 故方程组 $Ax = \beta$ 无解, 舍去.

(2) 当 $a = -1$ 时,

$$(A:\beta) = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

于是 $r(A) = r(A:\beta) = 3 < 4$. 故方程组 $Ax = \beta$ 有无穷多解, 取 x_4 为自由变量, 得方程组通解为 $x = (0, -1, 0, 0)^T + k(1, 1, 1, 1)^T$, k 为任意常数

【评注】 难度系数 0.654, 0.620, 0.628.

6 (2013, 20 题, 11 分) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix}$, 当 a, b 为何值时, 存在矩阵 C 使得 $AC - CA = B$, 并求所有矩阵 C .

【解】 设 $C = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$. 那么 $AC - CA = B$, 则

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_1 + ax_3 & x_2 + ax_4 \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 + ax_2 & ax_1 \\ x_3 + x_4 & ax_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{即得方程组} \begin{cases} -x_2 + ax_3 = 0, \\ -ax_1 + x_2 + ax_4 = 1, \\ x_1 - x_3 - x_4 = 1, \\ x_2 - ax_3 = b, \end{cases}$$

对增广矩阵作初等行变换, 有

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{array} \right]$$

当 $a \neq -1$ 或 $b \neq 0$ 时, 方程组无解.

当 $a = -1$, 且 $b = 0$ 时, 方程组有解. 此时有在矩阵 C 满足 $AC - CA = B$.

由于方程组的通解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, k_1, k_2 \text{ 为任意实数}$$



故当且仅当 $a = -1, b = 0$ 时, 存在矩阵

$$C = \begin{bmatrix} 1+k_1+k_2 & -k_1 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

满足 $AC - CA = B$.

【评注】 这是当年考的比较差的一道题, 难度系数 0.368, 0.389, 0.460, 计算上失误非常严重, 希望大家复习时要重视基本计算.

7 (2014, 20 题, 11 分) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, E 为三阶单位矩阵.

(I) 求方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系;

(II) 求满足 $AB = E$ 的所有矩阵 B .

【分析】 (I) 是基础题, 化为行最简即可.

关于 (II) 中矩阵 B , 其实就是 $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 三个方程组的求解问题.

【解】 (I) 对矩阵 A 作初等行变换, 得

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

因 $n - r(A) = 4 - 3 = 1$, 令 $x_4 = 1$ 求出 $x_3 = 3, x_2 = 2, x_1 = -1$,
故基础解系为 $\eta = (-1, 2, 3, 1)^T$.

(II) $AB = E$ 中 B 的列向量其实是三个非齐次线性方程组

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

的解. 由于这三个方程组的系数矩阵是相同的, 所以令 $\bar{A} = (A : E)$ 作初等行变换:

$$\begin{aligned} \bar{A} = (A : E) &= \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 5 & 4 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

由此得三个方程组的通解:

$$(2, -1, -1, 0)^T + k_1 \eta, k_1 \text{ 为任意常数}$$



$(6, -3, -4, 0)^T + k_2 \eta, k_2$ 为任意常数

$(-1, 1, 1, 0)^T + k_3 \eta, k_3$ 为任意常数

故所求矩阵为 $B = \begin{bmatrix} 2-k_1 & 6-k_2 & -1-k_3 \\ -1+2k_1 & -3+2k_2 & 1+2k_3 \\ -1+3k_1 & -4+3k_2 & 1+3k_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}, k_1, k_2, k_3$ 为任意常数.

【评注】 本题难度系数 0.445, 0.416, 0.436.

8 (2015, 5 题, 4 分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \end{bmatrix}$, 若集合 $\Omega = \{1, 2\}$, 则线性方程组

$Ax = b$ 有无穷多解的充分必要条件为

(A) $a \notin \Omega, d \notin \Omega$. (B) $a \notin \Omega, d \in \Omega$. (C) $a \in \Omega, d \notin \Omega$. (D) $a \in \Omega, d \in \Omega$.

【答案】 D.

【解析】 $Ax = b$ 有无穷解 $\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) < n$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & d \\ 1 & 4 & a^2 & d^2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & d-1 \\ 0 & 3 & a^2-1 & d^2-1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & d-1 \\ 0 & 0 & a^2-3a+2 & d^2-3d+2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a^2-3a+2=0, \\ d^2-3d+2=0, \end{cases} \Leftrightarrow a \in \Omega, d \in \Omega$$

或 $Ax = b$ 有无穷解的必要条件 $|A| = 0$.

$$\text{由 } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{vmatrix} = (a-1)(a-2) = 0, a = 1 \text{ 或 } 2.$$

再分情况判断 $Ax = b$ 是否有无穷解. 亦有(D).

9 (2016, 20 题, 11 分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & a \\ -a-1 & -2 \end{bmatrix}$.

当 a 为何值时, 方程 $AX = B$ 无解、有唯一解、有无穷多解? 在有解时, 求解此方程.

【解】 对 $(A : B)$ 作初等行变换

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & a & 1 & 1 & a \\ -1 & 1 & a & -a-1 & -2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & a+2 & 3 & -3 & a-4 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a & 0 \end{array} \right]$$

当 $a = -2$ 时, $r(A) = 2, r(A : B) = 3$, 方程组无解.

当 $a \neq 1$ 且 $a \neq -2$ 时, 有唯一解

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & a+2 & 3 & -3 & a-4 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & a+2 & 3 & -3 & a-4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right]$$



$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & a+2 & 0 & 0 & a-4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{a-4}{a+2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{3a}{a+2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{a-4}{a+2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

由两个方程组分别解出

$$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = -1$$

和

$$x_1 = \frac{3a}{a+2}, x_2 = \frac{a-4}{a+2}, x_3 = 0$$

$$\text{故 } X = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3a}{a+2} \\ 0 & \frac{a-4}{a+2} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

当 $a = 1$ 时,

$$\text{由 } \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

分别解出两个方程组的解

$$x_1 = (1, -1, 0)^T + k_1(0, -1, 1)^T$$

$$x_2 = (1, -1, 0)^T + k_2(0, -1, 1)^T$$

故 $AX = B$ 有无穷多解, 且 $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -k_1-1 & -k_2-1 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix}$, k_1, k_2 是任意常数.

【评注】 本题难度系数 0.468.

10 (2017, 20 题, 11 分) 设三阶矩阵 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 有 3 个不同的特征值, 且 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$.

(I) 证明 $r(A) = 2$;

(II) 若 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, 求方程组 $Ax = \beta$ 的通解.

【解】 (I) 由 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$ 知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 故 $|A| = 0, \lambda = 0$ 是 A 的特征值. 又 A 有 3 个不同的特征值, 设为 $\lambda_1, \lambda_2, 0$ (其中 λ_1, λ_2 不为 0)

那么 $A \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$, 所以 $r(A) = r(\Lambda) = 2$.

(II) 由 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$ 有 $\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0$, 那么

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0$$



即 $[1, 2, -1]^T$ 是 $Ax = 0$ 的解.

$$\text{又 } A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \beta$$

即 $[1, 1, 1]^T$ 是 $Ax = \beta$ 的解.

由 $r(A) = 2$, 按解的结构知 $Ax = \beta$ 的通解为 $x = [1, 1, 1]^T + k[1, 2, -1]^T$, k 为任意常数.

【评注】 本题难度系数 0.536, 0.422, 0.445.

III (2018, 21 题, 11 分) 已知 a 是常数, 且矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{bmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $B =$

$$\begin{bmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(I) 求 a ;

(II) 求满足 $AP = B$ 的可逆矩阵 P .

【解】 (I) 矩阵 A 经列变换得矩阵 B , 即 A 和 B 等价, 矩阵 A 和 B 等价 $\Leftrightarrow r(A) = r(B)$.

$$\text{由 } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \end{vmatrix} = 0, \forall a, \text{ 恒有 } r(A) = 2.$$

$$\text{又 } |B| = \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - a, B \text{ 中有 2 阶子式 } \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

$r(B) = 2 \Leftrightarrow |B| = 0 \Leftrightarrow a = 2$, 所以 $a = 2$.

(II) 满足 $AP = B$ 的 P 就是 $AX = B$ 的解.

$$[A : B] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & -2 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 6 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

解方程组, 得

$$A \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0, A \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, A \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{故 } AX = B \text{ 的解为 } X = \begin{bmatrix} 3-6k_1 & 4-6k_2 & 4-6k_3 \\ -1+2k_1 & -1+2k_2 & -1+2k_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}, \text{ 其中 } k_1, k_2, k_3 \text{ 为任意常数.}$$

$$\text{由 } |X| = \begin{vmatrix} 3-6k_1 & 4-6k_2 & 4-6k_3 \\ -1+2k_1 & -1+2k_2 & -1+2k_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{vmatrix} = k_3 - k_2 \neq 0.$$



所以满足 $AP = B$ 的所有可逆矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 3-6k_1 & 4-6k_2 & 4-6k_3 \\ -1+2k_1 & -1+2k_2 & -1+2k_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}, \text{其中 } k_2 \neq k_3$$

【评注】 本题难度系数 0.463, 0.397, 0.450.

12 (2019, 6 题, 4 分) 如图所示, 有 3 张平面两两相交, 交线相互平行, 它们的方程

$$a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z = d_i (i = 1, 2, 3)$$

组成的线性方程组的系数矩阵和增广矩阵分别记为 $A, \bar{A}$, 则

(A) $r(A) = 2, r(\bar{A}) = 3$.

(B) $r(A) = 2, r(\bar{A}) = 2$.

(C) $r(A) = 1, r(\bar{A}) = 2$.

(D) $r(A) = 1, r(\bar{A}) = 1$.

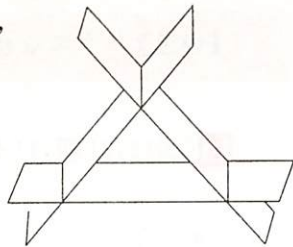
【答案】 A

【解析】 三个平面两两相交, 没有公共交点, 即方程组无解, 从而 $r(A) \neq r(\bar{A})$.

排除(B)(D).

又因 3 个平面互相不平行, 法向量互不平行(但共面), 从而 $r(A) = 2$. 应选(A).

至于(C) $r(A) = 1$, 意味三个平面的法向量共线, 三个平面平行(最多可有两个重合).



练习题

1. (1997, 数四, 3 分) 非齐次线性方程组 $Ax = b$ 中未知量个数为 n , 方程个数为 m , 系数矩阵 A 的秩为 r , 则

(A) $r = m$ 时, 方程组 $Ax = b$ 有解.

(B) $r = n$ 时, 方程组 $Ax = b$ 有唯一解.

(C) $m = n$ 时, 方程组 $Ax = b$ 有唯一解.

(D) $r < n$ 时, 方程组 $Ax = b$ 有无穷多解.

2. (2001, 数三, 3 分) 设 A 是 n 阶矩阵, α 是 n 维列向量, 若秩 $\begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{bmatrix} = \text{秩}(A)$, 则线性方程组

(A) $Ax = \alpha$ 必有无穷多解.

(B) $Ax = \alpha$ 必有唯一解.

(C) $\begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$ 仅有零解.

(D) $\begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$ 必有非零解.

3. (2004, 数四, 13 分) 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 & + \lambda x_2 & + \mu x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 & + x_2 & + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + (2 + \lambda)x_2 + (4 + \mu)x_3 + 4x_4 = 1, \end{cases}$$

已知 $(1, -1, 1, -1)^T$ 是该方程组的一个解. 试求

(I) 方程组的全部解, 并用对应的齐次方程组的基础解系表示全部解;

(II) 该方程组满足 $x_2 = x_3$ 的全部解.



4. (2000, 数二, 6分) 设 $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$, $\gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$, $A = \alpha\beta^T$, $B = \beta^T\alpha$.

其中 β^T 是 β 的转置, 求解方程 $2B^2A^2x = A^4x + B^4x + \gamma$.

练习题参考答案

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

1. 【答案】 A.

【解析】 因为 A 是 $m \times n$ 矩阵, 若秩 $r(A) = m$, 则 $m = r(A) \leq r(A, b) \leq m$. 于是 $r(A) = r(A, b)$. 故方程组有解, 即应选(A).

或, 由 $r(A) = m$, 知 A 的行向量组线性无关, 那么其延伸必线性无关, 故增广矩阵 (A, b) 的 m 个行向量也是线性无关的. 亦知 $r(A) = r(A, b)$.

关于(B)(D) 不正确的原因是: 由 $r(A) = n$ 不能推导出 $r(A, b) = n$ (注意 A 是 $m \times n$ 矩阵, m 可能大于 n), 由 $r(A) = r$ 亦不能推导出 $r(A, b) = r$, 你能否各举一个简单的例子?

至于(C), 由克拉默法则, $r(A) = n$ 时才有唯一解, 而现在的条件是 $r(A) = r$, 因此(C) 不正确.

本题答对的同学仅 40%, 一是由 $r(A) = m$ 不会分析出 $r(A, b) = m$, 一是由 $r(A) = n$ 误认为必有 $r(\bar{A}) = n$.

2. 【答案】 D.

【解析】 因为“ $Ax = 0$ 仅有零解”与“ $Ax = 0$ 必有非零解”这两个命题必然是一对一错, 不可能两个命题同时正确, 也不可能两个命题同时错误. 所以本题应当从(C) 或(D) 入手. 其中必有一个是正确的.

由于 $\begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{bmatrix}$ 是 $n+1$ 阶矩阵, A 是 n 阶矩阵, 故必有 $r\begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{bmatrix} = r(A) \leq n < n+1$. 故选(D).

3. 【解】 将 $(1, -1, 1, -1)^T$ 代入方程组, 得 $\lambda = \mu$. 对增广矩阵作初等行变换, 有

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda & \lambda & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2+\lambda & 4+\lambda & 4 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-2\lambda & 1-2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-2\lambda & 4-2\lambda & 1 & 1 \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-2\lambda & 1-2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4\lambda-2 & 2\lambda-1 & 2\lambda-1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$(I) \text{ 当 } \lambda = \frac{1}{2} \text{ 时, } \bar{A} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

因 $r(A) = r(\bar{A}) = 2 < 4$, 方程组有无穷多解, 其全部解为

$$x = (1, -1, 1, -1)^T + k_1(1, -3, 1, 0)^T + k_2\left(-\frac{1}{2}, -1, 0, 1\right)^T, \text{ 其中 } k_1, k_2 \text{ 为任意常数.}$$



$$\text{当 } \lambda \neq \frac{1}{2} \text{ 时, } \bar{A} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \lambda & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

因 $r(A) = r(\bar{A}) = 3 < 4$, 方程组有无穷多解, 其全部解为

$$x = (1, -1, 1, -1)^T + k(2, -1, 1, -2)^T, \text{ 其中 } k \text{ 为任意常数}$$

(II) 当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时, 若 $x_2 = x_3$, 由方程组的通解, 有

$$-1 - 3k_1 - k_2 = 1 + k_1$$

知 $k_2 = -2 - 4k_1$.

将其代入整理, 得全部解为

$$x_1 = 2 + 3k_1, x_2 = 1 + k_1, x_3 = 1 + k_1, x_4 = -3 - 4k_1$$

或 $x = (2, 1, 1, -3)^T + k_1(3, 1, 1, -4)^T$, 其中 k_1 为任意常数.

当 $\lambda \neq \frac{1}{2}$ 时, $x_2 = x_3$ 知 $-1 - k = 1 + k$, 即 $k = -1$. 从而只有唯一解 $(-1, 0, 0, 1)^T$.

4. 【解】 $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, \frac{1}{2}, 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1, \frac{1}{2}, 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2.$

又 $A^2 = (\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T) = \alpha(\beta^T\alpha)\beta^T = 2A$, 所以

$$A^4 = 2^3 A = 8A$$

代入原方程, 得

$$16Ax = 8Ax + 16x + \gamma$$

即 $8(A - 2E)x = \gamma$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -2 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

所以 $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, k \text{ 为任意常数.}$

三、公共解与同解

试题特点

如果已知两个方程组(I)和(II), 那么将其联立 $\begin{cases} \text{(I)} \\ \text{(II)} \end{cases}$, 其联立方程组的解就是(I)与(II)



的公共解.

如果已知(I)与(II)的基础解系分别是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 和 β_1, β_2 ,则可设公共解为 γ ,那么

$$\gamma = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = l_1\beta_1 + l_2\beta_2$$

由此得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 - l_1\beta_1 - l_2\beta_2 = 0$,解出 k_1, k_2, k_3, l_1, l_2 可求出公共解 γ .

这两种常见的出题方法应当把握.

而处理同解的方法,往往是代入来处理,即把(I)的解代入(II),把(II)的解代入(I).

练习题

1. (2002, 数四, 8分) 设四元齐次线性方程组(I)为

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

而已知另一四元齐次线性方程组(II)的一个基础解系为

$$\alpha_1 = (2, -1, a+2, 1)^T, \alpha_2 = (-1, 2, 4, a+8)^T$$

(1) 求方程组(I)的一个基础解系;

(2) 当 a 为何值时,方程组(I)与(II)有非零公共解?在有非零公共解时,求出全部非零公共解.

2. (2000, 数三, 3分) 设 A 为 n 阶实矩阵, A^T 是 A 的转置矩阵,则对于线性方程组(I): $Ax = 0$ 和(II): $A^T Ax = 0$,必有

(A) (II)的解是(I)的解,(I)的解也是(II)的解.

(B) (II)的解是(I)的解,但(I)的解不是(II)的解.

(C) (I)的解不是(II)的解,(II)的解也不是(I)的解.

(D) (I)的解是(II)的解,但(II)的解不是(I)的解.

3. (2005, 数三、数四, 13分) 已知齐次线性方程组

$$(I) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 0. \end{cases} \text{和} (II) \begin{cases} x_1 + bx_2 + cx_3 = 0, \\ 2x_1 + b^2x_2 + (c+1)x_3 = 0 \end{cases} \text{同解, 求 } a, b, c \text{ 的值.}$$

4. (1998, 数四, 7分) 已知下列非齐次线性方程组(I),(II)

$$(I) \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = -6, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 3; \end{cases} \quad (II) \begin{cases} x_1 + mx_2 - x_3 - x_4 = -5, \\ nx_2 - x_3 - 2x_4 = -11, \\ x_3 - 2x_4 = -t + 1 \end{cases}$$

(1) 求解方程组(I),用其导出组的基础解系表示通解.

(2) 当方程组中的参数 m, n, t 为何值时,方程组(I)与(II)同解?

练习题参考答案

1. 【解】 (1) 对方程组(I)的系数矩阵作初等行变换,有

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$



由于 $n-r(A)=4-2=2$, 基础解系由 2 个线性无关的解向量所构成, 取 x_3, x_4 为自由变量, 所以 $\beta_1=(5, -3, 1, 0)^T, \beta_2=(-3, 2, 0, 1)^T$ 是方程组 (I) 的基础解系.

(2) 设 η 是方程组 (I) 与 (II) 的非零公共解, 则

$$\eta = k_1\beta_1 + k_2\beta_2 = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2, \text{ 其中 } k_1, k_2 \text{ 与 } l_1, l_2 \text{ 均不全为零的常数}$$

$$\text{那么 } k_1\beta_1 + k_2\beta_2 - l_1\alpha_1 - l_2\alpha_2 = 0.$$

由此得齐次方程组 (III)

$$\begin{cases} 5k_1 - 3k_2 & -2l_1 & +l_2 = 0, \\ -3k_1 + 2k_2 & +l_1 & -2l_2 = 0, \\ k_1 & -(a+2)l_1 & -4l_2 = 0, \\ & k_2 & -l_1 - (a+8)l_2 = 0. \end{cases} \quad (\text{III})$$

有非零解. 对系数矩阵作初等行变换, 有

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -a-2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -a-8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a-2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -a-8 \\ 0 & 2 & -3a-5 & -14 \\ 0 & -3 & 5a+8 & 21 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a-2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -a-8 \\ 0 & 0 & -3a-3 & 2a+2 \\ 0 & 0 & 5a+5 & -3a-3 \end{bmatrix}$$

当且仅当 $a+1=0$ 时, $r(\text{III}) < 4$, 方程组有非零解.

$$\text{此时, (III) 的同解方程组是 } \begin{cases} k_1 - l_1 - 4l_2 = 0, \\ k_2 - l_1 - 7l_2 = 0, \end{cases} \text{ 解出 } \begin{cases} k_1 = l_1 + 4l_2, \\ k_2 = l_1 + 7l_2. \end{cases}$$

$$\text{于是 } \eta = (l_1 + 4l_2)\beta_1 + (l_1 + 7l_2)\beta_2 = l_1(\beta_1 + \beta_2) + l_2(4\beta_1 + 7\beta_2) = l_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + l_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

其中 l_1, l_2 为任意实数.

2. 【答案】 A.

【解析】 若 η 是 (I) 的解, 则 $A\eta = 0$, 那么

$$(A^T A)\eta = A^T(A\eta) = A^T 0 = 0$$

即 η 是 (II) 的解.

若 α 是 (II) 的解, 有 $A^T A\alpha = 0$, 用 α^T 左乘得 $\alpha^T A^T A\alpha = 0$, 即 $(A\alpha)^T(A\alpha) = 0$.

亦即 $A\alpha$ 自己的内积 $(A\alpha, A\alpha) = 0$, 故必有 $A\alpha = 0$, 即 α 是 (I) 的解.

所以 (I) 与 (II) 同解, 故应选 (A).

【评注】 若 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$, 则 $\alpha^T \alpha = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$, 可见 $\alpha^T \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$.



3. 【解】 因为方程组(II)中方程个数 < 未知数个数, (II) 必有无穷多解, 所以(I) 必有无穷多解. 因此(I) 的系数行列式必为 0, 即有

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 2 - a = 0 \Rightarrow a = 2$$

对(I) 系数矩阵作初等行变换, 有 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

可求出方程组(I) 的通解是 $x = k(-1, -1, 1)^T$.

因为 $(-1, -1, 1)^T$ 应当是方程组(II) 的解, 故有

$$\begin{cases} -1 - b + c = 0, \\ -2 - b^2 + c + 1 = 0 \end{cases}$$

解得 $b = 1, c = 2$ 或 $b = 0, c = 1$.

当 $b = 0, c = 1$ 时, 方程组(II) 为

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

因其系数矩阵的秩为 1, 从而(I) 与(II) 不同解, 故 $b = 0, c = 1$ 应舍去.

当 $a = 2, b = 1, c = 2$ 时, (I) 与(II) 同解.

4. 【解】 (1) 对方程组(I) 的增广矩阵作初等行变换, 有

$$\bar{A}_1 = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 4 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \end{array} \right]$$

由 $n - r(A) = 4 - 3 = 1$, 取自由变量为 x_4 .

令 $x_4 = 0$, 得方程组(I) 的特解 $(-2, -4, -5, 0)^T$,

令 $x_4 = 1$, 得(I) 的导出组的基础解系为 $(1, 1, 2, 1)^T$.

故(I) 的通解为: $x = (-2, -4, -5, 0)^T + k(1, 1, 2, 1)^T, k$ 为任意实数.

(2) 把(I) 的通解 $x_1 = -2 + k, x_2 = -4 + k, x_3 = -5 + 2k, x_4 = k$ 代入(II) 整理得

$$\begin{cases} (m-2)(k-4) = 0, \\ (n-4)(k-4) = 0, \\ t = 6 \end{cases}$$

由于 k 是任意常数, 故 $m = 2, n = 4, t = 6$. 此时(I) 的解全是(II) 的解. 当 $n = 4$ 时, 易见 $r(A_2) = r(\bar{A}_2) = 3$, (II) 的通解为 $\alpha + k\eta$ 形式.

所以 $x = (-2, -4, -5, 0)^T + k(1, 1, 2, 1)^T$ 就是(II) 的通解, 从而(I) 与(II) 同解.



第五章 特征值与特征向量

本章导读

特征值和特征向量是线性代数的重要内容之一,也是考研的重点之一,它涉及行列式,矩阵,相关、无关,秩,基础解系……一系列问题,知识点多,综合性强,必须好好复习.

首先要掌握求特征值、特征向量的各种方法;第二是相似,把握住和对角矩阵相似的充分必要条件,会求可逆矩阵 P ;第三(可能更重要),利用实对称矩阵的隐含信息处理求特征值、特征向量,用正交矩阵相似对角化等一系列问题.

一、特征值、特征向量的概念与计算

试题特点

常见的命题形式:

1. 用定义 $A\alpha = \lambda\alpha, \alpha \neq 0$ 推理、分析、判断.
2. 由 $|\lambda E - A| = 0$ 和 $(\lambda_i E - A)x = 0$ 求基础解系.
3. 通过相似 $P^{-1}AP = B$.
 (1) 如 $A\alpha = \lambda\alpha$, 则 $B(P^{-1}\alpha) = \lambda(P^{-1}\alpha)$,
 (2) 如 $B\alpha = \lambda\alpha$, 则 $A(P\alpha) = \lambda(P\alpha)$,

特别地,如 $r(A) = 1$,有

$$|\lambda E - A| = \lambda^n - \sum a_{ii}\lambda^{n-1}, \lambda_1 = \sum a_{ii}, \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 0$$

1 (2009, 13 题, 4 分) 若三维列向量 α, β 满足 $\alpha^T \beta = 2$, 其中 α^T 为 α 为转置, 则矩阵 $\beta\alpha^T$ 的非零特征值为_____

【答案】 2.

【解析】 因为矩阵 $A = \beta\alpha^T$ 的秩为 1, 所以矩阵 A 的特征值是 $\sum a_{ii}, 0, 0$.
 而本题 $\sum a_{ii}$ 就是 $\alpha^T \beta$, 故 $\beta\alpha^T$ 的非零特征值为 2.

【评注】 若 $\alpha = (a_1, a_2, a_3)^T, \beta = (b_1, b_2, b_3)^T$, 则

$$A = \beta\alpha^T = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_2 b_1 & a_3 b_1 \\ a_1 b_2 & a_2 b_2 & a_3 b_2 \\ a_1 b_3 & a_2 b_3 & a_3 b_3 \end{bmatrix}$$

那么 $|\lambda E - A| = \lambda^3 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)\lambda^2$, 而 $\alpha^T\beta = \beta^T\alpha = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

一般地, 如 $r(A) = 1$, 有 $|\lambda E - A| = \lambda^n - \sum a_{ii}\lambda^{n-1}$, 则 $\lambda_1 = \sum a_{ii}, \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

本题难度系数 0.680.

关于秩为 1 的矩阵的特征值公式应当熟悉!

通过下面的考题, 请进一步体会考场上如何求特征值、特征向量.

练习题

1. (2002, 数二, 3 分) 矩阵 $\begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ 的非零特征值是_____.

2. (1993, 数四, 3 分) 设 $\lambda = 2$ 是非奇异矩阵 A 的一个特征值, 则矩阵 $\left(\frac{1}{3}A^2\right)^{-1}$ 有一个特征值等于

(A) $\frac{4}{3}$.

(B) $\frac{3}{4}$.

(C) $\frac{1}{2}$.

(D) $\frac{1}{4}$.

3. (1998, 数三、数四, 9 分) 设向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T, \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ 都是非零向量, 且满足条件 $\alpha^T\beta = 0$, 记 n 阶矩阵 $A = \alpha\beta^T$. 求: (I) A^2 ; (II) 矩阵 A 的特征值和特征向量.

练习题参考答案

1. 【答案】 4.

【解析】 这是一个基础题, 由特征多项式

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 2 \\ -2 & \lambda - 2 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 2 \\ -2 & \lambda - 2 & 2 \\ 0 & \lambda & \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 2 \\ -2 & \lambda - 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -2 & \lambda - 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 4) \end{aligned}$$

可知非零特征值是 $\lambda = 4$.

2. 【答案】 B.

【解析】 由 $A\alpha = \lambda\alpha, \alpha \neq 0$, 有 $A^2\alpha = \lambda A\alpha = \lambda^2\alpha$, 故 $\frac{1}{3}A^2\alpha = \frac{1}{3}\lambda^2\alpha$.

即若 λ 是矩阵 A 的特征值, 则 $\frac{1}{3}\lambda^2$ 是矩阵 $\frac{1}{3}A^2$ 的特征值, 现 $\lambda = 2$, 因此, $\frac{1}{3}A^2$ 有特征值 $\frac{4}{3}$. 再利用

若 $A\alpha = \lambda\alpha$, 则 $A^{-1}\alpha = \frac{1}{\lambda}\alpha$, 从而 $\left(\frac{1}{3}A^2\right)^{-1}$ 有特征值 $\frac{3}{4}$. 故应选 (B).

或者, $\left(\frac{1}{3}A^2\right)^{-1}\alpha = 3(A^{-1})^2\alpha$, 由 $\lambda = 2$ 是 A 的特征值, 知 $\frac{1}{2}$ 是 A^{-1} 的特征值, 于是 $\frac{1}{4}$ 是 $(A^{-1})^2$



的特征值,亦知应选(B).

3.【解】(I) 由 $A = \alpha\beta^T$ 和 $\alpha^T\beta = 0$, 有

$$A^2 = (\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T) = \alpha(\beta^T\alpha)\beta^T = 0\alpha\beta^T = O$$

(II) 设 λ 是 A 的任一特征值, η 是 A 属于特征值 λ 的特征向量, 即 $A\eta = \lambda\eta, \eta \neq 0$. 那么

$$A^2\eta = \lambda A\eta = \lambda^2\eta$$

因为 $A^2 = O$, 故 $\lambda^2\eta = 0$, 又因 $\eta \neq 0$, 从而矩阵 A 的特征值是 $\lambda = 0$ (n 重根).

不妨设向量 α, β 的第 1 个分量 $a_1 \neq 0, b_1 \neq 0$. 对齐次线性方程组 $(0E - A)x = 0$ 的系数矩阵作初等行变换, 有

$$0E - A = \begin{bmatrix} -a_1b_1 & -a_1b_2 & \cdots & -a_1b_n \\ -a_2b_1 & -a_2b_2 & \cdots & -a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_nb_1 & -a_nb_2 & \cdots & -a_nb_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

得到基础解系

$$\eta_1 = (-b_2, b_1, \cdots, 0)^T, \eta_2 = (-b_3, 0, b_1, \cdots, 0)^T, \cdots, \eta_{n-1} = (-b_n, 0, 0, \cdots, b_1)^T$$

于是矩阵 A 属于特征值 $\lambda = 0$ 的特征向量为

$$k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_{n-1}\eta_{n-1}, \text{ 其中 } k_1, k_2, \cdots, k_{n-1} \text{ 是不全为零的任意常数}$$

二、相似与相似对角化

试题特点

围绕相似定义 $P^{-1}AP = B$, 相似的性质设计试题, 或者考查判断是否和对角矩阵相似.

$A \sim \Lambda \Leftrightarrow A$ 有 n 个线性无关的特征向量

$\Leftrightarrow$ 如 λ 是 A 的 k 重特征值, 则 λ 有 k 个线性无关的特征向量.

如 A 有 n 个不同的特征值 $\Rightarrow A \sim \Lambda$.

2 (2014, 21 题, 11 分) 证明 n 阶矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \text{ 与 } \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{bmatrix} \text{ 相似.}$$

【证明】

$$\text{记 } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{bmatrix},$$

因 A 是实对称矩阵必与对角矩阵相似.

由 $|\lambda E - A| = \lambda^n - n\lambda^{n-1} = 0$, 知 A 的特征值为 $n, 0, 0, \cdots, 0$ ($n-1$ 个).



$$\text{故 } A \sim \Lambda = \begin{bmatrix} n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}.$$

又由 $|\lambda E - B| = (\lambda - n)\lambda^{n-1} = 0$, 知矩阵 B 的特征值为 $n, 0, 0, \dots, 0$ ($n-1$ 个).

当 $\lambda = 0$ 时, $r(0E - B) = r(B) = 1$, 那么 $n - r(0E - B) = n - 1$, 即齐次方程组 $(0E - B)x = 0$ 有 $n-1$ 个线性无关的解, 亦即 $\lambda = 0$ 时矩阵 B 有 $n-1$ 个线性无关的特征向量. 从而矩阵 B 必与对角矩阵相似, 即

$$B \sim \Lambda = \begin{bmatrix} n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

从而 A 和 B 相似.

【评注】 因为 $A \sim \Lambda$, 故存在可逆矩阵 P_1 使 $P_1^{-1}AP_1 = \Lambda$, 又因 $B \sim \Lambda$, 故存在可逆矩阵 P_2 使 $P_2^{-1}BP_2 = \Lambda$, 于是 $P_1^{-1}AP_1 = P_2^{-1}BP_2 \Rightarrow P_2P_1^{-1}AP_1P_2^{-1} = B$, 令 $P = P_1P_2^{-1}$ 即有 $P^{-1}AP = B$.

难度系数 0.382, 0.354, 0.368.

3 (2016, 5 题, 4 分) 设 A, B 是可逆矩阵, 且 A 与 B 相似, 则下列结论错误的是

(A) A^T 与 B^T 相似.

(B) A^{-1} 与 B^{-1} 相似.

(C) $A + A^T$ 与 $B + B^T$ 相似.

(D) $A + A^{-1}$ 与 $B + B^{-1}$ 相似.

【答案】 C.

【解析】 由已知条件, 存在可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP = B$. 那么

$$B^T = (P^{-1}AP)^T = P^T A^T (P^{-1})^T = P_1^{-1} A^T P_1$$

其中 $P_1 = (P^T)^{-1}$, 即 A^T 与 B^T 相似, (A) 正确.

$$B^{-1} = (P^{-1}AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}(P^{-1})^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$$

即 A^{-1} 和 B^{-1} 相似, (B) 正确.

又

$$P^{-1}(A + A^{-1})P = P^{-1}AP + P^{-1}A^{-1}P = B + B^{-1}$$

即 $A + A^{-1}$ 和 $B + B^{-1}$ 相似, (D) 正确.

从而应选 (C).

特别地, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 与 $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 相似.

但 $A + A^T = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ 与 $B + B^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 不相似.

4 (2017, 6 题, 4 分) 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 则



(A) A 与 C 相似, B 与 C 相似.

(B) A 与 C 相似, B 与 C 不相似.

(C) A 与 C 不相似, B 与 C 相似.

(D) A 与 C 不相似, B 与 C 不相似.

【答案】 B.

【解析】 对矩阵 A , 特征值为 $2, 2, 1$. 由 $2E - A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 其秩为 1.

齐次方程组 $(2E - A)x = 0$ 有 2 个线性无关的解, 亦即 $\lambda = 2$ 有 2 个线性无关的特征向量, 所以 $A \sim C$ 相似.

对于矩阵 B , 特征值为 $2, 2, 1$. 由于 $2E - B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 其秩为 2.

齐次方程组 $(2E - B)x = 0$ 只有 1 个线性无关的解, 亦即 $\lambda = 2$ 只有 1 个线性无关的特征向量, B 不能相似对角化. 故应选 (B).

5 (2018, 5 题, 4 分) 下列矩阵中, 与矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 相似的为

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

【答案】 A.

【解析】 这 5 个矩阵特征值都是 $1, 1, 1$ 且都没有 3 个线性无关的特征向量, 即都不能相似对角化. 对 (B)(C)(D) 选项, $\lambda = 1$ 都是有 2 个线性无关的特征向量, 而

对 (A) 选项, $\lambda = 1$ 只有 1 个线性无关的特征向量, 所以选 (A).

【评注】 如 $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则

$$P^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{亦知选 (A).}$$

练习题

(2009, 数三, 4 分) 设 $\alpha = (1, 1, 1)^T$, $\beta = (1, 0, k)^T$. 若矩阵 $\alpha\beta^T$ 相似于 $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $k =$



练习题参考答案

【答案】 2.

【解析】 由于 $\alpha\beta^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} (1, 0, k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 1 & 0 & k \\ 1 & 0 & k \end{bmatrix}$, 那么由 $\alpha\beta^T \sim \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$ 知它们有相同的迹.

故: $1+0+k = 3+0+0$, 所以 $k = 2$.

三、关于相似时可逆矩阵 P

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

试题特点

$P^{-1}AP = \Lambda$ 时, Λ 是由 A 的特征值组成的对角阵, P 是由 A 的特征向量作为列向量组成的矩阵, 要意识到这一类题目实际上就是求矩阵 A 特征值和特征向量的另一种出题方法. 这类试题往往会涉及处理一些参数.

练习题 1 和 2 是常规题型, 而练习题 3 是用合成的方法求可逆矩阵 P . ($P_1^{-1}AP_1 = B, P_2^{-1}BP_2 = C \Rightarrow P^{-1}AP = C, P = P_1P_2$)

6 (2015, 21 题, 11 分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{bmatrix}$ 相似于矩阵 $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$,

(I) 求 a, b 的值;

(II) 求可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

【解】 (I) $A \sim B \Rightarrow \sum a_{ii} = \sum b_{ii}, |A| = |B|$, 得

$$\begin{cases} 0+3+a = 1+b+1, \\ 2a-3 = b \end{cases}$$

解出 $a = 4, b = 5$.

(II) 因为 $A \sim B$, $|\lambda E - A| = |\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 0 \\ 0 & \lambda-5 & 0 \\ 0 & -3 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-5)(\lambda-1)^2$, 而得 A

的特征值: $1, 1, 5$.

对 $\lambda = 1$, 由 $(E - A)x = 0$,

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得基础解系 $\alpha_1 = (2, 1, 0)^T, \alpha_2 = (-3, 0, 1)^T$,

对 $\lambda = 5$, 由 $(5E - A)x = 0$,



$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得基础解系 $\alpha_3 = (-1, -1, 1)^T$.

$$\text{令 } P = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ 有 } P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 5 \end{bmatrix}.$$

【评注】 本题难度系数 0.540, 0.463, 0.513.

7 (2016, 21 题, 11 分) 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(I) 求 A^{99} ;

(II) 设三阶矩阵 $B = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 满足 $B^2 = BA$, 记 $B^{100} = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]$, 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 分别表示为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合.

【解】 (I) 由 A 的特征多项式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ -2 & \lambda+3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+1)(\lambda+2)$$

得 A 的特征值为 $0, -1, -2$.

对 $\lambda = 0$, 由 $(0E - A)x = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得基础解系(或特征向量) $\gamma_1 = (3, 2, 2)^T$.

对 $\lambda = -1$, 由 $(-E - A)x = 0$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得基础解系(或特征向量) $\gamma_2 = (1, 1, 0)^T$.

对 $\lambda = -2$, 由 $(-2E - A)x = 0$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得基础解系(或特征向量) $\gamma_3 = (1, 2, 0)^T$.

$$\text{令 } P = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 有 } P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & -2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 \text{那么 } P^{-1}A^{99}P &= \Lambda^{99}, A^{99} = P\Lambda^{99}P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & & \\ & (-1)^{99} & \\ & & (-2)^{99} \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -2+2^{99} & 1-2^{99} & 2-2^{98} \\ -2+2^{100} & 1-2^{100} & 2-2^{99} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

(II) 因 $B^2 = BA$, 知 $B^3 = B(BA) = B^2A = BA^2$, 归纳得

$$\begin{aligned}
 B^{100} &= BA^{99} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} -2+2^{99} & 1-2^{99} & 2-2^{98} \\ -2+2^{100} & 1-2^{100} & 2-2^{99} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= [(-2+2^{99})\alpha_1 + (-2+2^{100})\alpha_2, (1-2^{99})\alpha_1 + (1-2^{100})\alpha_2, (2-2^{98})\alpha_1 + (2-2^{99})\alpha_2] \\
 \text{所以 } \beta_1 &= (-2+2^{99})\alpha_1 + (-2+2^{100})\alpha_2; \beta_2 = (1-2^{99})\alpha_1 + (1-2^{100})\alpha_2; \\
 \beta_3 &= (2-2^{98})\alpha_1 + (2-2^{99})\alpha_2.
 \end{aligned}$$

【评注】 本题难度系数 0.236, 0.161, 0.212.

8 (2019, 21 题, 11 分) 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ 与 $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}$ 相似.

(I) 求 x, y ;

(II) 求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = B$.

【解】 (I) 因 $A \sim B$, 有 $\sum a_{ii} = \sum b_{ii}$, $|A| = |B|$.

$$\text{即} \begin{cases} x-4 = y+1 \\ 4x-8 = -2y \end{cases}$$

解得 $x = 3, y = -2$.

(II) 因 $|\lambda E - B| = (\lambda - 2)(\lambda + 1)(\lambda + 2)$

矩阵 B 的特征值为 $2, -1, -2$.

又 $A \sim B$ 知 A 的特征值为 $2, -1, -2$.

下分别求出矩阵 A 和 B 的特征向量:

$$\text{由 } (2E - A) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得 $\lambda = 2$ 的特征向量 $\alpha_1 = (1, -2, 0)^T$,

$$\text{由 } (-E - A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得 $\lambda = -1$ 的特征向量 $\alpha_2 = (-2, 1, 0)^T$,



$$\text{由 } (-2E - A) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得 $\lambda = -2$ 的特征向量 $\alpha_3 = (1, -2, -4)^T$,

$$\text{令 } P_1 = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \text{ 有 } P_1^{-1}AP_1 = A = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & -2 \end{bmatrix}.$$

对矩阵 B ,

由 $(2E - B)x = 0$ 得 $\lambda = 2$ 的特征向量 $\beta_1 = (1, 0, 0)^T$,

由 $(-E - B)x = 0$ 得 $\lambda = -1$ 的特征向量 $\beta_2 = (-1, 3, 0)^T$,

由 $(-2E - B)x = 0$ 得 $\lambda = -2$ 的特征向量 $\beta_3 = (0, 0, 1)^T$,

$$\text{令 } P_2 = [\beta_1, \beta_2, \beta_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 有 } P_2^{-1}BP_2 = A = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & -2 \end{bmatrix}.$$

于是 $P_1^{-1}AP_1 = P_2^{-1}BP_2$ 得 $P_2P_1^{-1}AP_1P_2^{-1} = B$.

令 $P = P_1P_2^{-1}$, 则有 $P^{-1}AP = B$. 其中

$$P = P_1P_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ -2 & -\frac{1}{3} & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

【评注】 由于特征向量是不唯一的, 因此可逆矩阵 P 是不唯一的. 本题 P_1 中, 如用 $-\alpha_2$ 替换

可得 $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$, P_2 中, 如用 $\frac{1}{3}\beta_2$ 替换, P_2 就是初等矩阵, 求 P_2^{-1} 是不是直接有公式?

9 (2020, 21 题, 11 分) 设 A 为二阶矩阵, $P = [\alpha, A\alpha]$, 其中 α 是非零向量且不是 A 的特征向量.

(I) 证明 P 为可逆矩阵.

(II) 若 $A^2\alpha + A\alpha - 6\alpha = 0$. 求 $P^{-1}AP$, 并判断 A 是否相似于对角矩阵.

【解】 (I) 因 $\alpha \neq 0$ 且 α 不是 A 的特征向量, 于是 $A\alpha \neq k\alpha$, 从而 α 与 $A\alpha$ 不共线, 即 $\alpha, A\alpha$ 线性无关, 故 $P = (\alpha, A\alpha)$ 可逆.

或(反证法) 若 P 不可逆, 有

$$|P| = |\alpha, A\alpha| = 0$$

α 与 $A\alpha$ 成比例, 于是 $A\alpha = k\alpha$. 又 $\alpha \neq 0$ 知 α 是 A 的特征向量与已知条件矛盾.

(II) (方法一) 由 $A^2\alpha + A\alpha - 6\alpha = 0$ 有 $A^2\alpha = 6\alpha - A\alpha$

$$AP = A[\alpha, A\alpha] = [A\alpha, A^2\alpha] = [A\alpha, 6\alpha - A\alpha]$$

$$= [\alpha, A\alpha] \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

因 P 可逆, 于是

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

记 $B = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, 而 $|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda & -6 \\ -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6$ 特征值 $2, -3$.

于是 A 有 2 个不同特征值从而 A 可相似对角化.

(方法二) 因 $A^2 + A - 6E = (A - 2E)(A + 3E) = (A + 3E)(A - 2E)$,

由 $A^2\alpha + A\alpha - 6\alpha = 0$, 即 $(A^2 + A - 6E)\alpha = 0$,

于是 $(A - 2E)(A + 3E)\alpha = 0$,

即 $(A - 2E)(A\alpha + 3\alpha) = 0$,

即 $A(A\alpha + 3\alpha) = 2(A\alpha + 3\alpha)$,

由 α 不是特征向量, 有 $A\alpha + 3\alpha \neq 0$

从而 $\lambda = 2$ 是 A 的特征值, 类似有 $\lambda = -3$ 是特征值. 下略.

练习题

1. (1992, 数三, 7 分) 设矩阵 A 与 B 相似, 其中 $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}$,

(I) 求 x 和 y 的值;

(II) 求可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP = B$.

2. (1999, 数四, 7 分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -k & -1 & k \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$, 问当 k 为何值时, 存在可逆矩阵 P , 使得

$P^{-1}AP$ 为对角矩阵? 并求出 P 和相应的对角矩阵.

3. (2005, 数四, 13 分) 设 A 为三阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是线性无关的三维列向量, 且满足

$$A\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, A\alpha_2 = 2\alpha_2 + \alpha_3, A\alpha_3 = 2\alpha_2 + 3\alpha_3$$

(I) 求矩阵 B , 使得 $A[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]B$;

(II) 求矩阵 A 的特征值;

(III) 求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

练习题参考答案

1. 【解】 (I) 因为 A 和对角矩阵 B 相似, 所以 $-1, 2, y$ 就是矩阵 A 的特征值, 由

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda+2 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda-x & -2 \\ -3 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+2)[\lambda^2 - (x+1)\lambda + (x-2)]$$

知 $\lambda = -2$ 是 A 的特征值, 因此必有 $y = -2$.

再由 $\lambda = 2$ 是 A 的特征值, 知 $|2E - A| = 4[2^2 - 2(x+1) + (x-2)] = 0$, 得 $x = 0$.



$$(II) \text{ 由于 } \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & -2 \end{bmatrix},$$

对 $\lambda = -1$, 由 $(-E - A)x = 0$ 得特征向量 $\alpha_1 = (0, -2, 1)^T$,

对 $\lambda = 2$, 由 $(2E - A)x = 0$ 得特征向量 $\alpha_2 = (0, 1, 1)^T$,

对 $\lambda = -2$, 由 $(-2E - A)x = 0$ 得特征向量 $\alpha_3 = (1, 0, -1)^T$.

$$\text{那么, 令 } P = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \text{ 有 } P^{-1}AP = B.$$

2. 【解】 由矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & 2 \\ k & \lambda + 1 & -k \\ -4 & -2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 2 \\ 0 & \lambda + 1 & -k \\ \lambda - 1 & -2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1)^2$$

得到矩阵 A 的特征值为 $1, -1, -1$.

由于 $A \sim \Lambda$, 那么 $\lambda = -1$ 时, 矩阵 A 必有 2 个线性无关的特征向量, 因此 $n - r(-E - A) = 2$, 即 $r(-E - A) = 1$, 求出 $k = 0$.

当 $\lambda = 1$ 时, 由 $(E - A)x = 0$ 得特征向量 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T$,

当 $\lambda = -1$ 时, 由 $(-E - A)x = 0$ 得特征向量 $\alpha_2 = (-1, 2, 0)^T, \alpha_3 = (0, 1, 1)^T$.

$$\text{那么, 令 } P = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 有 } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}.$$

3. 【解】 (I) 按已知条件, 有

$$A[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_2 + 3\alpha_3]$$

$$= [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$\text{所以矩阵 } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(II) 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 矩阵 $C = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 可逆, 所以 $C^{-1}AC = B$,

即 A 与 B 相似. 由

$$|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - 2 & -2 \\ -1 & -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda - 4)$$

知矩阵 B 的特征值是 $1, 1, 4$. 故矩阵 A 的特征值是 $1, 1, 4$.



(Ⅲ) 对于矩阵 B , 由 $(E - B)x = 0$, 得特征向量 $\eta_1 = (-1, 1, 0)^T, \eta_2 = (-2, 0, 1)^T$.

由 $(4E - B)x = 0$, 得特征向量 $\eta_3 = (0, 1, 1)^T$.

那么令 $P_1 = [\eta_1, \eta_2, \eta_3]$, 有 $P_1^{-1}BP_1 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{bmatrix}$, 从而

$$P_1^{-1}C^{-1}ACP_1 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{bmatrix}$$

故当 $P = CP_1 = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [-\alpha_1 + \alpha_2, -2\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3]$ 时,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{bmatrix}$$

④、实对称矩阵

微信公众号【顶尖考研】

试题特点

(ID: djky66)

实对称矩阵有几个重要的定理,例如:实对称矩阵一定和对角矩阵相似(不管特征值有没有重根);实对称矩阵特征值不同时特征向量必相互正交(由此有内积为0,从而可构造齐次方程组求特征向量);实对称矩阵可以用正交矩阵来相似对角化. 试题就是围绕这些定理来设计的. 考研的重点,特别要复习好综合性强的解答题.

例10 (2010, 6题, 4分) 设 A 为四阶实对称矩阵, 且 $A^2 + A = O$. 若 A 的秩为3, 则 A 相似于

(A) $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$.

(B) $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$.

(D) $\begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$.

【答案】 D.

【解析】 这是一道常见的基础题, 由 $A\alpha = \lambda\alpha, \alpha \neq 0$ 知 $A^2\alpha = \lambda^2\alpha$, 那么对于

$$A^2 + A = O \Rightarrow (\lambda^2 + \lambda)\alpha = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda = 0$$

所以 A 的特征值只能是0或-1.



再由 A 是实对称必有 $A \sim \Lambda$, 而 Λ 即是 A 的特征值, 那么由 $r(A) = 3$, 可知 (D) 正确.

【评注】 本题难度系数 0.775.

【例 1】(2011, 21 题, 11 分) 设 A 为三阶实对称矩阵, A 的秩为 2, 且 $A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(I) 求 A 的所有特征值与特征向量;

(II) 求矩阵 A .

【分析】 本题未给出具体的矩阵 A , 又要求 A 的特征值、特征向量, 应当考虑用定义法 $A\alpha = \lambda\alpha, \alpha \neq 0$ 来推理、分析、判断.

【解】 (I) 因 $r(A) = 2$ 知 $|A| = 0$, 所以 $\lambda = 0$ 是 A 的特征值. 又

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

所以按定义 $\lambda = 1$ 是 A 的特征值, $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T$ 是 A 属于 $\lambda = 1$ 的特征向量;

$\lambda = -1$ 是 A 的特征值, $\alpha_2 = (1, 0, -1)^T$ 是 A 属于 $\lambda = -1$ 的特征向量.

设 $\alpha_3 = (x_1, x_2, x_3)^T$ 是 A 属于特征值 $\lambda = 0$ 的特征向量, 作为实对称矩阵特征值不同特征向量相互正交, 因此 $\begin{cases} \alpha_1^T \alpha_3 = x_1 + x_3 = 0, \\ \alpha_2^T \alpha_3 = x_1 - x_3 = 0. \end{cases}$ 解出 $\alpha_3 = (0, 1, 0)^T$.

故矩阵 A 的特征值为 $1, -1, 0$; 特征向量依次为

$k_1(1, 0, 1)^T, k_2(1, 0, -1)^T, k_3(0, 1, 0)^T$, 其中 k_1, k_2, k_3 均是不为 0 的任意常数.

(II) 由 $A[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [\alpha_1, -\alpha_2, 0]$, 有

$$A = [\alpha_1, -\alpha_2, 0][\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

【评注】 本题特征值不同的特征向量已经正交, 也可考虑用正交矩阵, 相似对角化来求矩阵 A , 即令 $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, 则 $Q^{-1}AQ = \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$

$$A = Q\Lambda Q^{-1} = Q\Lambda Q^T$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

当然也可设

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$$

$$\text{由 } A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ 有 } \begin{cases} a-c=-1, \\ a+c=1, \\ b-e=0, \\ b+e=0, \\ c-f=1, \\ c+f=1, \end{cases}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

易得 $a=0, c=1, b=0, e=0, f=0$. 即有 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & d & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 再由 $r(A)=2 \Rightarrow d=0$. 然后再来

求特征值、特征向量.

不要忘记实对称矩阵特征值不同特征向量相互正交这一重要定理, 由此构造齐次方程组可求出特征向量, 本题难度系数 0.534, 0.479, 0.617.

12 (2013, 6 题, 4 分) 矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 相似的充分必要条件为

(A) $a=0, b=2$.

(B) $a=0, b$ 为任意常数.

(C) $a=2, b=0$.

(D) $a=2, b$ 为任意常数.

【答案】 B.

【解析】 两个实对称矩阵相似的充分必要条件是相同的特征值.

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -a & -1 \\ -a & \lambda-b & -a \\ -1 & -a & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda[\lambda^2 - (b+2)\lambda + 2b - 2a^2]$$

因为

$$|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & & \\ & \lambda-b & \\ & & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2)(\lambda-b)$$

由 $\lambda=2$ 必是 A 的特征值, 即

$$|2E - A| = 2[2^2 - 2(b+2) + 2b - 2a^2] = 0$$

故必有 $a=0$.

由 $\lambda=b$ 必是 A 的特征值, 即

$$|bE - A| = b[b^2 - (b+2)b + 2b] = 0, b \text{ 可为任意常数.}$$

所以选(B).



练习题

1. (2002, 数四, 8分) 设实对称矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{bmatrix}$, 求可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角形矩阵, 并计算行列式 $|A - E|$ 的值.

2. (2001, 数三、数四, 9分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, 已知线性方程组 $Ax = \beta$ 有解但不唯一, 试求: (I) a 的值; (II) 正交矩阵 Q , 使 $Q^T A Q$ 为对角矩阵.

练习题参考答案

1. 【解】 由矩阵 A 的特征多项式

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - a & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - a - 1 & \lambda - a - 1 & 0 \\ -1 & \lambda - a & 1 \\ 0 & a + 1 - \lambda & \lambda - a - 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - a - 1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & \lambda - a & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda - a - 1)^2 (\lambda - a + 2) \end{aligned}$$

得到矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = a + 1, \lambda_3 = a - 2$.

对于 $\lambda = a + 1$, 由 $[(a + 1)E - A]x = 0$, 得到 2 个线性无关的特征向量

$$\alpha_1 = (1, 1, 0)^T, \alpha_2 = (1, 0, 1)^T$$

对于 $\lambda = a - 2$, 由 $[(a - 2)E - A]x = 0$, 得到特征向量 $\alpha_3 = (-1, 1, 1)^T$.

那么, 令 $P = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 有 $P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} a+1 & & \\ & a+1 & \\ & & a-2 \end{bmatrix}$.

因为 A 的特征值是 $a + 1, a + 1, a - 2$, 故 $A - E$ 的特征值是 $a, a, a - 3$. 所以

$$|A - E| = a^2(a - 3)$$

【评注】 由 $A \sim \Lambda$, 知 $A - E \sim \Lambda - E$, 于是

$$|A - E| = |\Lambda - E| = \begin{vmatrix} a & & \\ & a & \\ & & a-3 \end{vmatrix} = a^2(a - 3)$$

亦可求出行列式 $|A - E|$ 的值.

2. 【解】 (I) 对方程且 $Ax = \beta$ 的增广矩阵作初等行变换, 有

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & -2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & -a-2 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & | & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & | & 0 \\ 0 & 0 & (a-1)(a+2) & | & a+2 \end{bmatrix}$$

因为方程组有无穷多解, 所以 $r(\mathbf{A}) = r(\bar{\mathbf{A}}) < 3$. 故 $a = -2$.

(II) 因为 $|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 2 \\ -1 & \lambda+2 & -1 \\ 2 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+3)(\lambda-3)$,

所以矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -3$,

当 $\lambda_1 = 3$ 时, 由 $(3\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

得到属于特征值 $\lambda = 3$ 的特征向量 $\alpha_1 = (1, 0, -1)^T$.

当 $\lambda_2 = 0$ 时, 由 $(0\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

得到属于特征值 $\lambda = 0$ 的特征向量 $\alpha_2 = (1, 1, 1)^T$.

当 $\lambda_3 = -3$ 时, 由 $(-3\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\begin{bmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

得到属于特征值 $\lambda = -3$ 的特征向量 $\alpha_3 = (1, -2, 1)^T$.

实对称矩阵的特征值不同时, 其特征向量已经正交, 故只需单位化.

$$\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \beta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

那么令 $\mathbf{Q} = [\beta_1, \beta_2, \beta_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$, 得 $\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 0 & \\ & & -3 \end{bmatrix}$.

小结

通过这几个试题, 希望你很好地归纳一下, 面对实对称矩阵都有哪些求特征值、特征向量的方法技巧.



第六章 二次型

本章导读

二次型实际上是特征值的几何应用,复习二次型就一定要搞清它与特征值、特征向量之间的内在联系.

考点主要有三个:一个是二次型化标准形的正、反两方面的问题,依托的是特征值、特征向量相似对角化的理论与方法;一个是二次型的正定性,既有正定的判定,又有正定性质的运用,也都会涉及特征值;第三是合同,它是由二次型经坐标变换引申出来的概念.

数学一中还常有二次型与二次曲面相沟通的试题.

一、二次型概念与标准形

试题特点

用正交变换化二次型为标准形,求其标准就是求二次型矩阵 A 的特征值,求坐标变换就是求 A 的特征向量.

若求二次型的表达式就是求矩阵 A ,这样的试题一般都是实对称矩阵试题的翻版.

1 (2009, 21 题, 11 分) 设二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + (a-1)x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

(I) 求二次型 f 的矩阵的所有特征值;

(II) 若二次型 f 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2$, 求 a 的值.

【解】 (I) 二次型 f 的矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{bmatrix}$. 由于

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - a & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - a + 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - a & \lambda - a & 0 \\ 0 & \lambda - a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - a + 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda - a & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - a & 1 \\ -1 & 2 & \lambda - a + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - a)(\lambda - (a+1))(\lambda - (a-2)) \end{aligned}$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = a, \lambda_2 = a+1, \lambda_3 = a-2$.

(II) 因为二次型 f 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2$, 说明正惯性指数 $p = 2$, 负惯性指数 $q = 0$, 那么二次型矩阵 A 的特征值为 $+, +, 0$.



显然 $a-2 < a < a+1$ 所以必有 $a=2$.

【评注】 本题难度系数 0.495, 0.492, 0.516.

只要求出特征值, 或者知道特征值的+, -, 0 就有了正、负惯性指数也就可写规范形, 当然也有配方法这条化标准形的路, 但本题配方法不合适.

2 (2010, 21 题, 11 分) 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T A x$ 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为 $y_1^2 + y_2^2$, 且 Q 的第 3 列为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$.

(I) 求矩阵 A ;

(II) 证明 $A+E$ 为正定矩阵, 其中 E 为三阶单位矩阵.

【分析】 本题已知二次型在正交变换下的标准形就是已知矩阵 A 的特征值, 而 Q 的列就是 A 的特征向量, 现在的问题是如何求出 A 的所有线性无关的特征向量? 反求出矩阵 A ?

【解】 (I) 二次型 $x^T A x$ 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为 $y_1^2 + y_2^2$, 说明二次型矩阵 A 的特征值是 1, 1, 0. 又因 Q 的第 3 列是 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$, 说明 $\alpha_3 = (1, 0, 1)^T$ 是矩阵 A 关于特征值 $\lambda = 0$ 的特征向量. 因为 A 是实对称矩阵, 特征值不同特征向量相互正交. 设 A 关于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 的特征向量为 $\alpha = (x_1, x_2, x_3)^T$, 则 $\alpha^T \alpha_3 = 0$, 即 $x_1 + x_3 = 0$.

取 $\alpha_1 = (0, 1, 0)^T$, $\alpha_2 = (-1, 0, 1)^T$, 那么 α_1, α_2 是 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 的特征向量.

由 $A[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [\alpha_1, \alpha_2, 0]$ 有

$$\begin{aligned} A &= [\alpha_1, \alpha_2, 0][\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(II) 由于 $A+E$ 是对称矩阵, 且矩阵 A 的特征值是 1, 1, 0, 那么 $A+E$ 的特征值是 2, 2, 1. 因为 $A+E$ 的特征值全大于 0, 所以 $A+E$ 正定.

【评注】 本题也可把 α_1, α_2 单位化处理(它们已经正交!) 构造出正交矩阵 Q , 即

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \text{ 则 } Q^{-1}AQ = Q^T AQ = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}. \text{ 于是有 } A = Q\Lambda Q^T = \dots$$

因为在 (I) 中已求出矩阵 A , 那么计算 $A+E$ 的顺序主子式 $\Delta_1 = \frac{3}{2}, \Delta_2 = 3, \Delta_3 = 4$ 全大于 0 也可证出 $A+E$ 正定.

本题综合性强, 知识点多, 复习二次型一定要搞清二次型和特征值知识点之间的衔接和转换, 难度系数 0.385.

2010 年试题已知条件 Q 的信息应好好把握, 练习题 2 又会提醒哪些知识点?



3 (2011, 13 题, 4 分) 若二次曲面的方程 $x^2 + 3y^2 + z^2 + 2axy + 2xz + 2yz = 4$ 经正交变换化为 $y_1^2 + 4z_1^2 = 4$, 则 $a =$ _____.

【答案】 1.

【解析】 本题又是一道线性代数与二次曲面的简单综合题.

由于二次型 $\mathbf{x}A^T\mathbf{x}$ 经正交变换化为标准形时, 矩阵 A 的特征值就是标准形中平方项的系数. 按题意, 矩阵 A 的特征值是 $0, 1, 4$, 据 $|A| = \prod \lambda_i$, 即

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a-1 & 0 \\ a & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(a-1)^2 = 0$$

可见 $a = 1$.

【评注】 本题难度系数 0.693.

4 (2012, 21 题, 11 分) 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{bmatrix}$, 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T(A^T A)\mathbf{x}$ 的秩为 2.

(I) 求实数 a 的值;

(II) 求正交变换 $\mathbf{x} = Q\mathbf{y}$ 将二次型 f 化为标准形.

【解】 (I) 因为 $r(A^T A) = r(A)$, 对 A 施以初等行变换

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以当 $a = -1$ 时, $r(A) = 2$.

(II) 由 (I) 知 $A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$,

$$\begin{aligned} \text{那么 } |\lambda E - A^T A| &= \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-4 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -2 \\ -2 & -4 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2)(\lambda-6). \end{aligned}$$

矩阵 $A^T A$ 的特征值为 $0, 2, 6$.

对 $\lambda = 0$, 由 $(0E - A^T A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 得基础解系 $(-1, -1, 1)^T$,

对 $\lambda = 2$, 由 $(2E - A^T A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 得基础解系 $(-1, 1, 0)^T$,

对 $\lambda = 6$, 由 $(6E - A^T A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 得基础解系 $(1, 1, 2)^T$.

因为实对称矩阵特征值不同特征向量相互正交, 故只需单位化

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$



那么令

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{有 } x^T(A^T A)x = y^T A y = 2y_2^2 + 6y_3^2.$$

【评注】当然如果直接计算也可行,但计算量是非常大.

$$\begin{aligned} \text{二次型矩阵 } A^T A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & a & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1-a \\ 0 & 1+a^2 & 1-a \\ 1-a & 1-a & 3+a^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{由于 } A^T A \text{ 中有二阶子式 } \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1+a^2 \end{vmatrix} = 2(1+a^2) \neq 0.$$

所以二次型 f 的秩为 $2 \Leftrightarrow |A^T A| = 0$

$$\begin{aligned} \text{又 } |A^T A| &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1-a \\ 0 & 1+a^2 & 1-a \\ 1-a & 1-a & 3+a^2 \end{vmatrix} = 2(1+a^2)(3+a^2) - (1-a)^2(1+a^2) - 2(1-a)^2 \\ &= (a+1)^2(a^2+3), \end{aligned}$$

所以 $a = -1$.

难度系数 0.436, 0.377, 0.408.

5 (2013, 21 题, 11 分) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$, 记

$$\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

(I) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$;

(II) 若 α, β 正交且均为单位向量, 证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.

【证明】(I) 记 $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, 则

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = (x_1, x_2, x_3) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = (a_1, a_2, a_3) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

类似地 $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = x^T\beta = \beta^T x$

$$\begin{aligned} \text{故 } f(x_1, x_2, x_3) &= 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2 \\ &= 2(x^T\alpha)(\alpha^T x) + (x^T\beta)(\beta^T x) \\ &= x^T(2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T)x. \end{aligned}$$



又因 $2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$ 是对称矩阵, 所以二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$.

(II) 因 α, β 均是单位向量且相互正交, 有

$$A\alpha = (2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T)\alpha = 2\alpha(\alpha^T\alpha) + \beta(\beta^T\alpha) = 2\alpha$$

$$A\beta = (2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T)\beta = 2\alpha(\alpha^T\beta) + \beta(\beta^T\beta) = \beta$$

$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$ 是 A 的特征值.

又因为 $\alpha\alpha^T, \beta\beta^T$ 都是秩为 1 的矩阵, 所以

$$r(A) = r(2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T) \leq r(2\alpha\alpha^T) + r(\beta\beta^T) = 2 < 3$$

故 $\lambda_3 = 0$ 是矩阵 A 的特征值.

因此经正交变换二次型 f 的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.

【评注】 下面给出的是当年一些考生选择的方法, 当然这样解也是对的.

因为二次型

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2 \\ &= 2(a_1^2x_1^2 + a_2^2x_2^2 + a_3^2x_3^2 + 2a_1a_2x_1x_2 + 2a_1a_3x_1x_3 + 2a_2a_3x_2x_3) \\ &\quad + (b_1^2x_1^2 + b_2^2x_2^2 + b_3^2x_3^2 + 2b_1b_2x_1x_2 + 2b_1b_3x_1x_3 + 2b_2b_3x_2x_3) \\ &= (2a_1^2 + b_1^2)x_1^2 + (2a_2^2 + b_2^2)x_2^2 + (2a_3^2 + b_3^2)x_3^2 + 2(2a_1a_2 + b_1b_2)x_1x_2 \\ &\quad + 2(2a_1a_3 + b_1b_3)x_1x_3 + 2(2a_2a_3 + b_2b_3)x_2x_3, \end{aligned}$$

所以按定义二次型矩阵

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 2a_1^2 + b_1^2 & 2a_1a_2 + b_1b_2 & 2a_1a_3 + b_1b_3 \\ 2a_1a_2 + b_1b_2 & 2a_2^2 + b_2^2 & 2a_2a_3 + b_2b_3 \\ 2a_1a_3 + b_1b_3 & 2a_2a_3 + b_2b_3 & 2a_3^2 + b_3^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2a_1^2 & 2a_1a_2 & 2a_1a_3 \\ 2a_1a_2 & 2a_2^2 & 2a_2a_3 \\ 2a_1a_3 & 2a_2a_3 & 2a_3^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1^2 & b_1b_2 & b_1b_3 \\ b_1b_2 & b_2^2 & b_2b_3 \\ b_1b_3 & b_2b_3 & b_3^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

故 $A = 2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$.

难度系数 0.454, 0.400, 0.426.

6 (2014, 13 题, 4 分) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1, 则 a 的取值范围是_____.

【答案】 $[-2, 2]$.

【解析】 由配方法可得

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + 2ax_1x_3 + a^2x_3^2 - (x_2^2 - 4x_2x_3 + 4x_3^2) + 4x_3^2 - a^2x_3^2 \\ &= (x_1 + ax_3)^2 - (x_2 - 2x_3)^2 + (4 - a^2)x_3^2 \end{aligned}$$

因为负惯性指数是 1, 故 $4 - a^2 \geq 0$, 解出 $a \in [-2, 2]$.

7 (2015, 6 题, 4 分) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $x = Py$ 下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 其中 $P = [e_1, e_2, e_3]$, 若 $Q = [e_1, -e_3, e_2]$, 则 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为

(A) $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$. (B) $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$. (C) $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$. (D) $2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.

【答案】 A.

【解析】 f 在正交变换 $x = Py$ 下标准形 $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 意味着 A 的特征值: 2, 1, -1.

又 $P = [e_1, e_2, e_3]$ 说明 2, 1, -1 的特征向量依次为 e_1, e_2, e_3 .



由 e_3 是 -1 的特征向量, 知 $-e_3$ 仍是 -1 的特征向量, 故 $Q = [e_1, -e_3, e_2]$ 时, 二次型标准形为: $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$, 应选 (A).

或者, 由

$$Q = [e_1, -e_3, e_2] = [e_1, e_2, e_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

知

$$x = Qy = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} y_1 \\ y_3 \\ -y_2 \end{bmatrix}$$

又因二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $x = Py$ 下的标准形是 $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 所以 f 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为: $2y_1^2 + y_3^2 - (-y_2)^2$, 即 $2y_1^2 + y_3^2 - y_2^2$.

本题难度系数 0.353.

8 (2016, 6 题, 4 分) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$, 则 $f(x_1, x_2, x_3) = 2$ 在空间直角坐标下表示的二次曲面为

(A) 单叶双曲面.

(B) 双叶双曲面.

(C) 椭球面.

(D) 柱面.

【答案】 B.

【解析】 二次型矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, 由

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda + 1)^2$$

可知矩阵 A 的特征值为 $5, -1, -1$.

那么经直角坐标变换二次型的标准形为 $5y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 = 2$, 则表示的二次曲面为双叶双曲面.

9 (2017, 21 题, 11 分) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 + ax_3^2 + 2x_1x_2 - 8x_1x_3 + 2x_2x_3$ 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$, 求 a 的值及一个正交矩阵 Q .

【解】 二次型矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & a \end{bmatrix}$$

由正交变换下标准形是 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$, 说明 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, 0$. 所以

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & a \end{vmatrix} = -3(a - 2) = 0$$

故 $a = 2$.

$$\text{由 } |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & 4 \\ -1 & \lambda + 1 & -1 \\ 4 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 6 & 0 & 6 - \lambda \\ -1 & \lambda + 1 & -1 \\ 4 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$$



$$= \begin{vmatrix} \lambda-6 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda+1 & -2 \\ 4 & -1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+3)(\lambda-6) = 0,$$

得矩阵 A 的特征值: $6, -3, 0$.

由 $(6E - A)x = 0$ 得基础解系 $\alpha_1 = (1, 0, -1)^T$, 即 $\lambda = 6$ 的特征向量.

由 $(-3E - A)x = 0$ 得基础解系 $\alpha_2 = (1, -1, 1)^T$, 即 $\lambda = -3$ 的特征向量.

由 $(0E - A)x = 0$ 得基础解系 $\alpha_3 = (1, 2, 1)^T$, 即 $\lambda = 0$ 的特征向量.

因实对称矩阵特征值不同特征向量相互正交, 故只需单位化, 有

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{那么 } Q = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \text{ 经 } x = Qy \text{ 有}$$

$$x^T A x = y^T \Lambda y = 6y_1^2 - 3y_2^2$$

【评注】 本题难度系数 0.574, 0.485, 0.539.

10 (2018, 20 题, 11 分) 设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + ax_3)^2$, 其中 a 是参数.

(I) 求 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解;

(II) 求 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的规范形.

【解】 (I) 平方和 $f(x_1, x_2, x_3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + ax_3 = 0. \end{cases} \quad (*)$

$$\text{由 } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = a - 2,$$

如果 $a \neq 2$, $(*)$ 只有零解, 即 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 只有零解, $x = 0$.

$$\text{如果 } a = 2, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$(*)$ 基础解系为 $(-2, -1, 1)^T$.

故 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解为 $x = k(-2, -1, 1)^T$, k 为任意常数.

(II) 当 $a \neq 2$ 时,

$$\text{令 } \begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + x_3, \\ y_2 = x_2 + x_3, \\ y_3 = x_1 + ax_3, \end{cases} \quad (**)$$



因 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} \neq 0, (* *)$ 是坐标变换.

$f(x_1, x_2, x_3)$ 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.

当 $a = 2$ 时,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + 2x_3)^2 \\ &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 \\ &= 2\left[x_1^2 - x_1(x_2 - 3x_3) + \frac{1}{4}(x_2 - 3x_3)^2\right] + 2x_2^2 + 6x_3^2 - \frac{1}{2}(x_2 - 3x_3)^2 \\ &= 2\left(x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{2}x_2^2 + 3x_2x_3 + \frac{3}{2}x_3^2 \\ &= 2\left(x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{2}(x_2 + x_3)^2 \end{aligned}$$

可得规范形 $y_1^2 + y_2^2$.

【评注】 当 $a = 2$ 时,如注意到 $(x_1 - x_2 + x_3) + (x_2 + x_3) = x_1 + 2x_3$,也可先经坐标变换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + x_3, \\ y_2 = x_2 + x_3, \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$

得 $f = \mathbf{y}^T \mathbf{B} \mathbf{y} = y_1^2 + y_2^2 + (y_1 + y_2)^2 = 2y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_1y_2$.

$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 由于矩阵 $\mathbf{B}$ 的特征值 3, 1, 0, 从而规范形为 $z_1^2 + z_2^2$.

本题难度系数 0.347, 0.248, 0.303.

11 (2019, 5 题, 4 分) 设 $\mathbf{A}$ 是三阶实对称矩阵, $\mathbf{E}$ 是 3 阶单位矩阵. 若 $\mathbf{A}^2 + \mathbf{A} = 2\mathbf{E}$, 且 $|\mathbf{A}| = 4$, 则二次型 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 的规范形为

(A) $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.

(B) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.

(C) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$.

(D) $-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$.

【答案】 C.

【解析】 规范形由 p, q 而定, 判断特征值入手.

设 $\mathbf{A}\alpha = \lambda\alpha, \alpha \neq \mathbf{0}$. 由 $\mathbf{A}^2 + \mathbf{A} = 2\mathbf{E}$, 有 $\mathbf{A}^2\alpha + \mathbf{A}\alpha - 2\alpha = \mathbf{0}$ 即 $(\lambda^2 + \lambda - 2)\alpha = \mathbf{0}$,

知 $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, 矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值只能是 1 或 -2.

又因 $|\mathbf{A}| = 4$, 所以矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值是: 1, -2, -2.

从而二次型的规范形是 $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$. 选(C).

12 (2020, 20 题, 11 分) 设二次型 $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$ 经正交变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{Q} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ 化为

二次型 $g(y_1, y_2) = ay_1^2 + 4y_1y_2 + by_2^2$, 其中 $a \geq b$.

(I) 求 a, b 值.

(II) 求正交矩阵 $\mathbf{Q}$.

【解】 (I) 二次型 f 经正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ 化为二次型 g . 记二次型 f, g 的矩阵分别是 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$.

即



$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a & 2 \\ 2 & b \end{bmatrix}$$

因 $A \sim B$, 于是 $\sum a_{ii} = \sum b_{ii}$, $|A| = |B|$, 即 $\begin{cases} a+b=5, \\ ab=4. \end{cases}$

又因 $a \geq b$, 故 $a=4, b=1$.

(II) 对二次型 $f = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$ 和 $g = 4y_1^2 + 4y_1y_2 + y_2^2$,

只要令 $\begin{cases} x_1 = y_2, \\ x_2 = -y_1, \end{cases}$ 即 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$.

$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ 是正交矩阵合于所求.

【评注】如求出 A 的特征向量并单位化构造正交矩阵 $Q_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$,

经 $x = Q_1 z$ 得 $x^T A x = 5z_1^2$.

类似构造正交矩阵 Q_2 使 $y^T B y = 5z_1^2$, 即 $x = Q_1 z, y = Q_2 z$ 有 $z = Q_2^{-1} y$,

从而 $x = Q_1 Q_2^{-1} y$ 而得 $Q = Q_1 Q_2^{-1}$ 亦可.

练习题

1. (2004, 数三, 4分) 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 + x_1)^2$ 的秩为

2. (2003, 数三, 13分) 设二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x^T A x = ax_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2bx_1x_3 \quad (b > 0)$$

其中二次型的矩阵 A 的特征值之和为 1, 特征值之积为 -12.

(I) 求 a, b 的值;

(II) 利用正交变换将二次型 f 化为标准形, 并写出所用的正交变换和对应的正交矩阵.

练习题参考答案

1. 【答案】 2.

【解析】因为二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + 2x_3x_1$,

二次型矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, 易见 $r(A) = 2$, 所以二次型的秩为 2.

【评注】 本题的陷阱: 注意 $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2, \\ y_2 = x_2 - x_3, \\ y_3 = x_1 + x_3 \end{cases}$ 不是坐标变换, (因为行列式为 0), 不要误

以为秩是 3.

2. 【解】 (1) 二次型 f 的矩阵为 $A = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{bmatrix}$, 设 A 的特征值为 $\lambda_i (i = 1, 2, 3)$, 由题设,

$$\text{有} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a + 2 + (-2) = 1, \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = |A| = 2(-2a - b^2) = -12. \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = 2 \text{ (已知 } b > 0 \text{)}.$$

(2) 由矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2 (\lambda + 3)$$

得到 A 的特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -3$.

$$\text{对于 } \lambda = 2, \text{ 由 } (2E - A)x = 0, \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

得到属于 $\lambda = 2$ 的线性无关的特征向量 $\alpha_1 = (0, 1, 0)^T, \alpha_2 = (2, 0, 1)^T$.

$$\text{对于 } \lambda = -3, \text{ 由 } (-3E - A)x = 0, \begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

得到属于 $\lambda = -3$ 的特征向量 $\alpha_3 = (1, 0, -2)^T$.

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 已两两正交, 故只需单位化, 有

$$\gamma_1 = (0, 1, 0)^T, \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 0, 1)^T, \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, -2)^T$$

$$\text{那么, 令 } P = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \text{ 则 } P \text{ 为正交矩阵, 在正交变换 } x = Py \text{ 下, 有}$$

$$P^T A P = P^{-1} A P = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & -3 \end{bmatrix}$$

二次型的标准形为 $f = 2y_1^2 + 2y_2^2 - 3y_3^2$.

二、二次型的正定

试题特点

围绕正定的定义“ $\forall x \neq 0$ 必有 $x^T A x > 0$ ”设计的试题一般难度较大, 用特征值(参看 2010 年试题)、顺序主子式的考题是较容易的.

复习时, 注意考定义法的题(参看下面的练习题).



练习题

1. (1997, 数三, 3 分) 若二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + tx_2x_3$ 是正定的, 则 t 的取值范围是_____.

2. (1999, 数三, 7 分) 设 A 为 $m \times n$ 实矩阵, E 为 n 阶单位矩阵, 已知矩阵 $B = \lambda E + A^T A$, 试证: 当 $\lambda > 0$ 时, 矩阵 B 为正定矩阵.

3. (2000, 数三, 9 分) 设有 n 元实二次型

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 + a_1 x_2)^2 + (x_2 + a_2 x_3)^2 + \dots + (x_{n-1} + a_{n-1} x_n)^2 + (x_n + a_n x_1)^2$$

其中 $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 为实数. 试问: 当 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 满足何种条件时, 二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为正定二次型.

4. (2005, 数三, 13 分) 设 $D = \begin{bmatrix} A & C \\ C^T & B \end{bmatrix}$ 为正定矩阵, 其中 A, B 分别为 m 阶, n 阶对称矩阵, C 为 $m \times n$ 阶矩阵.

(I) 计算 $P^T D P$, 其中 $P = \begin{bmatrix} E_m & -A^{-1}C \\ O & E_n \end{bmatrix}$;

(II) 利用 (I) 的结果判断矩阵 $B - C^T A^{-1} C$ 是否为正定矩阵, 并证明你的结论.

练习题参考答案

1. 【答案】 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

【解析】 二次型 f 的矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{t}{2} \\ 0 & \frac{t}{2} & 1 \end{bmatrix}$, f 正定 $\Leftrightarrow A$ 的顺序主子式全大于 0.

$$\Delta_1 = 2, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \Delta_3 = |A| = 1 - \frac{1}{2}t^2 > 0$$

所以 $-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$.

2. 【证明】 因 $B^T = (\lambda E + A^T A)^T = \lambda E + A^T A = B$, 故 B 是 n 阶实对称矩阵. 构造二次型 $x^T B x$, 则 $x^T B x = x^T (\lambda E + A^T A) x = \lambda x^T x + x^T A^T A x = \lambda x^T x + (Ax)^T (Ax)$.

$\forall x \neq 0$, 恒有 $x^T x > 0$, $(Ax)^T (Ax) \geq 0$. 因此, 当 $\lambda > 0$ 时, $\forall x \neq 0$, 有

$$x^T B x = \lambda x^T x + (Ax)^T A x > 0$$

二次型为正定二次型, 故 B 为正定矩阵.

【评注】 这是数学三当年全卷得分率最低的一道题, 得零分者占 62%, 得满分的不足 3%, 人均仅 1.1 分. 反映出考生对正定矩阵的性质及判别法不熟悉, 对于用定义法证明及内积 $\alpha^T \alpha$ 的理解都有欠缺.

3. 【解】 由已知条件知,对任意的 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 恒有 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$, 其中等号成立的充分必要条件是

$$\begin{cases} x_1 + a_1 x_2 = 0, \\ x_2 + a_2 x_3 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ x_{n-1} + a_{n-1} x_n = 0, \\ x_n + a_n x_1 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

根据正定的定义,只要 $x \neq 0$, 恒有 $x^T A x > 0$, 则 $x^T A x$ 是正定二次型. 为此, 只要方程组 (1) 仅有零解, 就必有当 $x \neq 0$ 时, $x_1 + a_1 x_2, x_2 + a_2 x_3, \dots$ 恒不全为 0, 从而 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$, 亦即 f 是正定二次型.

而方程组 (1) 只有零解的充分必要条件是系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + (-1)^{n+1} a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0 \quad (2)$$

即当 $a_1 a_2 \cdots a_n \neq (-1)^n$ 时, 二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为正定二次型.

【评注】 本题考得仍不好, 得分偏低, 还是对二次型正定的理解上有问题. 由二次型 f 正定转化为齐次方程组只有零解, 进而转换为 n 阶行列式的计算, 如果方程组 (1) 多写几个方程, 行列式 (2) 多写几行多写几列, 计算时可能会少许多无谓的差错.

4. 【解】 (I) 因为 $P^T = \begin{bmatrix} E_m & -A^{-1}C^T \\ O & E_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_m & O \\ -C^T A^{-1} & E_n \end{bmatrix}$, 所以

$$\begin{aligned} P^T D P &= \begin{bmatrix} E_m & O \\ -C^T A^{-1} & E_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & C \\ C^T & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_m & -A^{-1}C \\ O & E_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A & C \\ O & B - C^T A^{-1}C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_m & -A^{-1}C \\ O & E_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & O \\ O & B - C^T A^{-1}C \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(II) 因为 D 是对称矩阵, 知 $P^T D P$ 是对称矩阵, 所以 $B - C^T A^{-1}C$ 为对称矩阵, 又因矩阵 D 与 $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B - C^T A^{-1}C \end{bmatrix}$ 合同, 且 D 正定, 知矩阵 $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B - C^T A^{-1}C \end{bmatrix}$ 正定, 那么, $\forall \begin{bmatrix} O \\ Y \end{bmatrix} \neq O$, 恒有

$$(O, Y^T) \begin{bmatrix} A & O \\ O & B - C^T A^{-1}C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ Y \end{bmatrix} = Y^T (B - C^T A^{-1}C) Y > 0$$

所以矩阵 $B - C^T A^{-1}C$ 正定.

【评注】 对于抽象的二次型其正定性的判断往往要考虑用定义法, 另外不应忘记首先要检验矩阵的对称性. 本题考的较差, 难度系数仅 0.259.



三、合同矩阵

试题特点

不是重点, 填空、选择为主.

$$A \simeq B \Leftrightarrow p_A = p_B, q_A = q_B$$

通过什么来确定正、负惯性指数? 特征值!!! 有时也可用配方法.

注意相似与合同的联系和区别.

练习题

1. (2008, 数四, 4 分) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, 则在实数域上与 A 合同的矩阵为

(A) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. (C) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

2. (1996, 数三, 8 分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(I) 已知 A 的一个特征值为 3, 试求 y ;

(II) 求可逆矩阵 P , 使 $(AP)^T(AP)$ 为对角矩阵.

练习题参考答案

1. 【答案】 D.

【解析】 A 与 B 合同 $\Leftrightarrow x^T Ax$ 与 $x^T Bx$ 有相同的正惯性指数, 及相同的负惯性指数. 而正(负) 惯性指数的问题可由特征值的正(负) 来决定. 因为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$$

故 $p = 1, q = 1$.

本题中(D) 的矩阵, 特征值为 $\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$, 故 $p = 1, q = 1$.

所以选(D).

【评注】 本题的矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 不仅和矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ 合同, 而且它们也相似, 因为它们

都和对角矩阵 $\begin{bmatrix} 3 & \\ & -1 \end{bmatrix}$ 相似.

2.【解】 (I) 因为 $\lambda = 3$ 是 A 的特征值, 故

$$|3E - A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-y & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3-y & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 8(2-y) = 0$$

所以 $y = 2$.

(II) 由于 $A^T = A$, 要 $(AP)^T(AP) = P^T A^2 P = \Lambda$, 而 $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ 是对称矩阵, 故可构造

二次型 $x^T A^2 x$, 将其化为标准形 $y^T \Lambda y$. 即有 A^2 与 Λ 合同. 亦即 $P^T A^2 P = \Lambda$. 由于

$$\begin{aligned} x^T A^2 x &= x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 5x_4^2 + 8x_3x_4 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + 5\left(x_3^2 + \frac{8}{5}x_3x_4 + \frac{16}{25}x_4^2\right) + 5x_4^2 - \frac{16}{5}x_4^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + 5\left(x_3 + \frac{4}{5}x_4\right)^2 + \frac{9}{5}x_4^2 \end{aligned}$$

那么, 令 $y_1 = x_1, y_2 = x_2, y_3 = x_3 + \frac{4}{5}x_4, y_4 = x_4$, 即经坐标变换

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

有 $x^T A^2 x = y_1^2 + y_2^2 + 5y_3^2 + \frac{9}{5}y_4^2$.

$$\text{所以, 取 } P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 有 } (AP)^T(AP) = P^T A^2 P = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 5 & \\ & & & \frac{9}{5} \end{bmatrix}.$$



第三部分 概率论与数理统计

第一章 随机事件和概率

本章导读

本章是概率论与数理统计的基础,近几年单独出本章的考题较少,平均2~3年一个小题,大多作为基本知识点出现在以后的各章考题中.应该将本章中的重点的基本概念、基本理论和基本方法理解透彻和熟练掌握.

试题特点

本章的考题大多是选择题或填空题,考核重点有事件的关系和运算、概率的性质、概率的五大公式:加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式以及贝叶斯公式,还有古典概型和伯努利概型.

一部分考生对古典概型中的难题感到困难.其实考试大纲对古典概型和几何概型只要会计算一般难度的题型就可以,不必刻意去做各种复杂的题型.

本章的选择题或填空题一般会综合3~4个考点,计算量不太大.

考题详析

一、事件关系、概率性质和五大公式

1 (2012, 14题, 4分) 设 A, B, C 是随机事件, A 与 C 互不相容, $P(AB) = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{1}{3}$, 则 $P(AB | \bar{C}) =$ _____.

【答案】 $\frac{3}{4}$.

【解析】 A 与 C 互不相容, 即有 $\bar{C} \supset A$, 当然更有 $\bar{C} \supset AB$, 所以

$$P(AB | \bar{C}) = \frac{P(AB\bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{P(AB)}{1 - P(C)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$$



2 (2014, 7 题, 4 分) 设随机事件 A 与 B 相互独立, 且 $P(B) = 0.5, P(A - B) = 0.3$, 则 $P(B - A) =$

- (A) 0.1. (B) 0.2. (C) 0.3. (D) 0.4.

【答案】 B.

【解析】 A, B 独立, 则 $A, \bar{B}$ 独立, $\bar{A}, B$ 也独立, 而 $A - B = A\bar{B}, B - A = B\bar{A}$ 可用独立性来计算.

$P(A - B) = P(A\bar{B}) = P(A)P(\bar{B}) = 0.3$, 即 $P(A) \cdot 0.5 = 0.3$, 所以 $P(A) = 0.6$;

$P(B - A) = P(B\bar{A}) = P(B)P(\bar{A}) = 0.5 \times 0.4 = 0.2$.

3 (2015, 7 题, 4 分) 若 A, B 为任意两个随机事件, 则

- (A) $P(AB) \leq P(A)P(B)$. (B) $P(AB) \geq P(A)P(B)$.
(C) $P(AB) \leq \frac{P(A) + P(B)}{2}$. (D) $P(AB) \geq \frac{P(A) + P(B)}{2}$.

【答案】 C.

【解析】 由于 $AB \subset (A \cup B)$, 故 $P(AB) \leq P(A \cup B)$. 又根据加法公式

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

所以

$$P(AB) \leq P(A) + P(B) - P(AB), \text{ 即 } 2P(AB) \leq P(A) + P(B)$$

$$P(AB) \leq \frac{P(A) + P(B)}{2}$$

答案应选(C).

4 (2017, 7 题, 4 分) 设 A, B 为随机事件, 若 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$, 则 $P(A | B) > P(A | \bar{B})$ 的充分必要条件是

- (A) $P(B | A) > P(B | \bar{A})$. (B) $P(B | A) < P(B | \bar{A})$.
(C) $P(\bar{B} | A) > P(B | \bar{A})$. (D) $P(\bar{B} | A) < P(B | \bar{A})$.

【答案】 A.

【解析】 (方法一) 题设条件 $P(A | B) > P(A | \bar{B})$ 等价于

$$\frac{P(AB)}{P(B)} > \frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A) - P(AB)}{1 - P(B)}$$

也就是 $P(AB) - P(B)P(AB) > P(A)P(B) - P(B)P(AB)$, 即 $P(AB) > P(A)P(B)$.

总之 $P(A | B) > P(A | \bar{B})$ 的充要条件为 $P(AB) > P(A)P(B)$.

如果对称地将 A, B 表示为 $P(BA) > P(B)P(A)$, 则充要条件为 $P(B | A) > P(B | \bar{A})$.

答案应选(A).

【方法二】 选特殊情况 $A = B, 0 < P(A) < 1$, 则 $P(A | B) = P(A | A) = 1$,

$P(A | \bar{B}) = P(A | \bar{A}) = 0$, 所以 $A = B$ 时条件 $P(A | B) > P(A | \bar{B})$ 成立.

现在考虑在 $A = B$ 条件下四个选项

(A) $P(B | A) = P(A | A) = 1, P(B | \bar{A}) = P(A | \bar{A}) = 0$, 故 $P(B | A) > P(B | \bar{A})$ 成立.

(B) 显然, $P(B | A) < P(B | \bar{A})$ 不成立.

(C) $P(\bar{B} | A) = P(\bar{A} | A) = 0, P(B | \bar{A}) = P(A | \bar{A}) = 0$, 故 $P(\bar{B} | A) > P(B | \bar{A})$ 不成立.



(D) 显然, $P(\bar{B} | A) < P(B | \bar{A})$ 也不成立.

总之(B)(C)(D) 不可能是 $P(A | B) > P(A | \bar{B})$ 的充要条件. 因为 $A = B$ 时, 题设条件成立, 而(B)(C)(D) 均不成立. 答案必为(A).

5 (2018, 14 题, 4 分) 设随机事件 A 与 B 相互独立, A 与 C 相互独立, $BC = \emptyset$, 若

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}, P(AC | AB \cup C) = \frac{1}{4}$$

则 $P(C) =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{4}$.

【解析】 $P(AC | AB \cup C) = \frac{P(AC(AB \cup C))}{P(AB \cup C)} = \frac{1}{4}$,

其中 $P(AC(AB \cup C)) = P(ABC \cup AC) = P(AC) = P(A)P(C) = \frac{1}{2}P(C)$.

和 $P(AB \cup C) = P(AB) + P(C) = P(A)P(B) + P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + P(C) = \frac{1}{4} + P(C)$.

所以, $\frac{1}{4} = \frac{\frac{1}{2}P(C)}{\frac{1}{4} + P(C)}$, 即 $P(C) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}P(C)$, $P(C) = \frac{1}{4}$.

6 (2019, 7 题, 4 分) 设 A, B 为随机事件, 则 $P(A) = P(B)$ 的充分必要条件是

- (A) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. (B) $P(AB) = P(A)P(B)$.
(C) $P(A\bar{B}) = P(B\bar{A})$. (D) $P(AB) = P(\bar{A}\bar{B})$.

【答案】 C.

【解析】 本题考查概率的加法、减法公式等基本性质.

$P(A\bar{B}) = P(A - B) = P(A) - P(AB)$, 而 $P(B\bar{A}) = P(B - A) = P(B) - P(AB)$,
 $P(A\bar{B}) = P(B\bar{A})$, 即 $P(A) - P(AB) = P(B) - P(AB)$, 等价于 $P(A) = P(B)$.

答案应选(C).

7 (2020, 7 题, 4 分) 设 A, B, C 为三个随机事件, 且 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$, $P(AB) =$

0 , $P(AC) = P(BC) = \frac{1}{12}$, 则 A, B, C 中恰有一个事件发生的概率为

- (A) $\frac{3}{4}$. (B) $\frac{2}{3}$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) $\frac{5}{12}$.

【答案】 D.

【解析】 A, B, C 中恰有一个事件发生即 $(A \cup B \cup C) - (AB \cup BC \cup AC)$. 因为 $P(AB) = 0$, 故 $P(ABC) = 0$, 所以恰有一个事件发生可以只考虑 $(A \cup B \cup C) - (BC \cup AC)$ 的概率

$$\begin{aligned} P((A \cup B \cup C) - (BC \cup AC)) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(BC) - P(AC) - P(BC) - P(AC) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} - \frac{1}{12} - \frac{1}{12} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

答案选(D).



二、古典概型、几何概型和伯努利概型

练习题

(1997, 3分) 袋中有 50 个乒乓球, 其中 20 个是黄球, 30 个是白球, 今有两人依次随机地从袋中各取一球, 取后不放回, 则第二个人取得黄球的概率是_____.

练习题参考答案

【答案】 $\frac{2}{5}$.

【解析】 一般理解随机事件“第二个人取得黄球”与第一个人取得的是什么球有关, 这就要用全概率公式来计算, 但也可以用古典型概率来解, 这会简单得多.

(方法一) 设事件 A_i 表示第 i 个人取得黄球, $i = 1, 2$, 则根据全概率公式:

$$P(A_2) = P(A_1)P(A_2 | A_1) + P(\bar{A}_1)P(A_2 | \bar{A}_1) = \frac{20}{50} \times \frac{19}{49} + \frac{30}{50} \times \frac{20}{49} = \frac{2}{5}$$

(方法二) 只考虑第二个人取得的球, 这 50 个球中每一个都会等可能地被第二个人取到, 而取到黄球的可能有 20 个, 故所求概率为 $\frac{20}{50} = \frac{2}{5}$.

【评注】 在古典型概率和几何型概率的求解中, 考生们会有无从下手的困难, 因为往往要求自己先去构造相应的样本空间. 然后再计算样本空间中和要求事件中的样本点数. 如果在反映要求事件的条件下把样本空间构造得越简单, 则相应的计算就越简单, 例如把本题解成方法一, 计算量就稍大些.



第二章 随机变量及其分布

本章导读

本章作为基础渗透到以后的各章考题中,尤其是第三章多维随机变量及其分布.近几年的考题大多在多维随机变量这章中,多维要会做,当然一维也要会做,尤其是多维随机变量函数的分布的考题近年考得较多,不过没有一维的基础,多维就无法掌握.

试题特点

本章的考点:分布函数、分布律、概率密度,常考的一些分布的性质.这些考点常以选择题或填空题的形式来考查.

随机变量函数的分布常出现在较大的解答题中.

考题详析

1 (2010, 7题, 4分) 设随机变量 X 的分布函数 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1, \\ 1 - e^{-x}, & x \geq 1. \end{cases}$

则 $P\{X = 1\} =$

- (A) 0. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $\frac{1}{2} - e^{-1}$. (D) $1 - e^{-1}$.

【答案】 C.

【解析】 根据分布函数的性质 $P\{X = x\} = F(x) - F(x-0)$, 不难计算 $P\{X = 1\}$ 的值.

$$P\{X = 1\} = F(1) - F(1-0) = 1 - e^{-1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - e^{-1}$$

所以答案应选(C).

2 (2010, 8题, 4分) 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度, $f_2(x)$ 为 $[-1, 3]$ 上均匀分布的概率密度, 若

$$f(x) = \begin{cases} af_1(x), & x \leq 0, \\ bf_2(x), & x > 0 \end{cases} \quad (a > 0, b > 0)$$

为概率密度, 则 a, b 应满足

- (A) $2a + 3b = 4$. (B) $3a + 2b = 4$.
(C) $a + b = 1$. (D) $a + b = 2$.

【答案】 A.

【解析】 根据密度函数的性质: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$, 以正态分布和均匀分布的性质, 可以求出 a ,



b 应满足的条件.

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 a f_1(x) dx + \int_0^{+\infty} b f_2(x) dx = a \int_{-\infty}^0 f_1(x) dx + b \int_0^{+\infty} f_2(x) dx$$

$f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度, 其对称中心在 $x = 0$ 处, 故 $\int_{-\infty}^0 f_1(x) dx = \frac{1}{2}$.

$f_2(x)$ 为 $[-1, 3]$ 上均匀分布的概率密度, 即

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & -1 \leq x \leq 3, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\int_0^{+\infty} f_2(x) dx = \int_0^3 \frac{1}{4} dx = \frac{3}{4}. \text{ 所以 } 1 = a \cdot \frac{1}{2} + b \cdot \frac{3}{4}, \text{ 即 } 2a + 3b = 4. \text{ 答案选(A).}$$

3 (2013, 7 题, 4 分) 设 X_1, X_2, X_3 是随机变量, 且 $X_1 \sim N(0, 1), X_2 \sim N(0, 2^2), X_3 \sim N(5, 3^2)$, $p_i = P\{-2 \leq X_i \leq 2\} (i = 1, 2, 3)$, 则

(A) $p_1 > p_2 > p_3$.

(B) $p_2 > p_1 > p_3$.

(C) $p_3 > p_1 > p_2$.

(D) $p_1 > p_3 > p_2$.

【答案】 A.

【解析】 因为 $X_1 \sim N(0, 1)$, 所以

$$p_1 = P\{-2 \leq X_1 \leq 2\} = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1$$

因为 $X_2 \sim N(0, 2^2)$, 所以

$$\begin{aligned} p_2 &= P\{-2 \leq X_2 \leq 2\} = P\left\{-1 \leq \frac{X_2 - 0}{2} \leq 1\right\} \\ &= \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 \end{aligned}$$

因为 $X_3 \sim N(5, 3^2)$, 所以

$$p_3 = P\{-2 \leq X_3 \leq 2\} = P\left\{-\frac{7}{3} \leq \frac{X_3 - 5}{3} \leq -1\right\} = \Phi(-1) - \Phi\left(-\frac{7}{3}\right)$$

因为 $\Phi(x)$ 为单调增加函数, 所以

$$p_1 = 2\Phi(2) - 1 > 2\Phi(1) - 1 = p_2$$

又因为 $\Phi(1) - \Phi(-1) > 68\%$, 所以

$$p_2 = \Phi(1) - \Phi(-1)$$

$$> 0.5 > \Phi(-1) > \Phi(-1) - \Phi\left(-\frac{7}{3}\right) = p_3$$

故 $p_1 > p_2 > p_3$, 所以应选(A).

4 (2013, 14 题, 4 分) 设随机变量 Y 服从参数为 1 的指数分布, a 为常数且大于零, 则 $P\{Y \leq a+1 \mid Y > a\} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $1 - \frac{1}{e}$.

【解析】 $P\{Y \leq a+1 \mid Y > a\} = 1 - P\{Y > a+1 \mid Y > a\} = 1 - \frac{P\{Y > a+1, Y > a\}}{P\{Y > a\}}$

$$= 1 - \frac{P\{Y > a+1\}}{P\{Y > a\}} = 1 - \frac{\int_{a+1}^{+\infty} e^{-t} dt}{\int_a^{+\infty} e^{-t} dt} = 1 - \frac{e^{-(a+1)}}{e^{-a}} = 1 - \frac{1}{e}.$$


所以应填 $1 - \frac{1}{e}$.

【评注】 如果记得指数分布具有无记忆性:

设 $X \sim E(\lambda)$, 当 $s, t > 0$ 时, $P\{X > s + t | X > t\} = P\{X > s\}$.

本题可以直接求解:

$$P\{Y \leq a + 1 | Y > a\} = 1 - P\{Y > a + 1 | Y > a\} = 1 - P\{Y > 1\} = 1 - e^{-1}$$

5 (2016, 7 题, 4 分) 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ($\sigma > 0$), 记 $p = P\{X \leq \mu + \sigma^2\}$, 则

(A) p 随着 μ 的增加而增加.

(B) p 随着 σ 的增加而增加.

(C) p 随着 μ 的增加而减少.

(D) p 随着 σ 的增加而减少.

【答案】 B.

【解析】 因为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 所以 $\frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$, 其分布函数为 $\Phi(x)$.

所以 $p = P\{X \leq \mu + \sigma^2\} = P\left\{\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \sigma\right\} = \Phi(\sigma)$, 由标准正态分布函数的单调性, 知 p 随着 σ 的增加而增加, 故答案应选(B).

6 (2018, 7 题, 4 分) 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 满足 $f(1+x) = f(1-x)$, 且 $\int_0^2 f(x) dx = 0.6$,

6, 则 $P\{X < 0\} =$

(A) 0.2.

(B) 0.3.

(C) 0.4.

(D) 0.5.

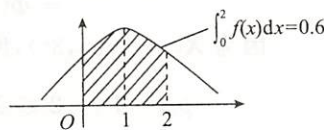
【答案】 A.

【解析】 因为 $f(1+x) = f(1-x)$, 所以概率密度函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处对称.

(方法一) 用图形表示

根据对称性 $P\{X < 0\} = P\{X > 2\} = \frac{1 - 0.6}{2} = 0.2$.

答案应选(A).



$$\begin{aligned} \text{(方法二)} \quad 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx + \int_2^{+\infty} f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^0 f(x) dx + 0.6 + \int_1^{+\infty} f(1+t) dt = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + 0.6 + \int_1^{+\infty} f(1-t) dt \\ &= \int_{-\infty}^0 f(x) dx + 0.6 + \int_0^{-\infty} f(s) d(-s) = 2 \int_{-\infty}^0 f(x) dx + 0.6 \end{aligned}$$

所以 $P\{X < 0\} = \int_{-\infty}^0 f(x) dx = 0.2$. 答案应选(A).

7 (2019, 8 题, 4 分) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且都服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P\{|X - Y| < 1\}$

(A) 与 μ 无关, 而与 σ^2 有关.

(B) 与 μ 有关, 而与 σ^2 无关.

(C) 与 μ, σ^2 都有关.

(D) 与 μ, σ^2 都无关.

【答案】 A.

【解析】 X, Y 独立且都服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则 (X, Y) 必为二维正态分布. $(X - Y)$ 服从 $N(0, 2\sigma^2)$ 分布, 可以推出 $P\{|X - Y| < 1\}$ 与 μ 无关, 只与 σ^2 有关.

$$P\{|X - Y| < 1\} = P\{-1 < (X - Y) < 1\} = P\{-1 < (X - Y) \leq 1\}$$

$$= P\left\{-\frac{1}{\sqrt{2\sigma^2}} < \frac{X - Y}{\sqrt{2\sigma^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2}}\right\}$$



$$= P\left\{\frac{X-Y}{\sqrt{2\sigma^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2}}\right\} - P\left\{\frac{X-Y}{\sqrt{2\sigma^2}} \leq -\frac{1}{\sqrt{2\sigma^2}}\right\}$$

$\frac{X-Y}{\sqrt{2\sigma^2}} \sim N(0,1)$, 记 $N(0,1)$ 的分布函数为 $\Phi(x)$, 则

$$P\{|X-Y| < 1\} = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2\sigma^2}}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{\sqrt{2\sigma^2}}\right) = 2\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2\sigma^2}}\right) - 1$$

答案应选(A).

练习题

(2004, 数三, 4分) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$, 对给定的 $\alpha (0 < \alpha < 1)$ 数 u_α 满足 $P\{X > u_\alpha\} = \alpha$, 若 $P\{|X| < x\} = \alpha$, 则 x 等于

- (A) $u_{\frac{\alpha}{2}}$. (B) $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$. (C) $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$. (D) $u_{1-\alpha}$.

练习题参考答案

【答案】 C.

【解析】 利用正态分布的概率密度函数图形的对称性, 对任何 $x > 0$ 有

$$P\{X > x\} = P\{X < -x\} = \frac{1}{2}P\{|X| > x\}$$

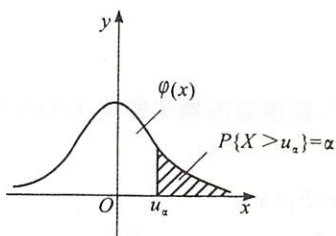
或者直接利用图形求解.

(方法一) 若 $P\{|X| < x\} = \alpha$, 其中 $0 < \alpha < 1, x > 0$, 则

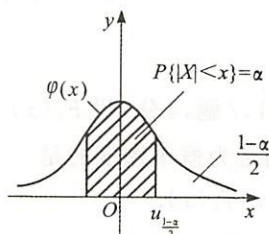
$$\begin{aligned} P\{X > x\} &= \frac{1}{2}P\{|X| > x\} = \frac{1}{2}P\{|X| \geq x\} = \frac{1}{2}[1 - P\{|X| < x\}] \\ &= \frac{1}{2}(1 - \alpha) = \frac{1 - \alpha}{2}, \end{aligned}$$

即 $x = u_{\frac{1-\alpha}{2}}$. 答案应选(C).

(方法二)



图一



图二

如图一所示题设条件 $P\{X > u_\alpha\} = \alpha$. 图二中间阴影部分面积为 $\alpha, P\{|X| < x\} = \alpha$. 两端各余面积为 $\frac{1-\alpha}{2}$, 所以 $P\{|X| < u_{\frac{1-\alpha}{2}}\} = \alpha$. 答案应选(C).

【评注】 本题在 2004 年考试中数一得分率为 0.507, 而数三得分率仅为 0.264.

第三章 多维随机变量及其分布

本章导读

本章是概率论重点之一,也是每年必考的内容,且往往是解答题.尤其要注意①二维随机变量的函数 $Z=g(X,Y)$ 的分布函数 $F_Z(y)$ 求法;②二维随机变量 (X,Y) 的两个分量之间的关系,包括 X 与 Y 的相互独立的条件及不独立时的条件概率分布和条件概率密度等,都是这几年常考的内容.

试题特点

试题一般只涉及二维随机变量.很少讨论三个随机变量的情况.

在涉及二维离散型随机变量的题中,常要考生自己建立分布,计算边缘分布,条件分布.在涉及二维连续型随机变量的题中,常要考生熟练地应用二重积分和二次积分来计算边缘密度,条件密度.

独立性及不相关性是一对重要概念,要掌握它们的关系及判定方法.特别是对二维正态分布及其参数做独立性和不相关性的判定.

对二维均匀分布,密度函数是常数,如何判定该常数,以及在积分时如何利用这一特性,应予以充分注意.

考题详析

一、 (X,Y) 的概率分布, X 与 Y 相互独立性

1 (2011,7题,4分) 设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 为两个分布函数,其相应的概率密度 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 是连续函数,则必为概率密度的是

(A) $f_1(x)f_2(x)$.

(B) $2f_2(x)F_1(x)$.

(C) $f_1(x)F_2(x)$.

(D) $f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)$.

【答案】 D.

【解析】 验证函数 $f(x)$ 是否为概率密度,一般地说有两种常用方法:

(1) $f(x)$ 满足是概率密度的充要条件 $f(x) \geq 0$ 和 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$;

(2) $f(x) = F'(x)$ 或者 $\int_{-\infty}^x f(t)dt = F(x)$, 而 $F(x)$ 为分布函数.

由于 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 均为分布函数,显然 $F_1(x)F_2(x)$ 也是分布函数,而

$$[F_1(x)F_2(x)]' = f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)$$

故答案应选(D).

2 (2015, 14 题, 4 分) 设二维随机变量 (X, Y) 服从正态分布 $N(1, 0; 1, 1; 0)$, 则 $P\{XY - Y < 0\} =$

【答案】 $\frac{1}{2}$.

【解析】 $(X, Y) \sim N(1, 0; 1, 1; 0)$, 所以 X 与 Y 相互独立, 且 $X \sim N(1, 1), Y \sim N(0, 1)$ 也就有 $(X-1) \sim N(0, 1)$ 与 Y 相互独立.

再根据对称性: $P\{X-1 < 0\} = P\{X-1 > 0\} = P\{Y < 0\} = P\{Y > 0\} = \frac{1}{2}$.

不难求出 $P\{XY - Y < 0\}$ 的值.

$$\begin{aligned} P\{XY - Y < 0\} &= P\{(X-1)Y < 0\} \\ &= P\{X-1 < 0, Y > 0\} + P\{X-1 > 0, Y < 0\} \\ &= P\{X-1 < 0\}P\{Y > 0\} + P\{X-1 > 0\}P\{Y < 0\} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

3 (2019, 22 题, 11 分) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 服从参数为 1 的指数分布, Y 的概率分布为 $P\{Y = -1\} = p, P\{Y = 1\} = 1 - p, (0 < p < 1)$, 令 $Z = XY$.

(I) 求 Z 的概率密度;

(II) p 为何值时, X 与 Z 不相关?

(III) X 与 Z 是否相互独立?

【分析】 (I) Z 的概率密度 $f_Z(z) = F'_Z(z)$, 而 $F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{XY \leq z\}$.

$$X \sim f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad \begin{array}{c|cc} Y & -1 & 1 \\ \hline P & p & 1-p \end{array}$$

(II) X 与 Z 不相关等价于 $\text{Cov}(X, Z) = 0$, 可以从 $\text{Cov}(X, XY) = 0$, 定出 p .

(III) X 与 Z 是否相互独立? 独立必定不相关, 只要从 (II) 得到的 p 值代入, 验证是否满足 X 与 Z 独立的条件, 也可以直接验证独立条件: $P\{X \leq x, Z \leq z\} = P\{X \leq x\}P\{Z \leq z\}$ 对任何 x, z 都成立.

【解】 (I) $F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{XY \leq z\} = P\{Y = -1, XY \leq z\} + P\{Y = 1, XY \leq z\}$
 $= P\{Y = -1, -X \leq z\} + P\{Y = 1, X \leq z\}$
 $= P\{Y = -1\}P\{X \geq -z\} + P\{Y = 1\}P\{X \leq z\}$
 $= p[1 - F_X(-z)] + (1-p)F_X(z)$

$$f_Z(z) = F'_Z(z) = pf_X(-z) + (1-p)f_X(z) = \begin{cases} pe^z, & z \leq 0 \\ (1-p)e^{-z}, & z > 0 \end{cases}$$

(II) $\text{Cov}(X, Z) = \text{Cov}(X, XY) = E(X^2Y) - E(X)E(XY) = E(X^2)E(Y) - (E(X))^2E(Y)$
 $= \{E(X^2) - (E(X))^2\}E(Y) = D(X)[-p + (1-p)] = D(X)(1-2p)$

当 $p = \frac{1}{2}$ 时, $\text{Cov}(X, Z) = 0$, X 与 Z 不相关.

(III) 可以判断 X 与 Z 不相互独立. 因为



$$P\{X \leq 1, Z \leq -1\} = P\{X \leq 1, XY \leq -1\}$$

$$= P\{Y = -1\}P\{X \leq 1, XY \leq -1 \mid Y = -1\}$$

$$+ P\{Y = 1\}P\{X \leq 1, XY \leq -1 \mid Y = 1\}$$

$$= p \cdot P\{X \leq 1, -X \leq -1 \mid Y = -1\} + (1-p)P\{X \leq 1, X \leq -1 \mid Y = 1\}$$

$$= p \cdot P\{X \leq 1, X \geq 1 \mid Y = -1\} + (1-p)P\{X \leq -1 \mid Y = 1\}$$

$$= p \cdot P\{X = 1\} + (1-p)P\{X \leq -1\} = 0$$

而 $P\{X \leq 1\} > 0, P\{Z \leq -1\} > 0$.

所以 $P\{X \leq 1, Z \leq -1\} \neq P\{X \leq 1\}P\{Z \leq -1\}$, X 与 Z 不相互独立.

【评注】 也可以证明 $P\{X \leq 1, Z \leq 1\} = P\{X \leq 1\}P\{Z \leq 1\}$ 不成立, 即 X 与 Z 不独立.

因为 Y 取值为 1 或 -1, 所以“事件” $(X \leq 1) \subset (XY \leq 1) = Z = 1$.

即 $P\{X \leq 1, Z \leq 1\} = P\{X \leq 1, XY \leq 1\} = P\{X \leq 1\}$.

如果 $P\{X \leq 1, Z \leq 1\} = P\{X \leq 1\}P\{Z \leq 1\}$,

则有 $P\{Z \leq 1\} = F_Z(1) = 1$, 这是不可能的.

二、二维随机变量的函数 $Z = g(X, Y)$ 的分布

4 (2009, 8 题, 4 分) 设随机变量 X 与 Y 独立, 且 X 服从标准正态分布 $N(0, 1)$, Y 的概率分布为 $P\{Y = 0\} = P\{Y = 1\} = \frac{1}{2}$. 记 $F_Z(z)$ 为随机变量 $Z = XY$ 的分布函数, 则函数 $F_Z(z)$ 的间断点个数为

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

【答案】 B.

【解析】 本题考查标准正态分布, 随机变量的独立性, 条件概率, 全概率公式.

如果将事件“ $Y = 0$ ”和“ $Y = 1$ ”看成一完备事件组, 则由全概率公式

$$F_Z(z) = P\{XY \leq z\} = P\{Y = 0\}P\{XY \leq z \mid Y = 0\} + P\{Y = 1\}P\{XY \leq z \mid Y = 1\}$$

不难计算出 $F_Z(z)$, 从而可判断其间断点. 这种方法常用于两独立随机变量其中一个为离散型的情况.

$$F_Z(z) = P\{Y = 0\}P\{XY \leq z \mid Y = 0\} + P\{Y = 1\}P\{XY \leq z \mid Y = 1\}$$

$$= \frac{1}{2}P\{0 \leq z \mid Y = 0\} + \frac{1}{2}P\{X \leq z \mid Y = 1\}.$$

又由于 X, Y 相互独立, 故

$$F_Z(z) = \frac{1}{2}P\{0 \leq z\} + \frac{1}{2}P\{X \leq z\}$$

$$\text{所以 } F_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}\Phi(z), & z < 0, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi(z), & z \geq 0. \end{cases} \quad \Phi(0) = \frac{1}{2}, \text{ 故 } \begin{cases} F_Z(0^-) = \frac{1}{4}, \\ F_Z(0^+) = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

$F_Z(z)$ 在 $z = 0$ 处有一个间断点, 故答案应选(B).

【评注】 也可以将事件“ $Z \leq z$ ”分解成 $\{Z \leq z\} = \{Z \leq z, Y = 0\} \cup \{Z \leq z, Y = 1\}$.

即 $F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{Z \leq z, Y = 0\} + P\{Z \leq z, Y = 1\}$.

当 $z < 0$ 时, $P\{Z \leq z, Y = 0\} = P\{XY \leq z, Y = 0\} = P(\emptyset) = 0$;

当 $z \geq 0$ 时, $P\{Z \leq z, Y = 0\} = P\{XY \leq z, Y = 0\} = P\{Y = 0\} = \frac{1}{2}$;

而对任意

$$\begin{aligned} P\{Z \leq z, Y = 1\} &= P\{XY \leq z, Y = 1\} = P\{X \leq z, Y = 1\} \\ &= P\{X \leq z\}P\{Y = 1\} = \frac{1}{2}\Phi(z) \end{aligned}$$

结论是相同的.

5 (2012, 7 题, 4 分) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且分别服从参数为 1 与参数为 4 的指数分布, 则 $P\{X < Y\} =$

- (A) $\frac{1}{5}$. (B) $\frac{1}{3}$. (C) $\frac{2}{3}$. (D) $\frac{4}{5}$.

【答案】 A.

【解析】 $X \sim E(1), Y \sim E(4)$ 且相互独立, 所以 (X, Y) 的概率密度

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} e^{-x} \cdot 4e^{-4y}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

利用公式 $P\{X < Y\} = \iint_{x < y} f(x, y) dx dy$ 可以计算出结果.

$$\begin{aligned} P\{X < Y\} &= \iint_{x < y} f(x, y) dx dy = \int_0^{+\infty} dy \int_0^y 4e^{-x-4y} dx \\ &= \int_0^{+\infty} 4e^{-4y}(1 - e^{-y}) dy = 1 - \int_0^{+\infty} 4e^{-5y} dy \\ &= 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

答案应选(A).

6 (2013, 22 题, 11 分) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x^2, & 0 < x < 3, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

令随机变量 $Y = \begin{cases} 2, & X \leq 1, \\ X, & 1 < X < 2, \\ 1, & X \geq 2. \end{cases}$

(I) 求 Y 的分布函数;

(II) 求概率 $P\{X \leq Y\}$.

【分析】 $X \sim f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x^2, & 0 < x < 3, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$ 而 $Y = \begin{cases} 2, & X \leq 1, \\ X, & 1 < X < 2, \\ 1, & X \geq 2. \end{cases}$

Y 是随机变量 X 的函数, 只是这函数是分段表示的, 这样得到的 Y 可能是非连续型, 也非离散型.



【解】(I) 设 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$, 显然 $P\{1 \leq Y \leq 2\} = 1$, 所以,

当 $y < 1$ 时, $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = 0$;

$$\begin{aligned} \text{当 } 1 \leq y < 2 \text{ 时, } F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} = P\{Y < 1\} + P\{Y = 1\} + P\{1 < Y \leq y\} \\ &= 0 + P\{X \geq 2\} + P\{1 < X \leq y\} \\ &= \int_2^3 \frac{1}{9} x^2 dx + \int_1^y \frac{1}{9} x^2 dx = \frac{y^3 + 18}{27}; \end{aligned}$$

当 $y \geq 2$ 时, $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{Y \leq 2\} = 1$.

所以 Y 的分布函数为

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 1, \\ \frac{y^3 + 18}{27}, & 1 \leq y < 2, \\ 1, & y \geq 2 \end{cases}$$

$$(II) \text{ 因为 } Y = \begin{cases} 2, & X \leq 1, \\ X, & 1 < X < 2, \\ 1, & X \geq 2. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P\{X \leq Y\} &= P\{X = Y\} + P\{X < Y\} = P\{1 < X < 2\} + P\{X \leq 1\} \\ &= P\{X < 2\} = \int_0^2 \frac{1}{9} x^2 dx = \frac{8}{27}. \end{aligned}$$

7 (2016, 22 题, 11 分) 设二维随机变量 (X, Y) 在区域 $D = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, x^2 < y < \sqrt{x}\}$

上服从均匀分布, 令 $U = \begin{cases} 1, & X \leq Y, \\ 0, & X > Y. \end{cases}$

(I) 写出 (X, Y) 的概率密度;

(II) 请问 U 与 X 是否相互独立? 并说明理由;

(III) 求 $Z = U + X$ 的分布函数 $F(z)$.

【分析】(I) (X, Y) 的概率密度 $f_1(x, y)$ 可用在区域 D 上均匀分布的密度公式直接写出:

$$f_1(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{S_D}, & (x, y) \in D, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

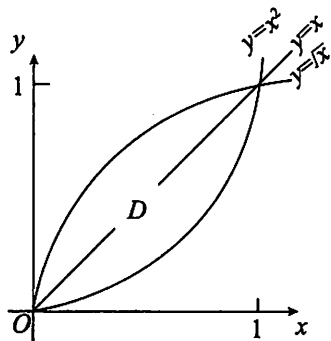
其中 S_D 为区域 D 的面积.

(II) 由于 U 是离散型随机变量, 考查 U 与 X 是否独立, 只要验证是否成立,

$$P\{U = i, X \leq x_1\} = P\{U = i\}P\{X \leq x_1\}, i = 0, 1$$

(III) $Z = U + X$ 其分布函数

$$\begin{aligned} F(z) &= P\{Z \leq z\} = P\{U + X \leq z\} \\ &= P\{U = 0, U + X \leq z\} + P\{U = 1, U + X \leq z\} \\ &= P\{X > Y, X \leq z\} + P\{X \leq Y, X \leq z - 1\} \\ &= \iint_{\substack{x > y \\ x \leq z}} f_1(x, y) dx dy + \iint_{\substack{x \leq y \\ x \leq z-1}} f_1(x, y) dx dy. \end{aligned}$$



【解】 (I) $S_D = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left. \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} x^3 \right|_0^1$
 $= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$

$$f_1(x, y) = \begin{cases} 3, & 0 < x < 1, x^2 < y < \sqrt{x}, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(II) 当 $0 < x_1 < 1$ 时, $P\{U = 0, X \leq x_1\} = P\{X > Y, X \leq x_1\} = P\{Y < X \leq x_1\}$
 $= \iint_{y < x \leq x_1} f_1(x, y) dx dy = \int_0^{x_1} dx \int_{x^2}^x 3 dy$
 $= \int_0^{x_1} 3(x - x^2) dx = \frac{3}{2} x_1^2 - x_1^3.$

$$P\{U = 0\} = P\{X > Y\} = \iint_{x > y} f_1(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x 3 dy$$

$$= \int_0^1 3(x - x^2) dx = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2},$$

$$P\{X \leq x_1\} = \iint_{x \leq x_1} f_1(x, y) dx dy = \int_0^{x_1} dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} 3 dy = \int_0^{x_1} 3(\sqrt{x} - x^2) dx = 2x_1^{\frac{3}{2}} - x_1^3$$

所以 $P\{U = 0, X \leq x_1\} \neq P\{U = 0\}P\{X \leq x_1\}$, U 与 X 不相互独立.

(III) $F(z) = \iint_{\substack{x > y \\ x \leq z}} f_1(x, y) dx dy + \iint_{\substack{x \leq y \\ x \leq z}} f_1(x, y) dx dy.$

当 $z < 0$ 时, $F(z) = 0$;

当 $0 \leq z < 1$ 时, $F(z) = \iint_{\substack{x > y \\ x \leq z}} f_1(x, y) dx dy + 0 = \int_0^z dx \int_{x^2}^x 3 dy = \int_0^z 3(x - x^2) dx = \frac{3}{2} z^2 - z^3$;

当 $1 \leq z < 2$ 时, $F(z) = \iint_{\substack{x > y \\ x \leq z}} f_1(x, y) dx dy + \iint_{\substack{x \leq y \\ x \leq z}} f_1(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x 3 dy + \int_0^{z-1} dx \int_x^{\sqrt{x}} 3 dy$
 $= \left(\frac{3}{2} - 1\right) + \int_0^{z-1} 3(\sqrt{x} - x) dx = \frac{1}{2} + 2(z-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(z-1)^2$;

当 $2 \leq z$ 时, $F(z) = 1$.

所以
$$F(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \frac{3}{2} z^2 - z^3, & 0 \leq z < 1, \\ \frac{1}{2} + 2(z-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(z-1)^2, & 1 \leq z < 2, \\ 1, & 2 \leq z \end{cases}$$

8 (2020, 22 题, 11 分) 设随机变量 X_1, X_2, X_3 相互独立, 其中 X_1 与 X_2 均服从标准正态分布, X_3 的概率分布为

$$P\{X_3 = 0\} = P\{X_3 = 1\} = \frac{1}{2}, Y = X_3 X_1 + (1 - X_3) X_2$$

(I) 求二维随机变量 (X_1, Y) 的分布函数, 结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示.



(II) 证明随机变量 Y 服从标准正态分布.

【解】 (I) (X_1, Y) 的分布函数 $F(x, y)$

$$\begin{aligned}
 F(x, y) &= P\{X_1 \leq x, Y \leq y\} = P\{X_1 \leq x, X_3 X_1 + (1 - X_3) X_2 \leq y\} \\
 &= P\{X_3 = 0\} P\{X_1 \leq x, X_3 X_1 + (1 - X_3) X_2 \leq y \mid X_3 = 0\} + \\
 &\quad P\{X_3 = 1\} P\{X_1 \leq x, X_3 X_1 + (1 - X_3) X_2 \leq y \mid X_3 = 1\} \\
 &= \frac{1}{2} P\{X_1 \leq x, X_2 \leq y \mid X_3 = 0\} + \frac{1}{2} P\{X_1 \leq x, X_1 \leq y \mid X_3 = 1\} \\
 &= \frac{1}{2} P\{X_1 \leq x, X_2 \leq y\} + \frac{1}{2} P\{X_1 \leq x, X_1 \leq y\} \\
 &= \frac{1}{2} P\{X_1 \leq x\} P\{X_2 \leq y\} + \frac{1}{2} P\{X_1 \leq \min(x, y)\} \\
 &= \frac{1}{2} \Phi(x) \Phi(y) + \frac{1}{2} \Phi(\min(x, y))
 \end{aligned}$$

(II) Y 的分布函数

(方法一) $F_Y(y) = P\{X_3 X_1 + (1 - X_3) X_2 \leq y\}$

$$\begin{aligned}
 &= P\{X_3 = 0\} P\{X_3 X_1 + (1 - X_3) X_2 \leq y \mid X_3 = 0\} + \\
 &\quad P\{X_3 = 1\} P\{X_3 X_1 + (1 - X_3) X_2 \leq y \mid X_3 = 1\} \\
 &= \frac{1}{2} P\{X_2 \leq y \mid X_3 = 0\} + \frac{1}{2} P\{X_1 \leq y \mid X_3 = 1\} \\
 &= \frac{1}{2} P\{X_2 \leq y\} + \frac{1}{2} P\{X_1 \leq y\} = \frac{1}{2} \Phi(y) + \frac{1}{2} \Phi(y) = \Phi(y)
 \end{aligned}$$

$Y \sim N(0, 1)$.

(方法二) $F(y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \Phi(x) \Phi(y) + \frac{1}{2} \Phi(\min(x, y)) \right]$

$$= \frac{1}{2} \Phi(y) + \frac{1}{2} \Phi(y) = \Phi(y)$$

$Y \sim N(0, 1)$.

练习题

1. (2001, 数三, 8分) 设随机变量 X 和 Y 的联合分布是正方形

$$G = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 3\}$$

上的均匀分布, 试求随机变量 $U = |X - Y|$ 的概率密度 $p(u)$.

2. (2003, 数三, 13分) 设随机变量 X 与 Y 独立, 其中 X 的概率分布为 $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$, 而 Y 的

概率密度为 $f(y)$, 求随机变量 $U = X + Y$ 的概率密度 $g(u)$.

练习题参考答案

1. 【解】 本题考查两个随机变量函数的分布和均匀分布.

设 U 的分布函数为 $F(u)$, 则

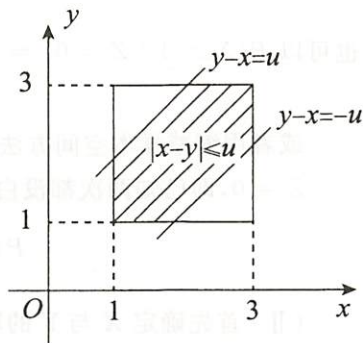
$$F(u) = P\{U \leq u\} = P\{|X - Y| \leq u\}$$

$$= \iint_{|x-y| \leq u} f(x, y) dx dy$$

$$\text{其中 } f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 3, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$\text{当 } 0 < u < 2 \text{ 时, } F(u) = 1 - \frac{1}{4}(2-u)^2.$$

$$\text{最后得到 } p(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2-u), & 0 < u < 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$



2. 【解】 本题考查一个离散型和一个连续型两个随机变量的函数的分布, 随机变量的独立性等.

先求分布函数

$$\begin{aligned} G(u) &= P\{U \leq u\} = P\{X + Y \leq u\} \\ &= P\{X = 1\}P\{X + Y \leq u \mid X = 1\} + P\{X = 2\}P\{X + Y \leq u \mid X = 2\} \\ &= 0.3P\{1 + Y \leq u\} + 0.7P\{2 + Y \leq u\} \\ &= 0.3F(u-1) + 0.7F(u-2) \end{aligned}$$

其中 $F(y)$ 为 Y 的分布.

$$\text{由此得 } g(u) = 0.3f(u-1) + 0.7f(u-2).$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

三、条件分布与条件概率密度

9 (2009, 22 题, 11 分) 袋中有 1 个红球、2 个黑球与 3 个白球. 现有放回地从袋中取两次, 每次取一个球, 以 X, Y, Z 分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数.

(I) 求 $P\{X = 1 \mid Z = 0\}$;

(II) 求二维随机变量 (X, Y) 的概率分布.

【分析】 本题考查古典型概率, 条件概率和二维概率分布. 题设要求有放回地取两次, 每次一个, 共取到两个, 每次有 6 种可能, 共有 36 种可能, 求概率时只要把符合条件的可能性列出来了.

$$\begin{aligned} \text{【解】 (I) } P\{X = 1 \mid Z = 0\} &= \frac{P\{X = 1, Z = 0\}}{P\{Z = 0\}} = \frac{P\{X = 1, Y = 1\}}{P\{Z = 0\}} \\ &= \frac{\frac{1 \times 2 + 2 \times 1}{36}}{\frac{3 \times 3}{36}} = \frac{4}{9}. \end{aligned}$$



$$\text{也可以 } P\{X=1|Z=0\} = \frac{P\{X=1, Z=0\}}{P\{Z=0\}} = \frac{C_2^1 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{4}{9}.$$

或者用缩减样本空间方法:

$Z=0$, 即已知两次都没白球的条件下, 只能取红、黑, 总的可能为 $3 \times 3 = 9$,

$$P\{X=1|Z=0\} = \frac{1 \times 2 + 2 \times 1}{3 \times 3} = \frac{4}{9}$$

(II) 首先确定 X 与 Y 的取值范围均为 $0, 1, 2$, $P\{X=0, Y=0\} = \frac{3 \times 3}{6 \times 6}$, 同理可求得

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{3 \times 3}{6 \times 6}$	$\frac{3 \times 2 + 2 \times 3}{6 \times 6}$	$\frac{2 \times 2}{6 \times 6}$
1	$\frac{1 \times 3 + 3 \times 1}{6 \times 6}$	$\frac{1 \times 2 + 2 \times 1}{6 \times 6}$	0
2	$\frac{1 \times 1}{6 \times 6}$	0	0

即

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	0
2	$\frac{1}{36}$	0	0

10 (2010, 22 题, 11 分) 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = Ae^{-2x^2+2xy-y^2}, -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$$

求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$.

【分析】 二维正态随机变量的概率密度, 边缘概率密度和条件密度是本题考查的内容, 2010 年考试本题得分率为 0.296, 属于偏低的.

本题中当给出二维密度 $f(x, y)$ 后, 要求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$ 时, 可用公式 $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$, 当 $f_X(x) > 0$, 而 $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$. 本题还有待定常数 A . 用 $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$ 来定常数 A . 还不如用 $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$ 来求 A .

$$\begin{aligned} \text{【解】 (方法一)} \quad f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2+2xy-y^2} dy \\ &= A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x)^2-x^2} dy = Ae^{-x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x)^2} dy \\ &= A\sqrt{\pi}e^{-x^2}, -\infty < x < +\infty. \end{aligned}$$

$$\text{所以 } 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = A\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = A\pi. \text{ 即 } A = \frac{1}{\pi}.$$

当 $f_X(x) > 0$, 等价于 $-\infty < x < +\infty$ 时,

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{Ae^{-2x^2+2xy-y^2}}{A\sqrt{\pi}e^{-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2xy-y^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(y-x)^2}, -\infty < y < +\infty.$$

(方法二) 二维正态概率密度一般形式为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

对比本题所给二维密度 $f(x, y) = Ae^{-2x^2+2xy-y^2}$, 可知, $\mu_1 = \mu_2 = 0$, 且

$$\begin{cases} \frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_1^2} = 2, \\ \frac{\rho}{(1-\rho^2)\sigma_1\sigma_2} = 2, \\ \frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2} = 1 \end{cases}$$

成立, 由此解得 $\begin{cases} \rho = \sqrt{\frac{1}{2}}, \\ \sigma_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}, \\ \sigma_2 = 1. \end{cases} \quad A = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{1}{\pi},$

这时的边缘密度 $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, -\infty < x < +\infty.$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{1}{\pi} e^{-2x^2+2xy-y^2}}{\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2+2xy-y^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x-y)^2} (-\infty < y < +\infty).$$

练习题

1. (2004, 数四, 13 分) 设随机变量 X 在区间 $(0, 1)$ 内服从均匀分布, 在 $X = x (0 < x < 1)$ 的条件下, 随机变量 Y 在区间 $(0, x)$ 内服从均匀分布, 求

(I) 随机变量 X 和 Y 的联合概率密度;

(II) Y 的概率密度;

(III) 概率 $P\{X+Y > 1\}$.

2. (2011, 数三, 11 分) 设二维随机变量 (X, Y) 服从区域 G 上的均匀分布, 其中 G 是由 $x-y=0, x+y=2$, 与 $y=0$ 所围成的三角形区域.

(I) 求 X 的概率密度 $f_X(x)$;

(II) 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$.

练习题参考答案

1. 【解】 本题考查均匀分布, 二维随机变量的概率密度、边缘密度和条件密度, 当年的得分率仅为 0.204. 主要的困难在于对条件概率密度的理解.

(I) 根据题意有 $f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 然后写出, 当 $0 < x < 1$ 时,

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < y < x, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



因此,当 $0 < x < 1$ 时,

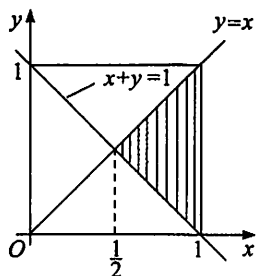
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < y < x, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

进一步推得当 $-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$ 时,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < y < x < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$(II) f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} -\ln y, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$(III) P\{X+Y > 1\} = \iint_{x+y>1} f(x, y) dx dy = \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_{1-x}^x \frac{1}{x} dy = 1 - \ln 2.$$



2.【解】 本题考查二维均匀分布,边缘密度和条件密度等知识点.

首先把 G 的表达式写出 $G: 0 \leq y \leq x \leq 2-y$, 然后写出

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 2-y, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

再求出(I)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 < x \leq 2, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

最后求(II)

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}, f_Y(y) > 0$$

$$\text{其中 } f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} 2(1-y), & 0 \leq y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

又 $f_Y(y) > 0$ 等价于 $0 \leq y < 1$, 所以当 $0 \leq y < 1$ 时,

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{1}{2(1-y)}, & 0 \leq y \leq x \leq 2-y, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

【评注】 我们也可以把 G 表示成 $G: 0 < y < x < 2-y$. 这样得到的 $f_X(x)$ 和 $f_{X|Y}(x|y)$ 表达式中会少一些等号. 两种答案是等价的. 因为概率密度不因个别值点的变化而影响性质.

第四章 随机变量的数字特征

本章导读

本章是概率论的重点之一,有相当多的考题涉及这章内容.求随机变量的数字特征,包括数学期望、方差、矩、协方差、相关系数,所有这些数字特征都是求期望,求随机变量函数的数学期望.

试题特点

本章的试题除了求一些给定随机变量的数学期望外,很多题的数学期望或方差的计算都与常用分布有关.应该牢记常用分布的参数和它们的概率意义.有些常用分布的参数就是该随机变量的数学期望或方差.也应该会用数字特征的基本性质,求一般随机变量函数的数学期望.

考题详析

一、数学期望 $E(X)$ 与方差 $D(X)$

1 (2009, 7 题, 4 分) 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = 0.3\Phi(x) + 0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$,

其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数, 则 $E(X) =$

(A) 0.

(B) 0.3.

(C) 0.7.

(D) 1.

【答案】 C.

【解析】 本题考查正态分布随机变量及其标准化的性质. 题中给出了分布函数 $F(x)$, 要求

$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$. 可以通过 $F'(x) = f(x)$ 来求得.

$F(x) = 0.3\Phi(x) + 0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$, 故

$$f(x) = F'(x) = 0.3\varphi(x) + 0.7\varphi\left(\frac{x-1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

其中 $\varphi(x)$ 为标准正态分布的概率密度.

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 0.3x\varphi(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{0.7}{2}x\varphi\left(\frac{x-1}{2}\right)dx \\ &= 0.3 \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx + 0.7 \int_{-\infty}^{+\infty} (2t+1)\varphi(t)dt \\ &= 0.3 \times 0 + 0.7 \times 1 = 0.7 \end{aligned}$$

答案应选(C).



【评注】 当随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 时, $(\sigma > 0)$ 时, 其分布函数

$$F(x) = P\{X \leq x\} = P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

也就是说, 如有分布函数 $\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$, 则相应的随机变量 X 有 $E(X) = \mu$.

$$\text{又 } F(x) = C_1 \Phi\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right) + C_2 \Phi\left(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right), C_1 + C_2 = 1,$$

$$\text{则必有 } E(X) = C_1 \mu_1 + C_2 \mu_2.$$

2 (2010, 14 题, 4 分) 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X = k\} = \frac{C}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots$

$$\text{则 } E(X^2) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 2.

【解析】 X 的分布 $P\{X = k\} = \frac{C}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots$, 其中 C 是待定常数, 不难发现 X 是一个泊松分布的随机变量, 而 $E(X^2) = DX + (E(X))^2$.

$$\text{泊松分布为 } P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{对比 } P\{X = k\} = \frac{C}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots, \text{ 可以看出 } C = e^{-1}, X \sim P(1),$$

$$\text{所以 } E(X) = D(X) = 1, \text{ 而 } E(X^2) = D(X) + (E(X))^2 = 1 + 1^2 = 2.$$

3 (2011, 8 题, 4 分) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $E(X)$ 和 $E(Y)$ 存在, 记

$$U = \max\{X, Y\}, V = \min\{X, Y\}, \text{ 则 } E(UV) =$$

$$(A) E(U) \cdot E(V).$$

$$(B) E(X) \cdot E(Y).$$

$$(C) E(U) \cdot E(Y).$$

$$(D) E(X) \cdot E(V).$$

【答案】 B.

【解析】 本题考查相互独立的两个随机变量简单函数的数字特征, 显然当 X 与 Y 相互独立时 $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$.

$$\text{我们有公式 } U = \max\{X, Y\} = \frac{X+Y+|X-Y|}{2}, V = \min\{X, Y\} = \frac{X+Y-|X-Y|}{2},$$

对解题也是有用的.

$$\begin{aligned} \text{(方法一)} \quad UV &= \frac{X+Y+|X-Y|}{2} \cdot \frac{X+Y-|X-Y|}{2} = \frac{(X+Y)^2 - |X-Y|^2}{4} \\ &= \frac{4XY}{4} = XY. \end{aligned}$$

故 $E(UV) = E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$, 答案应选(B).

$$\text{(方法二)} \quad UV = \max\{X, Y\} \cdot \min\{X, Y\} = XY,$$

因为二个中大的一个乘小的一个就等于这两个相乘.

$$E(UV) = E(XY) = E(X) \cdot E(Y), \text{ 答案应选(B).}$$

4 (2011, 14 题, 4 分) 设二维随机变量 (X, Y) 服从正态分布 $N(\mu, \mu; \sigma^2, \sigma^2; 0)$, 则 $E(XY^2) =$

【答案】 $\mu\sigma^2 + \mu^3.$

【解析】

本题考查二维正态随机变量各参数的意义和两分量独立和不相关的关系, $(X, Y) \sim N(\mu, \mu; \sigma^2, \sigma^2; 0)$, 即 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY} = 0$, 二维正态时 $\rho_{XY} = 0$ 等价于 X 与 Y 相互独立.

$$E(X) = E(Y) = \mu, D(X) = D(Y) = \sigma^2$$

$$E(XY^2) = E(X) \cdot E(Y^2) = \mu[D(Y) + (E(Y))^2] = \mu(\sigma^2 + \mu^2) = \mu\sigma^2 + \mu^3$$

答案应填 $\mu\sigma^2 + \mu^3$.

5 (2014, 8 题, 4 分) 设连续型随机变量 X_1 与 X_2 相互独立且方差均存在, X_1 与 X_2 概率密度

分别为 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$, 随机变量 Y_1 的概率密度为 $f_{Y_1}(y) = \frac{1}{2}[f_1(y) + f_2(y)]$, 随机变量 $Y_2 =$

$\frac{1}{2}(X_1 + X_2)$, 则

$$(A) E(Y_1) > E(Y_2), D(Y_1) > D(Y_2). \quad (B) E(Y_1) = E(Y_2), D(Y_1) = D(Y_2).$$

$$(C) E(Y_1) = E(Y_2), D(Y_1) < D(Y_2). \quad (D) E(Y_1) = E(Y_2), D(Y_1) > D(Y_2).$$

【答案】 D.

【解析】

$$E(Y_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y_1}(y) dy = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} y [f_1(y) + f_2(y)] dy = \frac{1}{2} (E(X_1) + E(X_2))$$

$$E(Y_2) = E\left[\frac{1}{2}(X_1 + X_2)\right] = \frac{1}{2} (E(X_1) + E(X_2))$$

所以 $E(Y_1) = E(Y_2)$.

$$\begin{aligned} D(Y_1) - D(Y_2) &= E(Y_1^2) - (E(Y_1))^2 - E(Y_2^2) + (E(Y_2))^2 = E(Y_1^2) - E(Y_2^2) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \cdot \frac{1}{2} [f_1(y) + f_2(y)] dy - E\left[\frac{1}{4}(X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2)\right] \\ &= \frac{1}{2} E(X_1^2) + \frac{1}{2} E(X_2^2) - \frac{1}{4} [E(X_1^2) + 2E(X_1X_2) + E(X_2^2)] \\ &= \frac{1}{4} [E(X_1^2) - 2E(X_1X_2) + E(X_2^2)] = \frac{1}{4} E(X_1 - X_2)^2. \end{aligned}$$

一般说, $E(X_1 - X_2)^2 \geq 0$, 但 X_1 与 X_2 相互独立, 则必有 $E(X_1 - X_2)^2 > 0$.

因为, 如果 $E(X_1 - X_2)^2 = 0$, 则 $D(X_1 - X_2) = E(X_1 - X_2)^2 - [E(X_1 - X_2)]^2 = 0$, 就有 $X_1 - X_2 = C$ (常数) 以概率 1 成立, 当然 X_1 与 X_2 不可能相互独立.

总之, $D(Y_1) - D(Y_2) = \frac{1}{4} E(X_1 - X_2)^2 > 0, DY_1 > DY_2$. 答案应选(D).

【评注】 有的考生在得到 $D(Y_1) - D(Y_2) = \frac{1}{4} E(X_1 - X_2)^2 \geq 0$ 后, 为了排除 $\frac{1}{4} E(X_1 - X_2)^2 =$

0 的情况, 设 X_1 与 X_2 不相互独立, $X_1 = X_2$, 这时 $D(Y_1) = D(Y_2)$. 这样做只说明不加 X_1 与 X_2 相互独立时, 有可能 $D(Y_1) = D(Y_2)$, 至于独立时为什么 $D(Y_1) > D(Y_2)$ 就没有交代了.

6 (2014, 22 题, 11 分) 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X = 1\} = P\{X = 2\} = \frac{1}{2}$, 在给定

$X = i$ 的条件下, 随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0, i) (i = 1, 2)$.

(I) 求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$;

(II) 求 $E(Y)$.

【分析】

当 $X = i$ 的条件下, Y 服从均匀分布 $U(0, i) (i = 1, 2)$, $X = i$ 就两个取值 1 和 2. 求 $F_Y(y) = P\{Y \leq y\}$ 就可用 $\{X = 1\}$ 和 $\{X = 2\}$ 为完备事件组的全概率公式展开.



$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X=1\}P\{Y \leq y | X=1\} + P\{X=2\}P\{Y \leq y | X=2\}$$

求出 $F_Y(y)$ 就不难得到 $f_Y(y) = F'_Y(y)$, $E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy$. 求出 $E(Y)$.

【解】 (I) 记 $U(0, i)$ 的分布函数为 $F_i(x)$ ($i=1, 2$), 则

$$F_i(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x}{i}, & 0 \leq x < i, \\ 1, & i \leq x \end{cases} \quad i=1, 2$$

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X=1\}P\{Y \leq y | X=1\} + P\{X=2\}P\{Y \leq y | X=2\}$$

$$= \frac{1}{2}P\{Y \leq y | X=1\} + \frac{1}{2}P\{Y \leq y | X=2\}$$

$$= \frac{1}{2}[F_1(y) + F_2(y)] = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \frac{3}{4}y, & 0 \leq y < 1, \\ \frac{1}{2} + \frac{y}{4}, & 1 \leq y < 2, \\ 1, & y \geq 2. \end{cases}$$

(II) 随机变量 Y 的概率 $f_Y(y)$ 为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{4}, & 0 < y < 1, \\ \frac{1}{4}, & 1 \leq y < 2, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\text{所以 } E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy = \int_0^1 \frac{3}{4} y dy + \int_1^2 \frac{1}{4} y dy = \frac{3}{4}$$

【7】(2015, 8 题, 4 分) 设随机变量 X, Y 不相关, 且 $E(X) = 2, E(Y) = 1, D(X) = 3$, 则 $E[X(X+Y-2)] =$

(A) -3.

(B) 3.

(C) -5.

(D) 5.

【答案】 D.

【解析】 $E[X(X+Y-2)] = E[X^2 + XY - 2X] = E(X^2) + E(XY) - E(2X)$
 $= D(X) + (E(X))^2 + E(X) \cdot E(Y) - 2E(X)$
 $= 3 + 4 + 2 - 4 = 5.$

答案应选(D).

【8】(2015, 22 题, 11 分) 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-x} \ln 2, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

对 X 进行独立重复的观测, 直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止, 记 Y 为观测次数.

(I) 求 Y 的概率分布;

(II) 求 $E(Y)$.

【解】 (I) 令 $A = \{\text{对 } X \text{ 进行一次观测得到的值大于 } 3\}$. 显然

$$P(A) = P\{X > 3\} = \int_3^{\infty} f(x) dx = \int_3^{\infty} 2^{-x} \ln 2 dx = \frac{1}{8}$$

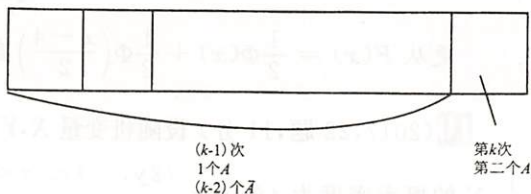
记事件 A 发生的概率 $P(A) = \frac{1}{8} = p$,

Y 的可能取值应为 $k = 2, 3, \dots$,

$$\begin{aligned} P\{Y = k\} &= C_{k-1}^1 p(1-p)^{k-2} \cdot p \\ &= (k-1)p^2(1-p)^{k-2} \quad (k = 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

所以 Y 的分布为

$$P\{Y = k\} = (k-1)p^2(1-p)^{k-2}, p = \frac{1}{8} \quad (k = 2, 3, \dots)$$



$$(II) E(Y) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p^2(1-p)^{k-2}, \text{ 记 } 1-p = q,$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= p^2 \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} = p^2 \frac{d}{dq} \left(\sum_{k=2}^{\infty} kq^{k-1} \right) = p^2 \frac{d}{dq} \left(\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} - 1 \right) \\ &= p^2 \frac{d}{dq} \left(\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} \right) = p^2 \left(\frac{d}{dq} \right)^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k \right) = p^2 \left(\frac{d}{dq} \right)^2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k - 1 \right) \\ &= p^2 \left(\frac{d}{dq} \right)^2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k \right) = p^2 \left(\frac{d}{dq} \right)^2 \left(\frac{1}{1-q} \right) = p^2 \frac{d}{dq} \left[\frac{1}{(1-q)^2} \right] = p^2 \cdot \frac{2}{(1-q)^3} \\ &= p^2 \cdot \frac{2}{p^3} = \frac{2}{p} = 16. \end{aligned}$$

【评注】 本题类似于我们在2000年出的几何分布考题,从建模到用幂级数在其收敛区间内可逐项求导和会有不少考生感到困难,本题要比2000年的难一些.

9 (2017, 14题, 4分) 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = 0.5\Phi(x) + 0.5\Phi\left(\frac{x-4}{2}\right)$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, 则 $E(X) =$ _____.

【答案】 2.

【解析】 $F(x) = \frac{1}{2}\Phi(x) + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x-4}{2}\right)$,

X 的概率密度 $f(x) = F'(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{4}\varphi\left(\frac{x-4}{2}\right)$, 其中 $\varphi(x)$ 为标准正态概率密度.

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{2}\varphi(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{4}\varphi\left(\frac{x-4}{2}\right)dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-4}{2}\varphi\left(\frac{x-4}{2}\right)d\left(\frac{x-4}{2}\right) + \int_{-\infty}^{+\infty} 2\varphi\left(\frac{x-4}{2}\right)d\left(\frac{x-4}{2}\right) \\ &= 0 + \int_{-\infty}^{+\infty} t\varphi(t)dt + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt = 2. \end{aligned}$$

【评注】 如果 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 X 的分布 $F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$;

X 的密度 $f(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$;

X 的期望 $E(X) = \mu$.

也就有分布 $\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ 的期望必为 μ , 密度 $\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ 的期望必为 μ , 或 $\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)dx = \mu\sigma$.



从以上结论可直接得出 $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = 0 + \frac{1}{2} \times 4 = 2$.

更从 $F(x) = \frac{1}{2}\Phi(x) + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x-4}{2}\right)$ 直接得出 $E(X) = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 4 = 2$.

10 (2017, 22 题, 11 分) 设随机变量 X, Y 相互独立, 且 X 的概率分布为 $P\{X=0\} = P\{X=2\} =$

$\frac{1}{2}$, Y 的概率密度为 $f(y) = \begin{cases} 2y, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

(I) 求 $P\{Y \leq E(Y)\}$;

(II) 求 $Z = X + Y$ 的概率密度.

【分析】 (I) 求 $P\{Y \leq E(Y)\}$ 可先求出 $E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} yf(y)dy$, 再计算 $P\{Y \leq E(Y)\} = \int_{-\infty}^{E(Y)} f(y)dy$.

(II) $Z = X + Y$. 先求出 $F_Z(z) = P\{Z \leq z\}$, 然后再求 $f_Z(z) = F'_Z(z)$.

求 $F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{X + Y \leq z\}$ 有两种类似的途径:

$$\begin{aligned} (1) P\{X + Y \leq z\} &= P\{X=0\}P\{X+Y \leq z \mid X=0\} + P\{X=2\}P\{X+Y \leq z \mid X=2\} \\ &= \frac{1}{2}P\{Y \leq z \mid X=0\} + \frac{1}{2}P\{Y \leq z-2 \mid X=2\} \\ &= \frac{1}{2}P\{Y \leq z\} + \frac{1}{2}P\{Y \leq z-2\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{或者} (2) P\{X + Y \leq z\} &= P\{X + Y \leq z, X=0\} + P\{X + Y \leq z, X=2\} \\ &= P\{Y \leq z, X=0\} + P\{Y \leq z-2, X=2\} \\ &= P\{Y \leq z\}P\{X=0\} + P\{Y \leq z-2\}P\{X=2\} \\ &= \frac{1}{2}P\{Y \leq z\} + \frac{1}{2}P\{Y \leq z-2\}. \end{aligned}$$

然后再分段讨论.

$$\text{【解】} (I) E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} yf(y)dy = \int_0^1 2y^2 dy = \frac{2}{3}y^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3},$$

$$P\{Y \leq E(Y)\} = P\{Y \leq \frac{2}{3}\} = \int_0^{\frac{2}{3}} 2y dy = y^2 \Big|_0^{\frac{2}{3}} = \frac{4}{9}$$

(II) $Z = X + Y$ 其分布函数 $F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{X + Y \leq z\}$,

根据全概率公式

$$\begin{aligned} P\{X + Y \leq z\} &= P\{X=0\}P\{X+Y \leq z \mid X=0\} + P\{X=2\}P\{X+Y \leq z \mid X=2\} \\ &= \frac{1}{2}P\{Y \leq z \mid X=0\} + \frac{1}{2}P\{Y \leq z-2 \mid X=2\} \\ &= \frac{1}{2}P\{Y \leq z\} + \frac{1}{2}P\{Y \leq z-2\}, \end{aligned}$$

当 $z < 0$ 时, $F_Z(z) = 0$;

当 $0 \leq z < 1$ 时, $F_Z(z) = \frac{1}{2}P\{Y \leq z\} + 0 = \frac{1}{2} \int_0^z 2y dy = \frac{1}{2}z^2$;

当 $1 \leq z < 2$ 时, $F_Z(z) = \frac{1}{2}P\{Y \leq 1\} + 0 = \frac{1}{2}$;

$$\begin{aligned}\text{当 } 2 \leq z < 3 \text{ 时, } F_Z(z) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P\{Y \leq z-2\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{z-2} 2y dy \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(z-2)^2 = \frac{1}{2}(z^2 - 4z + 5);\end{aligned}$$

当 $3 \leq z$ 时, $F_Z(z) = 1$.

所以 z 的概率密度为

$$f_Z(z) = F'_Z(z) = \begin{cases} z, & 0 \leq z < 1, \\ z-2, & 2 \leq z < 3, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

11 (2019, 14 题, 4 分) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ $F(x)$ 为 X 的分布函数, $E(X)$ 为 X 的数学期望, 则 $P\{F(X) > E(X) - 1\} =$ _____.

【答案】 $\frac{2}{3}$.

【解析】 $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2} dx$, $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \int_0^x \frac{t}{2} dt, & 0 < x < 2, \\ 1, & 2 \leq x, \end{cases}$

求出 $E(X)$ 和 $F(x)$ 再写出 $F(X)$, 就可以计算 $P\{F(X) > E(X) - 1\}$.

$$E(X) = \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2} dx = \left. \frac{x^3}{6} \right|_0^2 = \frac{4}{3}, F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x^2}{4}, & 0 < x < 2, \\ 1, & 2 \leq x \end{cases} F(X) = \frac{X^2}{4}$$

$$\begin{aligned}P\{F(X) > E(X) - 1\} &= P\left\{\frac{X^2}{4} > \frac{4}{3} - 1\right\} = P\left\{X^2 > \frac{4}{3}\right\} = P\left\{X > \frac{2}{\sqrt{3}}\right\} + P\left\{X < -\frac{2}{\sqrt{3}}\right\} \\ &= \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^2 \frac{x}{2} dx + 0 = \left. \frac{x^2}{4} \right|_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

【评注】 记住结论: 对任一连续型随机变量 X , 其分布函数为 $F(x)$, 则 $Y = F(X)$ 必定服从 $U(0, 1)$ 分布. 我们可以直接得到 $P\{F(X) > E(X) - 1\} = P\left\{F(X) > \frac{1}{3}\right\} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

练习题

1. (1998, 数四, 9 分) 设某种商品的每周的需求量 X 是服从区间 $[10, 30]$ 上均匀分布的随机变量, 而经销商店进货数量为区间 $[10, 30]$ 中的某一整数, 商店每销售一单位商品可获利 500 元, 若供大于求则削价处理, 每处理 1 单位商品亏损 100 元, 若供不应求, 则可从外部调剂供应, 此时每个单位商品仅获利 300 元. 为使商店所获利润期望值不少于 9280 元, 试确定最少进货量.

2. (1998, 数三, 10 分) 一商店经销某种商品, 每周进货的数量 X 与顾客对该种商品的需求量 Y 是相互独立的随机变量, 且都服从区间 $[10, 20]$ 上的均匀分布. 商店每售出一单位商品可得利润 1000 元; 若需求量超过了进货量, 商店可从其他商店调剂供应, 这时每单位商品获利润为 500 元, 试



计算此商店经销该种商品每周所得利润的期望值.

练习题参考答案

1.【解】 本题是一个利用均匀分布, 随机变量的数学期望的应用题. 关键是求出利润的函数 $g(X; a)$, 其中 a 是进货量.

当 $X > a$ 时, 进货全售出, 得利润 $500a$, 外部调剂获利 $300(X - a)$,

当 $X \leq a$ 时, 销售得利 $500X$, 多余的削价处理亏损 $100(a - X)$. 所以

$$g(X; a) = \begin{cases} 300X + 200a, & a < x \leq 30, \\ 600X - 100a, & 10 \leq x \leq a \end{cases}$$

$$E[g(X; a)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x; a) f_X(x) dx \geq 9280$$

$$\text{其中 } f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{20}, & 10 \leq x \leq 30, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

解得 $20 \frac{2}{3} \leq a \leq 26$, 最小进货量为 21 单位.

【评注】 本题是 1998 年数四的考题. 这类考题在数三和数四应用题中时有出现. 这类题的关键是求出利润的函数, 近几年数三与数一考题相对比较一致. 数四合并到数三, 此类“经济应用题”考得很少了.

$$2.【解】 \text{ 利润函数应为 } g(X, Y) = \begin{cases} 1000Y, & Y \leq X, \\ 500(X + Y), & Y > X. \end{cases}$$

$$\text{而 } f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{100}, & 10 \leq x \leq 20, \quad 10 \leq y \leq 20, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$\text{每周利润的期望值 } E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy = 14166.67 (\text{元}).$$

二、协方差 $\text{Cov}(X, Y)$

12 (2012, 22 题, 11 分) 设二维离散型随机变量 (X, Y) 的概率分布为

X \ Y	Y		
	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

(I) 求 $P\{X = 2Y\}$;

(II) 求 $\text{Cov}(X - Y, Y)$.

【分析】 (I) $X = 2Y$ 就有几种可能: $X = 0, Y = 0$ 和 $X = 2, Y = 1$, 直接可以计算.

(II) $\text{Cov}(X - Y, Y) = \text{Cov}(X, Y) - \text{Cov}(Y, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) - D(Y)$.

只要设法找出 XY 的分布就可以计算了.

【解】 (I) $P\{X = 2Y\} = P\{X = 0, Y = 0\} + P\{X = 2, Y = 1\} = \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4}$.

(II) 由 (X, Y) 的概率分布可得, X, Y, XY 的概率分布分别为

$X \backslash Y$	0	1	2	
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

$$\text{故 } E(X) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3},$$

$$E(Y) = \frac{1}{3}(0 + 1 + 2) = 1,$$

$$D(Y) = \frac{1}{3}(0 - 1)^2 + \frac{1}{3}(1 - 1)^2 + \frac{1}{3}(2 - 1)^2 = \frac{2}{3}.$$

微信公众号【顶尖考研】

XY	0	1	4
	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$

$$\begin{aligned} P\{XY = 0\} &= P\{X = 0\} + P\{X \neq 0, Y = 0\} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12}, \end{aligned}$$

$$P\{XY = 1\} = P\{X = 1, Y = 1\} = \frac{1}{3},$$

$$E(XY) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

$$\text{所以 } \text{Cov}(X - Y, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) - D(Y) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}.$$

13 (2018, 22 题, 11 分) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 的概率分布为 $P\{X = 1\} = P\{X = -1\} = \frac{1}{2}$,

Y 服从参数为 λ 的泊松分布. 令 $Z = XY$.

(I) 求 $\text{Cov}(X, Z)$;

(II) 求 Z 的概率分布.

【分析】 X 的分布 $\begin{array}{c|cc} X & -1 & 1 \\ \hline P & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$, $Y \sim P(\lambda)$, $P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

(I) 求 $\text{Cov}(X, Z) = \text{Cov}(X, XY) = E(X^2 Y) - E(X)E(XY)$.

再根据 X, Y 相互独立, $E(X^2 Y) = E(X^2)E(Y)$, 和 $E(XY) = E(X)E(Y)$, 不难求出 $\text{Cov}(X, Z)$.

(II) 求 $Z = XY$ 的分布, 首先确定 Z 的取值范围, Z 取值为 $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ 再利用 X, Y 的



独立性,就可以求出 Z 的分布.

【解】(I) $\text{Cov}(X, Z) = \text{Cov}(X, XY) = E(X^2Y) - E(X)E(XY)$, 其中

$$E(X^2Y) = E(X^2)E(Y) = \left[(-1)^2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot \frac{1}{2}\right]\lambda = \lambda, E(X)E(XY) = 0E(XY) = 0$$

所以 $\text{Cov}(X, Z) = \lambda$.

(II) X 取值 $-1, 1, Y$ 取值 $0, 1, 2, \dots$.

因此 $Z = XY$ 取值为 $0, \pm 1, \pm 2, \dots$,

Z 的分布为 $P\{Z = 0\} = P\{Y = 0\} = e^{-\lambda}$,

$$P\{Z = k\} = P\{X = 1, Y = k\} = P\{X = 1\}P\{Y = k\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 1, 2, 3, \dots$$

$$P\{Z = -k\} = P\{X = -1, Y = k\} = P\{X = -1\}P\{Y = k\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 1, 2, 3, \dots$$

14 (2020, 14 题, 4 分) 设 X 服从区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的均匀分布, $Y = \sin X$, 则 $\text{Cov}(X, Y) =$ _____.

【答案】 $\frac{2}{\pi}$.

【解析】 $X \sim U\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), Y = \sin X, EX = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E(XY) - E(X) \cdot E(Y) = E(XY) = E(X \sin X) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \cdot \frac{1}{\pi} dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = \frac{2}{\pi} (\sin x - x \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

三、相关系数 ρ_{XY}

15 (2011, 22 题, 11 分) 设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

,

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

且 $P\{X^2 = Y^2\} = 1$.

(I) 求二维随机变量 (X, Y) 的概率分布;

(II) 求 $Z = XY$ 的概率分布;

(III) 求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY} .

【分析】 由 $P\{X^2 = Y^2\} = 1$ 得 $P\{X^2 \neq Y^2\} = 0$,

而 $P\{X^2 \neq Y^2\} = P\{X = 0, Y = -1\} + P\{X = 0, Y = 1\} + P\{X = 1, Y = 0\} = 0$,

即 $P\{X = 0, Y = -1\} = P\{X = 0, Y = 1\} = P\{X = 1, Y = 0\} = 0$.

【解】 (I) (X, Y) 的概率分布的边缘分布为

$\begin{array}{c} Y \\ X \end{array}$	-1	0	1	$P_{i\cdot}$
0				$\frac{1}{3}$
1				$\frac{2}{3}$
$P_{\cdot j}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

再填入 $P\{X=0, Y=-1\} = P\{X=0, Y=1\} = P\{X=1, Y=0\} = 0$.

$\begin{array}{c} Y \\ X \end{array}$	-1	0	1	
0	0		0	$\frac{1}{3}$
1		0		$\frac{2}{3}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

得

最后得到

$\begin{array}{c} Y \\ X \end{array}$	-1	0	1	
0	0	$\frac{1}{3}$	0	
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	

(II) $Z = XY$ 的可能取值 $-1, 0, 1$. 由 (X, Y) 的概率分布可得 Z 的概率分布

Z	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

(III) 由 X, Y 及 Z 的概率分布得

$$E(X) = \frac{2}{3}, D(X) = \frac{2}{9}, E(Y) = 0, D(Y) = \frac{2}{3}, E(XY) = E(Z) = 0$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$$

所以 $\rho_{XY} = 0$.

16 (2012, 8 题, 4 分) 将长度为 1m 的木棒随机地截成两段, 则两段长度的相关系数为

- (A) 1. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $-\frac{1}{2}$. (D) -1.

【答案】 D.

【解析】 设木棒截成两段的长度分别为 X 和 Y . 显然 $X + Y = 1$, 即 $Y = 1 - X$, 然后用公式

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)} \sqrt{D(Y)}}$$

$Y = 1 - X$, 则 $D(Y) = D(1 - X) = D(X)$.

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(X, 1 - X) = \text{Cov}(X, 1) - \text{Cov}(X, X) = 0 - D(X) = -D(X)$$

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)} \sqrt{D(Y)}} = \frac{-D(X)}{\sqrt{D(X)} \sqrt{D(X)}} = -1$$

答案应选(D).

17 (2016, 8 题, 4 分) 随机试验 E 有三种两两不相容的结果 A_1, A_2, A_3 , 且三种结果发生的概率均为 $\frac{1}{3}$, 将试验 E 独立重复做 2 次, X 表示 2 次试验中结果 A_1 发生的次数, Y 表示 2 次试验中结果



A_2 发生的次数, 则 X 与 Y 的相关系数为

- (A) $-\frac{1}{2}$. (B) $-\frac{1}{3}$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) $\frac{1}{3}$.

【答案】 A.

【解析】 由 $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$, 所以 $X \sim B(2, \frac{1}{3})$, $Y \sim B(2, \frac{1}{3})$.

X 与 Y 的相关系数为 $\rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)} \sqrt{D(Y)}}$, 显然

$$E(X) = E(Y) = \frac{2}{3}, D(X) = D(Y) = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

又 $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$, 为求 $E(XY)$, 先求出 XY 的分布.

X 和 Y 的取值均为 $0, 1, 2$, 所以 XY 的取值应为 $0, 1, 2, 4$.

$P\{XY = 4\} = P\{X = 2, Y = 2\} = 0$, 因为在 2 次试验中不可能 2 次 A_1 和 2 次 A_2 .

同理 $P\{XY = 2\} = P\{X = 1, Y = 2\} + P\{X = 2, Y = 1\} = 0$.

$$P\{XY = 1\} = P\{X = 1, Y = 1\} = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}, P\{XY = 0\} = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}.$$

故 XY 的分布为

XY	0	1	2	4
P	$\frac{7}{9}$	$\frac{2}{9}$	0	0

$E(XY) = \frac{2}{9}$.

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) = \frac{2}{9} - \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = -\frac{2}{9}, \rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)} \sqrt{D(Y)}} = \frac{-\frac{2}{9}}{\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}} = -\frac{1}{2}.$$

【评注】 本题也可用对称性来求解.

设 Z 表示 2 次试验中结果 A_3 发生的次数, 显然 $X + Y + Z = 2$, X, Y, Z 均服从分布 $B(2, \frac{1}{3})$

根据对称性 $D(X) = D(Y) = D(Z) = \frac{4}{9}$ 和 $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(X, Z)$,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= \text{Cov}(X, 2 - X - Z) = \text{Cov}(X, 2) - \text{Cov}(X, X) - \text{Cov}(X, Z) \\ &= 0 - D(X) - \text{Cov}(X, Y). \end{aligned}$$

$$\text{即 } 2\text{Cov}(X, Y) = -D(X).$$

$$\text{所以 } \rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)} \sqrt{D(Y)}} = \frac{-\frac{1}{2}D(X)}{\sqrt{D(X)} \sqrt{D(X)}} = -\frac{1}{2}.$$

第五章 大数定律和中心极限定理

本章导读

本章内容不是考试的重点,2001年考过一次切比雪夫不等式,近十年就没再考过.本章内容包括一个不等式:切比雪夫不等式;三个大数定律:切比雪夫大数定律、伯努利大数定律、辛钦大数定律;二个中心极限定理:棣莫弗-拉普拉斯定理、列维-林德伯格定理.

试题特点

本章试题大多是简单的选择题和填空题.只要把这些不等式、定律和定理的条件与结论记住就可以了.前几年数三、数四曾经有用中心极限定理来近似计算的解答题.但由于考试时不能使用计算器,因计算量过大这类考题近几年也不太多出现.

考题详析

1 (2020,8题,4分) 设 $X_1, X_2, \dots, X_{100}$ 为来自总体 X 的简单随机样本,其中 $P\{X=0\} = P\{X=1\} = \frac{1}{2}$, $\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数,则利用中心极限定理可得 $P\left\{\sum_{i=1}^{100} X_i \leq 55\right\}$ 的近似值为

- (A) $1 - \Phi(1)$. (B) $\Phi(1)$. (C) $1 - \Phi(0.2)$. (D) $\Phi(0.2)$.

【答案】 B.

【解析】 $\begin{array}{c|cc} X & 0 & 1 \\ \hline P & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$, $E(X) = \frac{1}{2}$, $D(X) = \frac{1}{4}$, X_i 独立同分布,方差存在,根据中心极限定

理 $\sum_{i=1}^{100} X_i$ 近似服从正态分布 $N\left(100 \times \frac{1}{2}, 100 \times \frac{1}{4}\right)$, 即 $N(50, 25)$.

$$P\left\{\sum_{i=1}^{100} X_i \leq 55\right\} = P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 50}{\sqrt{25}} \leq \frac{55 - 50}{\sqrt{25}}\right\} = \Phi\left(\frac{55 - 50}{\sqrt{25}}\right) = \Phi(1)$$

答案选(B).

练习题

1. (2001,3分) 设随机变量 X 的方差为 2, 则根据切比雪夫不等式估计 $P\{|X - E(X)| \geq 2\} \leq$ _____.

2. (2001,数三,8分) 一生产线生产的产品成箱包装,每箱的重量是随机的.假设每箱平均重量



50 千克,标准差为 5 千克.若用最大载重量为 5 吨的汽车承运,试利用中心极限定理说明每辆车最多可以装多少箱,才能保障不超载的概率大于 0.977($\Phi(2) = 0.977$,其中 Φ 是标准正态分布函数).

3. (2002, 数四, 3 分) 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立, $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ 则根据列维-林德伯格(Levy-Lindberg) 中心极限定理, 当 n 充分大时, S_n 近似服从正态分布, 只要 $X_1, X_2, \dots, X_n$

(A) 有相同的数学期望.

(B) 有相同的方差.

(C) 服从同一指数分布.

(D) 服从同一离散分布.

4. (2003, 数三, 4 分) 设总体 X 服从参数为 2 的指数分布, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ 依概率收敛于_____.

5. (2005, 数四, 4 分) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 为独立同分布的随机变量列, 且均服从参数为 $\lambda (\lambda > 1)$ 的指数分布, 记 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, 则

$$(A) \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\lambda}{\lambda \sqrt{n}} \leq x \right\} = \Phi(x).$$

$$(B) \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leq x \right\} = \Phi(x).$$

$$(C) \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\lambda \sum_{i=1}^n X_i - n}{\sqrt{n}} \leq x \right\} = \Phi(x).$$

$$(D) \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - \lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leq x \right\} = \Phi(x).$$

练习题参考答案

1. 【答案】 $\frac{1}{2}$.

【解析】 $P\{|X - E(X)| \geq 2\} \leq \frac{D(X)}{2^2} = \frac{1}{2}$.

答案应填 $\frac{1}{2}$.

2. 【解】 设 n 是所求箱数, 又设第 i 箱的重量是 X_i (千克) $i = 1, 2, \dots, n$. 显然 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 独立同分布. 根据中心极限定理 $T_n = \sum_{i=1}^n X_i$ 近似服从正态分布 $N(50n, 25n)$

$$P\{T_n \leq 5000\} = P\left\{\frac{T_n - 50n}{5\sqrt{n}} \leq \frac{5000 - 50n}{5\sqrt{n}}\right\} \approx \Phi\left(\frac{1000 - 10n}{\sqrt{n}}\right) > 0.977 = \Phi(2)$$

由此可见 $\frac{1000 - 10n}{\sqrt{n}} > 2$, 解得 $n < 98.0199$.

答案最多可以装 98 箱.

3. 【答案】 C.

4. 【答案】 $\frac{1}{2}$.

【解析】 根据切比雪夫大数定律或者辛钦大数定律 $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$, 依概率收敛于

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [D(X_i) + (E(X_i))^2] = \frac{1}{2}$$

答案应填 $\frac{1}{2}$.

5. 【答案】 C.

【解析】 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 独立同分布、方差存在. 根据中心极限定理

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)}} \leq x \right\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - \frac{n}{\lambda}}{\sqrt{\frac{n}{\lambda^2}}} \leq x \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\lambda \sum_{i=1}^n X_i - n}{\sqrt{n}} \leq x \right\} = \Phi(x). \end{aligned}$$

答案应选(C).

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



第六章 数理统计的基本概念

本章导读

本章是数理统计的基础,也是重点之一.数理统计的基本概念包括总体、简单随机样本、统计量、样本均值、样本方差等.特别对正态总体的分布及其性质应予以充分的注意,对 χ^2 分布、 t 分布和 F 分布,要掌握这些分布对应随机变量的典型模式和它们参数的确定.

试题特点

这几年数一的数理统计考一个大题,有时还会有一个填空题或选择题.一般来说,数理统计是历届考生的薄弱点,很多考生感到公式多不好记,其实只要熟记一个总体的 $\bar{X}, S^2, E\bar{X}, D\bar{X}, EX^2$ 和 χ^2 分布, t 分布, F 分布的典型模式和参数,尤其正态总体抽样分布的一些性质就可以了.

考题详析

- 1** (2013, 8 题, 4 分) 设随机变量 $X \sim t(n), Y \sim F(1, n)$, 给定 $\alpha (0 < \alpha < 0.5)$, 常数 c 满足 $P\{X > c\} = \alpha$, 则 $P\{Y > c^2\} =$
- (A) α . (B) $1 - \alpha$. (C) 2α . (D) $1 - 2\alpha$.

【答案】 C.

【解析】 $X \sim t(n)$, 根据 t 分布的典型模式, 可将 X 表示为:

$$X = \frac{X_1}{\sqrt{Y_1/n}}, \text{ 其中 } X_1 \sim N(0, 1); Y_1 \sim \chi^2(n); X_1, Y_1 \text{ 相互独立.}$$

因为 t 分布的密度函数是偶函数, 所以给定 $\alpha (0 < \alpha < 0.5)$,

$$P\{X > c\} = \alpha, \text{ 则必有 } c > 0 \text{ 且 } P\{X < -c\} = P\{X > c\} = \alpha,$$

$$\text{又 } X^2 = \frac{X_1^2}{Y_1/n}, \text{ 其中 } X_1^2 \sim \chi^2(1); Y_1 \sim \chi^2(n); X_1^2, Y_1 \text{ 相互独立,}$$

根据 F 分布的典型模式, $X^2 \sim F(1, n)$.

$$P\{Y > c^2\} = P\{X^2 > c^2\} = P\{X > c\} + P\{X < -c\} = 2\alpha$$

- 2** (2017, 8 题, 4 分) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$ 为来自总体 $N(\mu, 1)$ 的简单随机样本, 记 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 则下列结论中不正确的是

(A) $\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$ 服从 χ^2 分布.

(B) $2(X_n - X_1)^2$ 服从 χ^2 分布.

(C) $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 服从 χ^2 分布.

(D) $n(\bar{X} - \mu)^2$ 服从 χ^2 分布.

【答案】 B.

【解析】 由于 $X_i \sim N(\mu, 1), i = 1, 2, \dots, n$ 相互独立

$$X_n - X_1 \sim N(0, 2), \frac{X_n - X_1}{\sqrt{2}} \sim N(0, 1), \frac{(X_n - X_1)^2}{2} \sim \chi^2(1)$$

显然 $2(X_n - X_1)^2 \sim \chi^2$ 不正确. 答案应选(B).

练习题

1. (1999, 数三, 7分) 设 $X_1, X_2, \dots, X_9$ 是来自正态总体 X 的简单随机样本, $Y_1 = \frac{1}{6}(X_1 + \dots + X_6), Y_2 = \frac{1}{3}(X_7 + X_8 + X_9), S^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=7}^9 (X_i - Y_2)^2, Z = \frac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{S}$.

证明统计量 Z 服从自由度为 2 的 t 分布.

2. (2001, 数三, 3分) 设总体 X 服从分布 $N(0, 2^2)$, 而 $X_1, X_2, \dots, X_{15}$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 则随机变量

$$Y = \frac{X_1^2 + \dots + X_{10}^2}{2(X_{11}^2 + \dots + X_{15}^2)}$$

服从_____分布, 参数为_____.

3. (2002, 数三, 3分) 设随机变量 X 和 Y 都服从标准正态分布, 则

(A) $X+Y$ 服从正态分布.

(B) $X^2 + Y^2$ 服从 χ^2 分布.

(C) X^2 和 Y^2 都服从 χ^2 分布.

(D) X^2/Y^2 服从 F 分布.

4. (2004, 数三, 4分) 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma^2)$, 总体 Y 服从正态分布 $N(\mu_2, \sigma^2)$, $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$ 和 $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$ 分别是来自总体 X 和 Y 的简单随机样本, 则

$$E \left[\frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{j=1}^{n_2} (Y_j - \bar{Y})^2}{n_1 + n_2 - 2} \right] = \underline{\hspace{2cm}}.$$

5. (2006, 数三, 4分) 设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} (-\infty < x < +\infty)$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为总体 X 的简单随机样本, 其样本方差为 S^2 , 则 $E(S^2) = \underline{\hspace{2cm}}$.

6. (2015, 数三, 4分) 设总体 $X \sim B(m, \theta)$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自该总体的简单随机样本, $\bar{X}$ 为样本均值, 则 $E \left[\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right] =$

(A) $(m-1)n\theta(1-\theta)$.

(B) $m(n-1)\theta(1-\theta)$.

(C) $(m-1)(n-1)\theta(1-\theta)$.

(D) $mn\theta(1-\theta)$.

练习题参考答案

1. 【解】 本题主要考查 t 随机变量的典型模式: $T = \frac{X_0}{\sqrt{Y_0/n}}$, 其中要求 (1) X_0 与 Y_0 相互独立,



(2) $X_0 \sim N(0,1)$, (3) $Y_0 \sim \chi^2(n)$, 称为 T 服从自由度为 n 的 t 分布, 记 $T \sim t(n)$.

要证明 $Z \sim t(z)$, 必须证明 Z 的构成满足条件(1), (2), (3).

不妨设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $Y_1 \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{6})$, $Y_2 \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{3})$, 且 Y_1 与 Y_2 相互独立.

因此 $D(Y_1 - Y_2) = \frac{\sigma^2}{6} + \frac{\sigma^2}{3} = \frac{\sigma^2}{2}$, 且 $(Y_1 - Y_2) \sim N(0, \frac{\sigma^2}{2})$.

从而 $\frac{Y_1 - Y_2}{\sigma/\sqrt{2}} \sim N(0,1)$, 把 $\frac{Y_1 - Y_2}{\sigma/\sqrt{2}}$ 看成 X_0 , 满足条件(2).

由正态总体样本方差的性质, $\chi^2 = \frac{2S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(2)$ 且与 Y_2 独立, 当然也与 $\frac{Y_1 - Y_2}{\sigma/\sqrt{2}}$ 独立.

如果把 χ^2 看成 Y_0 , $Y_0 \sim \chi^2(2)$, 满足条件(3), χ^2 与 $\frac{Y_1 - Y_2}{\sigma/\sqrt{2}}$ 独立. 满足条件(1). 总之

$$Z = \frac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{S} = \frac{\frac{Y_1 - Y_2}{\sigma/\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{2S^2}{\sigma^2}/2}} = \frac{X}{\sqrt{Y/2}} \sim t(2)$$

2.【答案】 $F(10,5)$.

【解析】 由于 $X \sim N(0,2^2)$, 则

$$\left(\frac{X_1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{X_{10}}{2}\right)^2 \sim \chi^2(10) \text{ 和 } \left(\frac{X_{11}}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{X_{15}}{2}\right)^2 \sim \chi^2(5)$$

且相互独立, 故

$$\frac{\left[\left(\frac{X_1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{X_{10}}{2}\right)^2\right]/10}{\left[\left(\frac{X_{11}}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{X_{15}}{2}\right)^2\right]/5} \sim F(10,5)$$

答案应填服从 F 分布, 参数为 $(10,5)$.

3.【答案】 C.

【解析】 (方法一) X 和 Y 均服从 $N(0,1)$. 故 X^2 和 Y^2 都服从 $\chi^2(1)$ 分布.

答案应选(C).

(方法二) (A) 不成立, 因题中条件既没有 X 与 Y 相互独立, 也没有假定 (X,Y) 正态, 故就保证不了 $X+Y$ 正态.

(B) 和(D) 均不成立, 因为没有 X 与 Y 的相互独立, 所以也没有 X^2 与 Y^2 相互独立, 答案应选(C).

【评注】 我们可以小结正态分布一维和二维间的关系如下:

(1) 当 (X,Y) 正态时, X 与 Y 均正态, 且任何 $aX+bY$ 也正态.

反之, X 与 Y 均正态, 不能保证 (X,Y) 二维正态, 也不能保证 $aX+bY$ 正态.

如果对任何 $aX+bY$ 均正态, 则 (X,Y) 二维正态.

(2) 当 X 与 Y 均正态且相互独立是指 (X,Y) 二维正态, 且相关系数 $\rho_{XY} = 0$.

4.【答案】 σ^2 .

【解析】 记 $S_X^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X})^2$ 和 $S_Y^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{j=1}^{n_2} (Y_j - \bar{Y})^2$, 则

$$\begin{aligned} E \left[\frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{j=1}^{n_2} (Y_j - \bar{Y})^2}{n_1 + n_2 - 2} \right] &= E \left[\frac{(n_1 - 1)S_X^2 + (n_2 - 1)S_Y^2}{n_1 + n_2 - 2} \right] \\ &= \frac{(n_1 - 1)E(S_X^2) + (n_2 - 1)E(S_Y^2)}{n_1 + n_2 - 2} \\ &= \frac{(n_1 - 1)\sigma^2 + (n_2 - 1)\sigma^2}{n_1 + n_2 - 2} = \sigma^2. \end{aligned}$$

答案应填 σ^2 .

5.【答案】 2.

【解析】 $E(S^2) = D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$
 $= 2 \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{2} e^{-x} dx = 2.$

6.【答案】 B.

【解析】 样本方差 $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, 且 $E(S^2) = D(X) = m\theta(1-\theta)$, 则

$$\begin{aligned} E \left[\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right] &= (n-1)E \left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right] \\ &= (n-1)E(S^2) \\ &= (n-1)m\theta(1-\theta) \end{aligned}$$

答案应选(B).



第七章 参数估计

本章导读

本章内容是考试重点之一,尤其是矩估计法和最大似然估计法是经常考的大题.有时还会要求验证所得估计量的无偏性.区间估计常常是对单个正态总体均值求置信区间.多年来,基本不涉及两个正态总体的参数估计.

试题特点

矩估计法和最大似然估计法一般只对一个参数进行估计,要熟悉离散型和连续型两种不同的形式处理,尤其要正确写出最大似然估计中的似然函数.

估计量的无偏性有时以一个小题单独出现.结合第六章的一些基本概念,按数学期望求.

考题详析

一、参数的矩估计和最大似然估计

1 (2009, 23 题, 11 分) 设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$ 其中参数 $\lambda (\lambda > 0)$

未知, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

(I) 求参数 λ 的矩估计量;

(II) 求参数 λ 的最大似然估计量.

【分析】 矩估计要求出总体的矩. 现未知参数就一个, 只要求出 $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ 就可以.

列出方程 $\bar{X} = E(X)$, 最大似然估计要求写出似然函数 $L(\lambda) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \lambda)$, 而 $f(x)$ 已给出, 就可以直接给出 $L(\lambda)$.

【解】 (I) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{+\infty} \lambda^2 x^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt = \frac{2}{\lambda}$.

令 $\bar{X} = E(X)$, 即 $\bar{X} = \frac{2}{\lambda}$, 解得 λ 的矩估计量为 $\hat{\lambda}_1 = \frac{2}{\bar{X}}$.

(II) 设 $x_1, x_2, \dots, x_n (x_i > 0, i = 1, 2, \dots, n)$ 为样本观测值, 则似然函数为

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \lambda) = \lambda^{2n} e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n x_i$$

$\ln L = 2n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \ln x_i$, 令 $\frac{d \ln L}{d \lambda} = \frac{2n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i = 0$, 解得 $\lambda = \frac{2}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i}$, 故 λ 的最大似然

$$\text{估计量 } \hat{\lambda}_2 = \frac{2}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i} = \frac{2}{\bar{X}}.$$

2 (2011, 23 题, 11 分) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu_0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 其中 μ_0 已知, $\sigma^2 > 0$ 未知. $\bar{X}$ 和 S^2 分别表示样本均值和样本方差.

(I) 求参数 σ^2 的最大似然估计 $\hat{\sigma}^2$;

(II) 计算 $E(\hat{\sigma}^2)$ 和 $D(\hat{\sigma}^2)$.

【分析】 求最大似然估计关键在于写出似然函数

$$L(\sigma^2) = \prod_{i=1}^n f(X_i)$$

而 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu_0)^2}{2\sigma^2}}$ 就可以直接给出 $L(\sigma^2)$, 求出 $\hat{\sigma}^2$ 后可以直接计算 $E(\hat{\sigma}^2)$ 和 $D(\hat{\sigma}^2)$.

【解】 (I) 设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为样本观测值, 则似然函数为

$$L(\sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2}$$

$$\ln L(\sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2$$

令: $\frac{d \ln L(\sigma^2)}{d(\sigma^2)} = 0$, 得

$$-\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2 = 0$$

从而得 σ^2 的最大似然估计

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2$$

(II) **(方法一)** $E(\hat{\sigma}^2) = E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i - \mu_0)^2 = \sigma^2$,

$$D(\hat{\sigma}^2) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(X_i - \mu_0)^2 = \frac{1}{n} D(X_i - \mu_0)^2$$

由于 $\frac{X_i - \mu_0}{\sigma} \sim N(0, 1)$, 故 $(\frac{X_i - \mu_0}{\sigma})^2 \sim \chi^2(1)$, $D(\frac{X_i - \mu_0}{\sigma})^2 = 2$

所以 $D(X_i - \mu_0)^2 = 2\sigma^4$, 即 $D(\hat{\sigma}^2) = \frac{2\sigma^4}{n}$.

(方法二) 由于

$$\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$$

所以 $E\left(\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}\right) = n$ 和 $D\left(\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}\right) = 2n$.



即 $E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$ 和 $D(\hat{\sigma}^2) = \frac{2\sigma^4}{n}$.

3 (2012, 23 题, 11 分) 设随机变量 X 与 Y 相互独立且分别服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 与 $N(\mu, 2\sigma^2)$, 其中 σ 是未知参数且 $\sigma > 0$. 记 $Z = X - Y$.

(I) 求 Z 的概率密度 $f(z; \sigma^2)$;

(II) 设 $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ 为来自总体 Z 的简单随机样本, 求 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$;

(III) 证明 $\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量.

【分析】 (I) $X \sim N(\mu, \sigma^2), Y \sim N(\mu, 2\sigma^2)$ 且相互独立, 则 $X - Y \sim N(0, 3\sigma^2)$, 就不难求出 $f(z; \sigma^2)$.

(II) 有了 $f(z; \sigma^2)$, 不难写出似然函数 $L = \prod_{i=1}^n f(z_i; \sigma^2)$. 再最大化.

(III) 就是证明 $E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$.

【解】 (I) $X - Y \sim N(0, 3\sigma^2)$, 所以

$$f(z; \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{3\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2 \cdot 3\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{6\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{6\sigma^2}}, \quad -\infty < z < +\infty$$

$$(II) L = \prod_{i=1}^n f(z_i; \sigma^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{6\pi}\sigma} \right)^n e^{-\frac{1}{6\sigma^2} \sum_{i=1}^n z_i^2},$$

$$\ln L = -\frac{n}{2} (\ln 6\pi + \ln \sigma^2) - \frac{1}{6\sigma^2} \sum_{i=1}^n z_i^2,$$

$$\frac{d \ln L}{d(\sigma^2)} = -\frac{n}{2} \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{6\sigma^4} \sum_{i=1}^n z_i^2 = 0, \text{ 解得 } \sigma^2 = \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n z_i^2,$$

$$\text{最大似然估计量为 } \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n Z_i^2.$$

$$(III) E(\hat{\sigma}^2) = \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n E(Z_i^2) = \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n [D(Z_i) + (E(Z_i))^2] = \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n 3\sigma^2 = \sigma^2, \hat{\sigma}^2 \text{ 是 } \sigma^2 \text{ 的无偏估计量.}$$

4 (2013, 23 题, 11 分) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{\theta^2}{x^3} e^{-\frac{\theta}{x}}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 θ 为未知参数且大于零. $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

(I) 求 θ 的矩估计量;

(II) 求 θ 的最大似然估计量.

【分析】 本题求矩估计量和最大似然估计量.

求矩估计量, 只要先求出 $E(X)$, 然后令 $E(X) = \bar{X}$,

求最大似然估计量关键在于求出似然函数 $L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$.

$$\text{【解】 (I) 因为 } f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{\theta^2}{x^3} e^{-\frac{\theta}{x}}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$\text{所以 } E(X) = \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{\theta^2}{x^3} e^{-\frac{\theta}{x}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\theta^2}{x^2} e^{-\frac{\theta}{x}} dx = \theta,$$

令 $\bar{X} = E(X)$, 其中 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 即有 $\bar{X} = \theta$,

所以 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta} = \bar{X}$, 其中 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

(II) 设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为样本观测值, 似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = \begin{cases} \frac{\theta^{2n}}{(x_1 x_2 \cdots x_n)^3} e^{-\theta \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}, & x_1, x_2, \dots, x_n > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

当 $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ 时, $\ln L(\theta) = 2n \ln \theta - \theta \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} - 3 \sum_{i=1}^n \ln x_i$.

$$\text{令 } \frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{2n}{\theta} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = 0, \text{ 求得 } \theta \text{ 的最大似然估计值为 } \hat{\theta} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}},$$

所以 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}}$.

5 (2014, 23 题, 11 分) 设总体 X 的分布函数为

$$F(x; \theta) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

其中 θ 是未知参数且大于零, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

(I) 求 $E(X)$ 与 $E(X^2)$;

(II) 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_n$.

(III) 是否存在实数 a , 使得对任何 $\varepsilon > 0$, 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\hat{\theta}_n - a| \geq \varepsilon\} = 0$?

【分析】 (I) 给出 $F(x; \theta)$ 就有 $f(x; \theta)$, 密度函数有了, 就有

$$E(X^i) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^i f(x; \theta) dx \quad (i = 1, 2, \dots)$$

(II) 求出 $f(x; \theta)$ 就可构造似然函数 $L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$, 就不难求最大似然估计量.

(III) $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\hat{\theta}_n - a| \geq \varepsilon\} = 0$ 等价于 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\hat{\theta}_n - a| < \varepsilon\} = 1$, 就是 $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} a$.

依概率收敛涉及大数定律.

【解】 (I) 总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = F'(x; \theta) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x \cdot f(x; \theta) dx = \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{2x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{\pi\theta}} e^{-\frac{x^2}{\theta}} dx$$



设 $Y \sim N\left(0, \frac{\theta}{2}\right)$, 则 Y 的概率密度 $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi\theta}} e^{-\frac{y^2}{\theta}}$, $-\infty < y < +\infty$. 所以

$$E(X) = \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{\pi\theta}} e^{-\frac{x^2}{\theta}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} EY^2 = \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} DY = \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} \cdot \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{\pi\theta}}{2}$$

即 $E(X) = \frac{\sqrt{\pi\theta}}{2}$,

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 f(x; \theta) dx = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \frac{2x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}} dx = \theta \int_0^{+\infty} te^{-t} dt = \theta$$

(II) 设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为样本观测值, 似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = \begin{cases} \frac{2^n x_1 x_2 \cdots x_n}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n x_i^2}, & x_1, x_2, \dots, x_n > 0; \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

当 $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ 时, $\ln L(\theta) = n \ln 2 + \sum_{i=1}^n \ln x_i - n \ln \theta - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n x_i^2$.

令 $\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$, 解得 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$.

从而 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$.

(III) 存在, 且 $a = \theta$. 因为 $X_1^2, X_2^2, \dots, X_n^2, \dots$ 是独立同分布的随机变量序列, 且 $E(X_i^2) = \theta < +\infty$. 所以根据辛钦大数定律, 当 $n \rightarrow \infty$, $\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ 依概率收敛于 $E(X_i^2) = \theta$, 所以对任何 $\varepsilon > 0$ 都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\hat{\theta}_n - \theta| < \varepsilon\} = 1$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\hat{\theta}_n - a| \geq \varepsilon\} = 0$.

6 (2015, 23 题, 11 分) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{1-\theta}, & \theta \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 θ 为未知参数, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自该总体的简单随机样本.

(I) 求 θ 的矩估计量;

(II) 求 θ 的最大似然估计量.

【分析】 (I) 所求参数一个 θ , 可用 $E(X) = \bar{X}$ 来求出 θ 的矩估计量;

(II) 给出 $f(x; \theta)$ 就可以构造似然函数 $L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$, 然后最大化求出 θ 的最大似然估计量.

【解】 (I) $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx = \int_{\theta}^1 \frac{x}{1-\theta} dx = \frac{1}{1-\theta} \frac{x^2}{2} \Big|_{\theta}^1 = \frac{1+\theta}{2}$.

$E(X) = \bar{X}$. 即 $\frac{1+\theta}{2} = \bar{X}$, $\theta = 2\bar{X} - 1$.

θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1 = 2\bar{X} - 1$. 其中 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$.

$$(\text{II}) L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = \begin{cases} \left(\frac{1}{1-\theta}\right)^n, & \theta \leq x_1, \dots, x_n \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

要使 $L(\theta)$ 最大, 只有使 $1-\theta$ 尽量小, 或者 θ 尽量接近 1.

但 $\theta \leq x_1, \dots, x_n$, 故取 $\theta = \min(x_1, \dots, x_n)$ 或 $\theta = \min_{1 \leq i \leq n} x_i$

θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_2 = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$.

【评注】 由于 $X \sim U[\theta, 1]$, 故 $E(X)$ 可直接写出 $\frac{1+\theta}{2}$.

7 (2017, 23 题, 11 分) 某工程师为了解一台天平的精度, 用该天平对一物体的质量做 n 次测量, 该物体的质量 μ 是已知的, 设 n 次测量结果 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立且均服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$. 该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $Z_i = |X_i - \mu|$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 利用 $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ 估计 σ .

(I) 求 Z_1 的概率密度;

(II) 利用一阶矩求 σ 的矩估计量;

(III) 求 σ 的最大似然估计量.

【分析】 $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ 已知, X_i 相互独立同分布, $Z_i = |X_i - \mu|$, 可以理解 $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ 为来自总体 Z 的简单随机样本, Z_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 的概率密度就是 Z 的概率密度 $f_Z(z)$. 设 Z 的分布函数 $F_Z(z)$, 只要求出 $F_Z(z)$, 则 $f_Z(z) = F'_Z(z)$.

(I) Z_1 的密度 $f_Z(z)$;

(II) $f_Z(z)$ 为 σ 的函数, 令 $E(Z) = \bar{Z}$, 其中 $\bar{Z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i$, 就可求出矩估计量 $\hat{\sigma}_1$;

(III) 用 $L = \prod_{i=1}^n f_Z(z_i)$ 对 σ 求最大, 解出 σ 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}_2$.

【解】 (I) Z 的分布函数为

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{Z \leq z\} = P\{|X_1 - \mu| \leq z\} \\ &= P\{-z \leq X_1 - \mu \leq z\} = P\left\{-\frac{z}{\sigma} < \frac{X_1 - \mu}{\sigma} \leq \frac{z}{\sigma}\right\} \\ &= \Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-z}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right) - 1, z \geq 0 \\ F_Z(z) &= 0, z < 0 \\ f_Z(z) &= F'_Z(z) = \begin{cases} \frac{2}{\sigma} \varphi\left(\frac{z}{\sigma}\right), & z \geq 0, \\ 0, & z < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

其中 $\varphi(x)$ 为标准正态密度函数, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (-\infty < x < +\infty)$.

$$\begin{aligned} (\text{II}) E(Z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} z f_Z(z) dz = \int_0^{+\infty} \frac{2z}{\sigma} \varphi\left(\frac{z}{\sigma}\right) dz = 2\sigma \int_0^{+\infty} \frac{z}{\sigma} \varphi\left(\frac{z}{\sigma}\right) d\frac{z}{\sigma} \\ &= 2\sigma \int_0^{+\infty} t \varphi(t) dt = 2\sigma \int_0^{+\infty} t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} d\left(\frac{t^2}{2}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\pi} \sigma. \end{aligned}$$



矩估计 $\bar{Z} = E(Z)$, 即 $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma = \bar{Z}, \hat{\sigma}_1 = \frac{\sqrt{2\pi}\bar{Z}}{2}$.

$$(III) L = \prod_{i=1}^n f_Z(z_i) = \begin{cases} \frac{2^n}{\sigma^n} \prod_{i=1}^n \varphi\left(\frac{z_i}{\sigma}\right), & \begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{matrix} \geq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} \frac{2^n}{\sigma^n} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^n z_i^2}{2\sigma^2}}, & \begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{matrix} \geq 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{matrix} \geq 0 \text{ 时, } \ln L = n \ln 2 - n \ln \sigma - \frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{\sum_{i=1}^n z_i^2}{2\sigma^2},$$

$$\frac{d \ln L}{d\sigma} = -n \cdot \frac{1}{\sigma} - \sum_{i=1}^n z_i^2 \frac{(-2)}{2\sigma^3} = 0, n\sigma^2 = \sum_{i=1}^n z_i^2$$

$$\text{解得 } \sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i^2},$$

$$\text{所以最大似然估计量 } \hat{\sigma}_2 = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i^2}.$$

8 (2019, 23 题, 11 分) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \sigma^2) = \begin{cases} \frac{A}{\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x \geq \mu, \\ 0, & x < \mu \end{cases}$$

其中 μ 是已知参数, $\sigma > 0$ 是未知参数, A 是常数. $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

(I) 求 A ;

(II) 求 σ^2 的最大似然估计量.

【分析】 (I) 求 A 可用性质:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x; \sigma^2) dx = 1$$

再利用正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的概率密度具有对称性可得.

(II) 求 σ^2 的最大似然估计量, 关键在于先写出似然函数 $L(\sigma^2) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \sigma^2)$.

【解】 (I) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x; \sigma^2) dx = 1$, 得

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x; \sigma^2) dx = \int_{\mu}^{+\infty} \frac{A}{\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A}{\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= A \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= A \sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

$$\text{所以 } A = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

(II) 记 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的观测值, 则似然函数为

$$L(\sigma^2) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \sigma^2) = \begin{cases} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}}, & x_1, x_2, \dots, x_n \geq \mu \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

当 $x_1, x_2, \dots, x_n \geq \mu$ 时, 对数似然函数为

$$\ln L(\sigma^2) = \frac{n}{2} \ln\left(\frac{2}{\pi}\right) - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}$$

$$\frac{d \ln L(\sigma^2)}{d(\sigma^2)} = -\frac{n}{2} \frac{1}{\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{2\sigma^4}$$

令 $\frac{d \ln L(\sigma^2)}{d\sigma^2} = 0$, 得 $n\sigma^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$, 即 σ^2 的最大似然估计值为 $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$,

所以 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$.

9 (2020, 23 题, 11 分) 设某种元件的使用寿命 T 的分布函数为

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-(\frac{t}{\theta})^m}, & t \geq 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 θ, m 为参数且大于零.

(I) 求概率 $P\{T > t\}$ 与 $P\{T > s+t \mid T > s\}$, 其中 $s > 0, t > 0$.

(II) 任取 n 个这种元件做寿命试验, 测得它们的寿命分别为 $t_1, t_2, \dots, t_n$, 若 m 已知, 求 θ 的最大

似然估计值 $\hat{\theta}$.

【解】 $F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-(\frac{t}{\theta})^m}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} f(x) = F'(x) = \begin{cases} m\left(\frac{t}{\theta}\right)^{m-1} \cdot \frac{1}{\theta} e^{-(\frac{t}{\theta})^m}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$

(I) $P\{T > t\} = \int_t^{+\infty} f(t) dt = F(t) \Big|_t^{+\infty} = F(+\infty) - F(t) = e^{-(\frac{t}{\theta})^m}, t > 0.$

$$P\{T > s+t \mid T > s\} = \frac{P\{T > s+t, T > s\}}{P\{T > s\}} = \frac{P\{T > s+t\}}{P\{T > s\}} = \frac{e^{-(\frac{s+t}{\theta})^m}}{e^{-(\frac{s}{\theta})^m}} \\ = e^{-(\frac{s+t}{\theta})^m + (\frac{s}{\theta})^m}$$

(II) 给定 $t_1, t_2, \dots, t_n$, 似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(t_i) = \prod_{i=1}^n m\left(\frac{t_i}{\theta}\right)^{m-1} \frac{1}{\theta} e^{-(\frac{t_i}{\theta})^m} = m^n \prod_{i=1}^n \frac{t_i^{m-1}}{\theta^m} e^{-(\frac{t_i}{\theta})^m}$$

$$\ln L(\theta) = n \ln m + \sum_{i=1}^n (m-1) \ln t_i - mn \ln \theta - \sum_{i=1}^n \frac{t_i^m}{\theta^m}$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = -mn \frac{1}{\theta} - \sum_{i=1}^n \frac{(-m)t_i^m}{\theta^{m+1}} = 0, -\frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^n \frac{t_i^m}{\theta^{m+1}} = 0,$$

解得 $\theta^m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^m$, 不难验证为最大值.



$$\text{最大似然估计值 } \hat{\theta} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^m}.$$

二、无偏估计量与置信区间

10 (2009, 14 题, 4 分) 设 $X_1, X_2, \dots, X_m$ 为来自二项分布总体 $B(n, p)$ 的简单随机样本, $\bar{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差. 若 $\bar{X} + kS^2$ 为 np^2 的无偏估计量, 则 $k =$ _____.

【答案】 -1 .

【解析】 若 $\bar{X} + kS^2$ 是 np^2 的无偏估计量, 则有 $E(\bar{X} + kS^2) = E(\bar{X}) + kE(S^2) = np^2$, 就可以定出 k 的值.

由 $\bar{X}, S^2$ 的性质: $E(\bar{X}) = E(X), E(S^2) = D(X)$, 其中 $X \sim B(n, p)$. 所以 $E(\bar{X} + kS^2) = E(\bar{X}) + kE(S^2) = E(X) + kD(X) = np + knp(1-p) = np(1+k) - knp^2 = np^2$. 解得 $k = -1$. 答案应填 -1 .

11 (2010, 23 题, 11 分) 设总体 X 的概率分布为

X	1	2	3
P	$1 - \theta$	$\theta - \theta^2$	θ^2

其中参数 $\theta \in (0, 1)$ 未知, 以 N_i 表示来自总体 X 的简单随机样本 (样本容量为 n) 中等于 i 的个数 ($i = 1, 2, 3$). 试求常数 a_1, a_2, a_3 , 使 $T = \sum_{i=1}^3 a_i N_i$ 为 θ 的无偏估计量, 并求 T 的方差.

【分析】 无偏估计要求 $E(T) = \sum_{i=1}^3 a_i E(N_i) = \theta$, N_i 是样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 中取 i 值的个数. 如果把样本中每个 X_j 取 i 值看成是试验成功, X_j 不取 i 值看成是试验失败, 则样本的 n 个分量看成是 n 重伯努利试验. 如果出现 i 的概率为 p_i , 则 $N_i \sim B(n, p_i)$. 这时 $E(N_i) = np_i, D(N_i) = np_i(1-p_i)$.

【解】 记 $p_1 = 1 - \theta, p_2 = \theta - \theta^2, p_3 = \theta^2$, 则 $N_i \sim B(n, p_i), i = 1, 2, 3$, 故 $E(N_i) = np_i$.

$$E(T) = \sum_{i=1}^3 a_i E(N_i) = \sum_{i=1}^3 a_i np_i = n[a_1(1-\theta) + a_2(\theta - \theta^2) + a_3\theta^2]$$

要使 T 是 θ 的无偏估计量, 则有

$$n[a_1(1-\theta) + a_2(\theta - \theta^2) + a_3\theta^2] = na_1 + n(a_2 - a_1)\theta + n(a_3 - a_2)\theta^2 = \theta$$

$$\text{因此 } \begin{cases} a_1 = 0, \\ a_2 - a_1 = \frac{1}{n}, \\ a_3 - a_2 = 0, \end{cases} \text{ 由此可得当 } \begin{cases} a_1 = 0, \\ a_2 = \frac{1}{n}, \\ a_3 = \frac{1}{n} \end{cases} \text{ 时, } T = \sum_{i=1}^3 a_i N_i \text{ 为 } \theta \text{ 的无偏估计.}$$

这时, $T = \frac{1}{n}(N_2 + N_3)$. 由于 $N_1 + N_2 + N_3 = n$ 故

$$T = \frac{1}{n}(N_2 + N_3) = \frac{1}{n}(n - N_1) = 1 - \frac{N_1}{n}$$

注意到 $N_1 \sim B(n, 1 - \theta)$, 所以

$$D(T) = D(1 - \frac{N_1}{n}) = \frac{1}{n^2} D N_1 = \frac{n(1-\theta)\theta}{n^2} = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$$

12 (2014, 14 题, 4 分) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{2x}{3\theta^2}, & \theta < x < 2\theta, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 θ 是未知参数, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本. 若 $c \sum_{i=1}^n X_i^2$ 是 θ^2 的无偏估计, 则 $c =$ _____.

【答案】 $\frac{2}{5n}$.

【解析】 $E(c \sum_{i=1}^n X_i^2) = c \sum_{i=1}^n E(X_i^2) = cnE(X^2) = cn \int_{\theta}^{2\theta} \frac{2x^3}{3\theta^2} dx = cn \frac{5}{2} \theta^2 = \theta^2, c = \frac{2}{5n}$.

13 (2016, 14 题, 4 分) 设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 样本均值 $\bar{x} = 9.5$, 参数 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间的置信上限为 10.8, 则 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间为 _____.

【答案】 (8.2, 10.8).

【解析】 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本. 由于 μ 的双侧置信区间的上、下限关于样本均值 $\bar{x}$ 是对称的, 故置信下限应为 $9.5 - (10.8 - 9.5) = 8.2$, 置信区间为 (8.2, 10.8).

14 (2016, 23 题, 11 分) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{3x^2}{\theta^3}, & 0 < x < \theta, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad \text{其中 } \theta \in (0, +\infty) \text{ 为未知参数}$$

X_1, X_2, X_3 为来自总体 X 的简单随机样本, 令 $T = \max(X_1, X_2, X_3)$.

(I) 求 T 的概率密度;

(II) 确定 a , 使得 aT 为 θ 的无偏估计.

【分析】 (I) 记 X 的分布函数为 $F(x)$ 和 T 的分布函数为 $F_T(t)$, 则 T 的概率密度 $f_T(t) = F'_T(t)$. 用定义 $F_T(t) = P\{T \leq t\}$ 求出 $F_T(t)$ 后就可得 $f_T(t)$.

(II) $E(aT) = aE(T) = a \int_{-\infty}^{+\infty} t f_T(t) dt = \theta$, 只要求出 $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_T(t) dt$ 就可得到 a .

【解】 (I) 总体 X 的分布函数为

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x; \theta) dx = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x^3}{\theta^3}, & 0 \leq x < \theta, \\ 1, & \theta \leq x \end{cases}$$

$$F_T(t) = P\{T \leq t\} = P\{\max(X_1, X_2, X_3) \leq t\} = P\{X_1 \leq t, X_2 \leq t, X_3 \leq t\}$$

由于 X_1, X_2, X_3 相互独立, 所以

$$F_T(t) = P\{X_1 \leq t\} P\{X_2 \leq t\} P\{X_3 \leq t\} = F^3(t)$$

$$f_T(t) = F'_T(t) = 3F^2(t), f(t; \theta) = \begin{cases} 3\left(\frac{t^3}{\theta^3}\right)^2 \frac{3t^2}{\theta^3}, & 0 < t < \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} \frac{9t^8}{\theta^9}, & 0 < t < \theta, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$(II) E(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_T(t) dt = \int_0^{\theta} \frac{9t^9}{\theta^9} dt = \frac{9}{10} \theta, \text{ 从而 } E(aT) = aE(T) = a \cdot \frac{9}{10} \theta = \theta.$$



所以 $a = \frac{10}{9}$.

15 (2018, 23 题, 11 分) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \sigma) = \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x|}{\sigma}}, -\infty < x < +\infty$$

其中 $\sigma \in (0, +\infty)$ 为未知参数, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本. 记 σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}$.

(I) 求 $\hat{\sigma}$;

(II) 求 $E(\hat{\sigma})$ 和 $D(\hat{\sigma})$.

【分析】 $f(x; \sigma) = \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x|}{\sigma}}, -\infty < x < +\infty$, 求最大似然估计量 $\hat{\sigma}$, 先需写出似然函数

$$L(\sigma) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \sigma) = \frac{1}{(2\sigma)^n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n |x_i|}{\sigma}}$$

然后求最大, $\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = 0$, 解出 $\hat{\sigma}$, 有了 $\hat{\sigma}$ 不难计算 $E\hat{\sigma}$ 和 $D\hat{\sigma}$.

【解】 (I) 设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为样本观测值, 似然函数为

$$L(\sigma) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \sigma) = \frac{1}{(2\sigma)^n} e^{-\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n |x_i|}$$

$$\text{则 } \ln L = -n \ln 2 - n \ln \sigma - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\text{令 } \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = 0 - \frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n |x_i| = 0, \text{ 解得 } \sigma = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i|,$$

$$\text{所以最大似然估计量 } \hat{\sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i|.$$

$$\begin{aligned} \text{(II)} E(\hat{\sigma}) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E|X_i| = E|X| = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x; \sigma) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x|}{\sigma}} dx \\ &= \frac{1}{\sigma} \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x}{\sigma}} dx = \sigma \int_0^{+\infty} \frac{x}{\sigma} e^{-\frac{x}{\sigma}} d\left(\frac{x}{\sigma}\right) = \sigma \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = \sigma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(\hat{\sigma}) &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D|X_i| = \frac{1}{n} D|X| = \frac{1}{n} [E|X|^2 - (E|X|)^2] \\ &= \frac{1}{n} [E(X^2) - \sigma^2] = \frac{1}{n} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x|}{\sigma}} dx - \sigma^2 \right) = \frac{1}{n} \left(\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\sigma} e^{-\frac{x}{\sigma}} dx - \sigma^2 \right) \\ &= \frac{\sigma^2}{n} \left(\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\sigma^2} e^{-\frac{x}{\sigma}} d\left(\frac{x}{\sigma}\right) \right) - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\sigma^2}{n} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\sigma^2}{n}. \end{aligned}$$

第八章 假设检验

本章导读

假设检验是在历年考题中出现最少的一类内容,1998年的真题中曾出现过,再就是2018年、2021年的考题.假设检验的重点在作出“假设”的基本类型,显著性检验的基本思想,检验的基本步骤,两类错误等.

试题特点

假设检验的情况较多,考试时间有限,又不能使用计算器,所以一般考题考查单个总体的均值较多.应该记住方差已知和方差未知时,单个正态总体均值的假设检验的假设类型,统计量选择、检验的基本步骤,根据显著水平确定拒绝域等.

考题详析

1 (2018,8题,4分) 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本. 据此样本检测假设: $H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$, 则

- (A) 如果在检验水平 $\alpha = 0.05$ 下拒绝 H_0 , 那么在检验水平 $\alpha = 0.01$ 下必拒绝 H_0 .
- (B) 如果在检验水平 $\alpha = 0.05$ 下拒绝 H_0 , 那么在检验水平 $\alpha = 0.01$ 下必接受 H_0 .
- (C) 如果在检验水平 $\alpha = 0.05$ 下接受 H_0 , 那么在检验水平 $\alpha = 0.01$ 下必拒绝 H_0 .
- (D) 如果在检验水平 $\alpha = 0.05$ 下接受 H_0 , 那么在检验水平 $\alpha = 0.01$ 下必接受 H_0 .

【答案】 D.

【解析】 检验水平 α 为检验犯第一类错误的概率, 即 H_0 为真的条件下, 拒绝 H_0 而犯错误的概率. 显然 α 变小时, 拒绝 H_0 的范围应变小, 接受 H_0 的范围应变大, 所以 $\alpha = 0.05$ 条件下接受 H_0 , 则在 $\alpha = 0.01$ 条件下必接受. 答案应选(D).

练习题

(1998,4分) 设某次考试的学生成绩服从正态分布, 从中随机地抽取 36 位考生的成绩, 算得平均成绩为 66.5 分, 标准差为 15 分, 问在显著性水平为 0.05 下, 是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分? 并给出检验过程.

附表: t 分布表

$$P\{t(n) \leq t_p(n)\} = p$$

$t_p(n)$ n	p	0.95	0.975
35		1.6896	2.0301
36		1.6883	2.0281



练习题参考答案

【解】 设该次考试的考生成绩为 X , 则 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. 把从 X 中抽取的容量为 n 的样本均值记为 $\bar{X}$, 样本标准差记为 S . 本题就是要在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下检验假设 $H_0: \mu = 70; H_1: \mu \neq 70$.

由于 σ^2 未知, 故用 t 检验, 选用检验统计量. $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n} \sim t(n-1)$. 现在 $\mu_0 = 70, n = 36$.

拒绝域为 $|t| = \frac{|\bar{x} - 70|}{s} \sqrt{36} \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(35)$.

由 $\bar{x} = 66.5, s = 15, t_{1-\frac{\alpha}{2}}(35) = t_{0.975}(35) = 2.0301$, 算得

$$|t| = \frac{|66.5 - 70|}{15} \sqrt{36} = 1.4 < 2.0301$$

所以接受假设 $H_0: \mu = 70$, 即在显著水平 0.05 下, 可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)



金榜时代图书·书目

考研数学系列

书名	作者	出版时间
数学复习全书·基础篇(数学一、二、三通用)	李永乐等	2020年6月
数学基础过关660题(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2020年8月
数学历年真题全精解析·基础篇(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2020年10月
数学公式的奥秘	刘喜波等	2020年10月
数学复习全书(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2020年12月
数学历年真题全精解析(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2021年1月
数学强化通关330题(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2021年1月
高等数学辅导讲义	刘喜波 曹显兵	2021年1月
高等数学辅导讲义	武忠祥	2021年1月
高等数学解题密码·选填题	李永乐	2021年6月
线性代数辅导讲义	李永乐	2021年1月
概率论与数理统计辅导讲义	王式安	2021年1月
线性代数满分过关150	姜晓千	2021年4月
概率论与数理统计满分过关15	姜晓千	2021年7月
数学压轴大题满分过关150	姜晓千	2021年9月
数学核心知识点乱序高效记忆手册	宋浩	2021年9月
数学决胜冲刺6套卷(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2021年10月
数学临阵磨枪(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2021年10月
经济类联考数学复习全书	李永乐等	2021年4月
经济类联考数学通关无忧题	薛威	2021年4月
农学门类联考数学复习全书	李永乐等	2021年4月

大学数学系列

书名	作者	出版时间
大学数学线性代数辅导	李永乐	2018年12月
大学数学高等数学辅导	章纪民	2021年5月
大学数学概率论与数理统计辅导	刘喜波	2021年5月

线性代数期末高效复习笔记	宋浩	2021年7月
高等数学期末高效复习笔记	宋浩	2021年7月
概率论与数理统计期末高效复习笔记	宋浩	2021年7月

考研政治系列

书名	作者	出版时间
思想政治理论大纲命题解析	米鹏	2021年5月
思想政治理论精雕细刻1000题	米鹏	2021年5月
思想政治理论大串讲	米鹏	2021年10月
思想政治理论最后20天必背20题	米鹏	2021年10月
考研政治高分秘训900题	桑宏斌	2021年5月
考研政治冲刺密押题	全国考研政治金榜命题研究中心	2021年11月

考研英语系列

书名	作者	出版时间
考研英语词汇源来如此	全国考研英语金榜命题研究中心	2020年10月
考研英语语法和长难句实战突破18讲	全国考研英语金榜命题研究中心	2020年10月
考研英语阅读理解精雕细刻80篇	全国考研英语金榜命题研究中心	2021年4月
考研词伙	李超	2019年3月
考研句伙	李超	2019年3月
考研英语阅卷人写作高分万能模板	方妍	2018年11月
考研英语语法长难句拆分攻略	欧阳栾天	2021年2月
考研英语实用语法与疑难句精讲笔记	白子墨	2020年12月
考研英语写作精讲笔记	白子墨	2021年6月
词维风暴	姜晗	2019年9月
考研英语长难句核心语法	高维 赵亮	2021年2月
考研英语核心词汇	赵亮 高维	2021年7月
考研英语词汇通关“密”籍	许密杉	2021年5月
考研英语阅读通关“密”籍	许密杉	2021年6月

专业硕士系列

书名	作者	出版时间
写作复习指南	房文学	2021年1月
逻辑复习指南	房文学	2021年3月

逻辑精练 900 题	房文学	2021 年 3 月
逻辑真题全解	房文学	2021 年 3 月

医师资格考试系列

书名	作者	出版时间
贺银成国家临床执业医师资格考试辅导讲义(上、下册)	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业医师资格考试辅导讲义同步练习	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业医师资格考试全真模拟试卷及精析	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业及助理医师资格考试历年考点精析(上、下册)	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业及助理医师资格考试实践技能应试指南	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业助理医师资格考试辅导讲义(上、下册)	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业助理医师资格考试辅导讲义同步练习	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业助理医师资格考试全真模拟试卷及精析	贺银成	2020 年 12 月
国家临床执业及助理医师资格考试抢分速记定心丸	高鑫	2021 年 3 月
刘应科中医执业(助理)医师实践技能通关掌中宝	刘应科	2021 年 4 月
刘应科中医执业(助理)医师综合笔试通关掌中宝	刘应科	2021 年 4 月

考研西医系列

书名	作者	出版时间
贺银成考研西医临床医学综合能力辅导讲义(上、下册)	贺银成	2021 年 3 月
贺银成考研西医临床医学综合能力辅导讲义同步练习	贺银成	2021 年 3 月
贺银成考研西医临床医学综合能力全真模拟试卷及精析	贺银成	2021 年 3 月
贺银成考研西医临床医学综合能力历年真题精析	贺银成	2021 年 3 月

考研中医系列

书名	作者	出版时间
刘应科考研中医综合教材	刘应科	2021 年 3 月
刘应科考研中医综合教材同步练习 3000 题	刘应科	2021 年 3 月
刘应科考研中医综合历年真题精析及复习思路	刘应科	2021 年 3 月
刘应科考研中医综合终极预测试卷	刘应科	2021 年 9 月

书名	作者	出版时间
小王子	[法]安托万·德·圣-埃克苏佩里	2018年12月
飞鸟集	[印]泰戈尔	2018年12月
瓦尔登湖	[美]亨利·戴维·梭罗	2018年12月
了不起的盖茨比	[美]弗·司各特·菲茨杰拉德	2018年12月
简·爱	[英]夏洛蒂·勃朗特	2018年12月
老人与海	[美]海明威	2018年12月
月亮和六便士	[英]威廉·萨默塞特·毛姆	2018年12月
呼啸山庄	[英]艾米莉·简·勃朗特	2018年12月
傲慢与偏见	[英]简·奥斯丁	2018年12月
双城记	[英]查尔斯·狄更斯	2019年3月
朝花夕拾·呐喊	鲁迅	2018年4月
呼兰河传	萧红	2018年4月
骆驼祥子	老舍	2018年4月
我这一辈子	老舍	2018年4月
茶馆	老舍	2018年4月

以上图书书名及出版时间仅供参考,以实际出版物为准,均属金榜时代(北京)教育科技有限公司!

微信公众号:金榜时代考研



原公众号:金榜图书考研,名称已更换

@金榜时代官方微博



天猫
时代巨流图书专营店





乡村艺术 Ke 梦想社

音体美教师 志愿者招募

不要被摩天大厦挡个正着

去青瓦淡墨乡间

用我们的方式热爱这个时代



TEACH FOR CHINA

招募：乡村小学音体美青年教师志愿者

项目 简介

乡村艺术Ke梦想社创办于2017年，旨在改善乡村音体美教师紧缺现状，让乡村儿童感受音体美艺术之美，让更多的孩子，无论出身，都能获得同等的优质教育。梦想社创立之初，便启动了“助力乡村学校音体美课堂”行动计划，截止目前，该计划已牵手近300余名青年志愿者，落地学校已达10所。（详情敬请关注公众号“乡村艺术ke梦想社”）为善益众，求贤若渴，我们，正在远方，等着如诗般的你！

成为志愿者你将获得

- 服务学校包吃包住
- 每月1500元补助
- 志愿者服务期间的短期保障保险
- 方寸天地得享人生意趣，大美原乡遍寻香径落花

我们希望你

- 品行端正，有爱心，有耐心
- 身体健康，能适应艰苦乡村环境
- 受过良好教育且有音体美专业特长
- 认真负责，充满正能量，支教有清晰规划
- 吃苦耐劳，乐于助人，有良好的团队合作精神

报名方式

Step 1.

请以“**报名2021乡村艺术Ke梦想社音体美教师志愿者**”为邮件标题，发送邮件至：
CountryClass@126.com

Step 2.

邮件内容：正文简要介绍你对社会公益的理解，参加本次活动的原因及您的一技之长；

附件1：支教课程设计（包括3节课以上的教案或课件）

附件2：个人简历（Word格式）



书名	出版时间	适用阶段
数学公式的奥秘	2020年3月	全程复习
数学复习全书·基础篇	2020年6月	夯实基础
数学基础过关660题	2020年8月	夯实基础
数学历年真题全精解析·基础篇	2020年10月	夯实基础
数学复习全书	2020年12月	全程复习
数学历年真题全精解析	2021年1月	全程复习
高等数学辅导讲义	2021年1月	强化提高
线性代数辅导讲义	2021年1月	强化提高
概率论与数理统计辅导讲义	2021年1月	强化提高
数学强化通关330题	2021年1月	强化提高
数学决胜冲刺6套卷	2021年10月	冲刺预测
数学临阵磨枪	2021年10月	冲刺预测

G20210008



微信扫一扫
解锁更多精彩内容

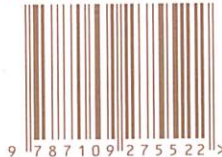


关注作者团队微博
与名师一起互动交流



责任编辑 / 吕睿

ISBN 978-7-109-27552-2



9 787109 275522 >

定价：99.80元