

“助力乡村学校音体美课堂行动”官方合作图书
V研客及全国各大考研培训学校指定用书

金榜时代TM
GLIST 明德·弘毅·品质

金 榜 时 代 考 研 数 学 系 列

数学复习全书

学霸养成笔记与 题源探究同步练习

(数学二)

2022

编著◎李永乐 王式安 刘喜波 武忠祥 宋浩 姜晓千 铁军 李正元 蔡燧林 胡金德

赠 送 本

《题源探究同步练习》+《基础过关660题》+《强化通关330题》
配合使用，效果显著，地毯式刷题无死角！

全书配套练习
检验自身学习水平

题目严扣知识点
可衍生各类型试题

重点题型详细解析
通透易懂

学霸养成笔记

高等数学	(1)	线性代数	(23)
函数、极限、连续	(1)	行列式	(23)
一元函数微分学	(5)	矩 阵	(27)
一元函数积分学	(9)	向 量	(30)
多元函数微积分学	(14)	线性方程组	(33)
常微分方程	(19)	特征值、特征向量、相似矩阵	(36)
		二次型	(39)

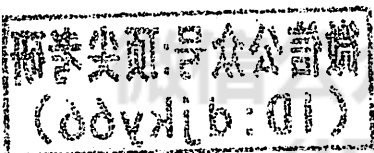
题源探究同步练习

第一篇 高等数学	(43)	第二篇 线性代数	(51)
第一章 函数、极限、连续	(43)	第一章 行列式	(61)
第二章 一元函数微分学	(46)	第二章 矩 阵	(63)
第三章 一元函数积分学	(49)	第三章 向 量	(65)
第四章 多元函数微积分学	(53)	第四章 线性方程组	(67)
第五章 常微分方程	(58)	第五章 特征值、特征向量、相似矩阵 ...	(70)
		第六章 二次型	(72)

参考答案

第一篇 高等数学	(74)	第二篇 线性代数	(86)
第一章 函数、极限、连续	(74)	第一章 行列式	(86)
第二章 一元函数微分学	(76)	第二章 矩 阵	(87)
第三章 一元函数积分学	(79)	第三章 向 量	(89)
第四章 多元函数微积分学	(82)	第四章 线性方程组	(91)
第五章 常微分方程	(84)	第五章 特征值、特征向量、相似矩阵 ...	(92)
		第六章 二次型	(93)

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)



公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

高等数学

函数、极限、连续

一、知识梳理

方法比努力重要！学霸不是天生，养成高效思维，从学会抓重点开始！

1. 函数

提要：概念 函数分类 有界性 单调性 奇偶性 周期性

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

2. 函数极限

提要：定义 无穷小与无穷大 函数极限的性质与定理 计算方法

微信公众号：顶尖考研
(ID: djky66)



3. 数列极限

提要: 定义 极限的性质 证明极限存在的方法 计算方法

4. 连续与间断

提要: 定义 连续相关定理 间断点的分类



二、要记住的结论

不用想，直接用，让你看起来真学霸  资源库，资源典藏 三

学霸养成笔记

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

微信公众号:顶尖考研
(ID: djky66)



三、经典例题、错题集

学霸有发现美的眼，也有不犯同类错误的心 ✨

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

顶尖考研: 公众号: djky66
(ID: djky66)



一元函数微分学

一、知识梳理

方法比努力重要！学霸不是天生，养成高效思维，从学会抓重点开始

1. 导数与微分

提要：定义 定理 求导法则 导数公式

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

2. 导数应用

提要：单调性 极值与最值 凹凸性与拐点 渐近线 曲率与曲率半径

微信公众号：顶尖考研
(ID: djky66)



3. 中值定理

提要: 费马定理 罗尔定理 拉格朗日中值定理 柯西中值定理 泰勒定理

4. 证明题

提要: 不等式的证明 零点的证明



二、要记住的结论

不用想，直接用，让你看起来真学霸



微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

微信公众号:顶尖考研
(ID: djky66)



三、经典例题、错题集

学霸有发现美的眼，也有不犯同类错误的心 ✨

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

顶尖考研公众号
(ID: djky66)



一元函数积分学

一、知识梳理

方法比努力重要！学霸不是天生，养成高效思维，从学会抓重点开始 (๑)

1. 不定积分

提要：定义 性质 计算方法

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

2. 定积分

提要：定义 性质 定理 计算方法

微信公众号：顶尖考研
(ID: djky66)

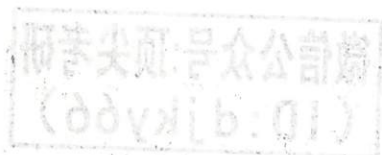
学霸养成笔记



3. 反常积分

提要: 无穷区间上的反常积分 — 定义 性质 常用结论 判敛法
无界函数的反常积分 — 定义 性质 常用结论 判敛法

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)



4. 定积分的几何应用

提要: 平面图形的计算 旋转体的计算 其他应用

学霸养成笔记

5. 定积分相关证明题

提要: 变限积分函数 积分不等式 零点问题

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



二、要记住的结论

不用想，直接用，让你看起来真学霸

学霸养成笔记

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

顶尖考研公众号
(ID: djky66)



三、经典例题、错题集

学霸有发现美的眼，也有不犯同类错误的心 ☀

学霸养成笔记

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

微信公众号:顶尖考研
(ID: djky66)



多元函数微积分学

张祖诒, 殷国兴, 三

一、知识梳理

方法比努力重要! 学霸不是天生, 养成高效思维, 从学会抓重点开始

1. 二元函数的极限与连续、偏导数与微分

提要: 极限与连续 偏导数 可微性与全微分

学霸养成笔记

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

2. 二元函数的微分法

提要: 复合函数的微分法 隐函数的微分法

顶尖考研: 公众号
(ID: djky66)



3. 极值

提要:无条件极值 条件极值 最值

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

微信公众号:顶尖考研
(ID: djky66)



4. 二重积分

第 11 页

提要: 定义 性质 累次积分 交换积分次序 计算方法 例题 习题

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)



二、要记住的结论

不用想，直接用，让你看起来真学霸  蓝韵，蓝韵考研，三

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

微信公众号:顶尖考研
(ID: djky66)



三、经典例题、错题集

学霸有发现美的眼，也有不犯同类错误的心

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

顶尖考研公众号
(ID: djky66)



常微分方程

一、知识梳理

方法比努力重要! 学霸不是天生, 养成高效思维, 从学会抓重点开始

1. 一阶微分方程

提要: 可分离变量方程 齐次方程 一阶线性方程

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

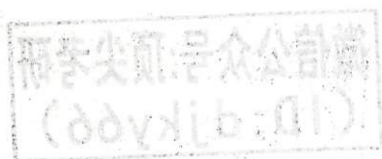
微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



2. 高阶微分方程

提要: 可降阶的微分方程 线性方程解的结构定理 线性常系数齐次微分方程 线性常系数非齐次微分方程

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)



二、要记住的结论

不用想，直接用，让你看起来真学霸  强推，强推，强推，三

学霸养成笔记

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)



三、经典例题、错题集

学霸有发现美的眼，也有不犯同类错误的心

学霸养成笔记

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

顶尖考研公众号
(ID: djky66)



线性代数

行列式

一、知识梳理

方法比努力重要！学霸不是天生，养成高效思维，从学会抓重点开始 (๑)

1. 行列式的性质与计算公式

提要：行列式的性质 按行与按列展开 行列式公式

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

微信公众号:顶尖考研
(ID: djky66)



2. 行列式的计算方法

提要: 数字型行列式 分块矩阵的行列式 抽象矩阵的行列式

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

顶尖考研 公众号
(ID: djky66)



二、要记住的结论

不用想，直接用，让你看起来真学霸  墨香，墨香典藏，三

学霸养成笔记

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

微信公众号:顶尖考研
(ID: djky66)



三、经典例题、错题集

学霸有发现美的眼，也有不犯同类错误的心

学霸养成笔记

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)



矩 阵

科学出版社 2013 年 10 月第 1 版

科学出版社 2013 年 10 月第 1 版

一、知识梳理

方法比努力重要！学霸不是天生，养成高效思维，从学会抓重点开始。

1. 矩阵的概念

提要：矩阵的运算 特殊矩阵

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

2. 矩阵的变换

提要：伴随矩阵 可逆矩阵 初等矩阵与初等变换 等价

微信公众号：顶尖考研
(ID: djky66)

学霸养成笔记



3. 矩阵的秩与分块矩阵

提要: 矩阵的秩 分块矩阵

二、要记住的结论

不用想, 直接用, 让你看起来真学霸

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

顶尖考研公众号
(ID: djky66)



三、经典例题、错题集

学霸有发现美的眼，也有不犯同类错误的心 ✨

学霸养成笔记

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

微信公众号:顶尖考研
(ID: djky66)



向 量

一、知识梳理

方法比努力重要！学霸不是天生，养成高效思维，从学会抓重点开始 ☺

1. 向量运算与线性关系

提要：向量的运算 线性表出 线性相关与线性无关

学霸养成笔记

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

2. 向量组的极大线性无关组与秩

提要：极大线性无关组 向量组的秩

顶尖考研公众号
(ID: djky66)



3. 正交化与正交矩阵

提要: Schmidt 正交化 正交矩阵

二、要记住的结论

不用想, 直接用, 让你看起来真学霸

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



三、经典例题、错题集

学霸有发现美的眼，也有不犯同类错误的心 ✨

学霸养成笔记

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)



线性方程组

一、知识梳理

方法比努力重要！学霸不是天生，养成高效思维，从学会抓重点开始！

1. 有解无解与解的性质

提要：有解无解的判定方法 解的性质与结构定理

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

2. 线性方程组解的求法

提要：齐次线性方程组基础解系的求法 非齐次线性方程组通解的求法 克拉默法则
公共解与同解问题

微信公众号：顶尖考研
(ID: djky66)



二、要记住的结论

不用想，直接用，让你看起来真学霸

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

顶尖考研：公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)



三、经典例题、错题集

学霸有发现美的眼，也有不犯同类错误的心



微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

微信公众号:顶尖考研
(ID: djky66)



特征值、特征向量、相似矩阵

一、知识梳理

方法比努力重要！学霸不是天生，养成高效思维，从学会抓重点开始 ☺

1. 特征值与特征向量

2. 相似与相似对角化

提要：相似矩阵 矩阵的相似对角化定理

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

3. 实对称矩阵的相似对角化方法



二、要记住的结论

不用想，直接用，让你看起来真学霸

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)



三、经典例题、错题集

学霸有发现美的眼，也有不犯同类错误的心 ✨ 提升5分要，二

学霸养成笔记

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

顶尖考研：公众号
(ID: djky66)

2023年12月10日



二次型

一、知识梳理

方法比努力重要！学霸不是天生，养成高效思维，从学会抓重点开始。

1. 化二次型为标准形、规范形

提要：标准形 规范形

学霸养成笔记

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

2. 合同

3. 正定矩阵与正定二次型



二、要记住的结论

不用想，直接用，让你看起来真学霸



学霸养成笔记

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

微信公众号:顶尖考研
(ID: djky66)



三、经典例题、错题集

学霸有发现美的眼，也有不犯同类错误的心 ☆ 每日一练

学霸养成笔记

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)



第一篇 高等数学

第一章 函数、极限、连续

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right) \right]^{\frac{1}{n}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin^2 \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 不存在, 则

(A) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$ 必不存在.

(B) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$ 必存在.

(C) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$ 必不存在.

(D) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$ 必存在.

4. 下述命题正确的是

(A) 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均在 x_0 处不连续, 则 $f(x)g(x)$ 在 x_0 处必不连续.

(B) 设 $g(x)$ 在 x_0 处连续, $f(x_0) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$.

(C) 设在 $x = x_0$ 的去心左邻域内 $f(x) < g(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) = b$, 则必有 $a < b$.

(D) 设 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) = b$, $a < b$, 则必存在 $x = x_0$ 的去心左邻域, 使 $f(x) < g(x)$.

5. 当 $x \neq 0$ 时, $f(x) = \frac{1 + e^{\frac{1}{x}}}{1 - e^{\frac{1}{x}}}$, 且 $f(0) = -1$, 则

(A) 有可去间断点. (B) 有跳跃间断点. (C) 有无穷间断点. (D) 连续.

6. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{(n+k)(n+k+1)}.$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



7. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{x} + \frac{2}{1 + e^{\frac{1}{x}}} \right)$.

微信公众号【顶尖考研】

8. 设 $f(x) = \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}}$, $a_i > 0, a_i \neq 1, i = 1, 2, \dots, n; n \geq 2$ 为确定的整数. 求

① $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$;

② $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$;

③ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.



9. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(1+bx+cx^2)-1-ax}{x^4}$ 存在, 求常数 a, b, c 的值并求此极限值.

10. 设常数 $a \neq -1$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + ax^n - 1}{x^{2n} - (a+1)x^n - 1}$, 讨论 a 的取值, 确定 $f(x)$ 的间断点及其类型.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

11. 设 $x_1 > 0, x_{n+1} = 3 + \frac{4}{x_n} (n = 1, 2, \dots)$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求此极限值.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



第二章 一元函数微分学

设 $x = \int_0^t 2e^{-s^2} ds$, $y = \int_0^t \sin(t-s)^2 ds$, 则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=\sqrt{\pi}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

设曲线 $y = ax^2 + bx + c$ 与曲线 $\begin{cases} x = \frac{4}{\pi} \arctan t, \\ y = \frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$ 在 $t=1$ 处相切并有相同的曲率圆, 则常数 $(a, b, c) = \underline{\hspace{2cm}}$.

设 $f(x)$ 有任意阶导数, 且 $f'(x) = [f(x)]^2$, $f(0) = 2, n \geq 2$, 则 $f^{(n)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

下列 4 个命题

- ① 若 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续, 且 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处可导, 则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处必可导.
- ② 设 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域内有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$ 存在, 则 $f(x) = (x-a)\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处必可导.
- ③ 设 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域内有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$ 存在, 则 $f(x) = |x-a|\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处可导.
- ④ 若 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域内有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(a+x) - f(a-x)}{x}$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处必可导.

正确的命题为

- (A) ① 与 ②. (B) ③ 与 ④. (C) ① 与 ③. (D) ② 与 ④.

下述命题

- ① 设 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$ 均存在, 则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处必连续.
- ② 设 $f'_-(x_0)$ 与 $f'_+(x_0)$ 均存在, 则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处必连续.
- ③ 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ 存在等于 A , 则 $f'(x_0)$ 存在等于 A .
- ④ 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域可导, 且 $f'(x_0) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ 存在等于 A .

则正确的是

- (A) ① 与 ②. (B) ③ 与 ④.
(C) ② 与 ③. (D) ① 与 ④.

设 $f(x)$ 满足 $f''(x) + x[f'(x)]^2 = 1 - e^{-x}$, 且 $f'(0) = 0$. 则

- (A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点.
(B) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点.
(C) 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 左侧邻近是凹的, 右侧邻近是凸的.
(D) 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 左侧邻近是凸的, 右侧邻近是凹的.



7. $f(x) = -\cos \pi x + (2x-3)^3 + \frac{1}{2}(x-1)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的零点个数

(A) 正好 1 个.

(B) 正好 2 个.

(C) 正好 3 个.

(D) 至少 4 个.

8. 在曲线 $y = 1 - x^2$ 上在第一象限内的点作该曲线的切线, 使该切线与两坐标轴围成的三角形面积为最小, 求切点坐标.

9. 证明: 当 $x > 0$ 时, $(x^2 - 1)\ln x \geq (x-1)^2$, 且仅当 $x = 1$ 时成立等号.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

10. 设 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内存在二阶导数, 且 $f''(x) < 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$,

证明: 当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时, $f(x) \leq 2x$, 且仅在 $x = 0$ 时成立等号.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



11. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, $0 < a < b$. 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$ 使

$$\frac{ab}{b-a} [bf(b) - af(a)] = \xi^2 [f(\xi) + \xi f'(\xi)].$$

12. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上存在二阶导数, 且 $f(0) = f(1) = 0$. 证明至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使

$$|f''(\xi)| \geq 8 \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|.$$

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

13. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在二阶导数, $f(a) > 0, f(b) > 0, \int_a^b f(x) dx = 0$. 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f''(\xi) > 0$.



第三章 一元函数积分学

1. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 下述 4 个命题

- ① 对任意正常数 a , $\int_{-a}^a f(x)dx = 0 \Leftrightarrow f(x)$ 为奇函数;
 ② 对任意正常数 a , $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx \Leftrightarrow f(x)$ 为偶函数;
 ③ 对任意正常数 a 及常数 $\omega > 0$, $\int_a^{a+\omega} f(x)dx$ 与 a 无关 $\Leftrightarrow f(x)$ 有周期 ω ;
 ④ $\int_0^x f(t)dt$ 对 x 有周期 $\omega \Leftrightarrow \int_0^\omega f(t)dt = 0$.

正确的命题个数为

- (A) 4 个. (B) 3 个. (C) 2 个. (D) 1 个.

2. 设 $M = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\tan x}{1+x^4} + x^8 \right) dx$, $N = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} [\sin^8 x + \ln(x + \sqrt{x^2+1})] dx$, $P = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\tan^4 x + e^x \cos x - e^{-x} \cos x) dx$, 则有

- (A) $P > N > M$. (B) $N > P > M$. (C) $N > M > P$. (D) $P > M > N$.

3. 设 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0, \\ x^2 + a, & x > 0, \end{cases}$ 则 $F(x) = \int_{-1}^x f(t)dt$ 在 $x = 0$ 处

- (A) 极限存在但不连续. (B) 连续但不可导.
 (C) 可导. (D) 是否可导与 a 的取值有关.

4. 求 $\int \frac{1+x^2+x^4}{x^3(1+x^2)} \ln(1+x^2) dx$.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

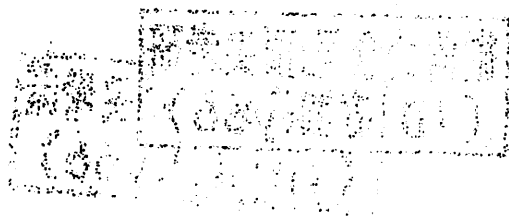


5. 求 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}} dx$.

6. 求 $\int_0^{2\pi} x \sin^8 x dx$.

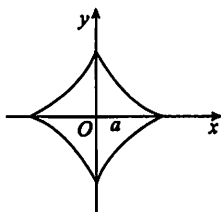
微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

7. 设 $G(x) = \int_{x^2}^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^3}} dt$, 求 $\int_0^1 xG(x) dx$.



8. 求 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$.

9. 星形线 $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases} a > 0$. 求 ① 它所围成的图形 D 的面积; ② 它的全长;
③ 绕 x 轴旋转而成的旋转面的全面积; ④ D 绕 x 轴旋转成的旋转体体积.



题源探究同步练习

10. 某闸门以 y 轴为对称轴, 闸门上部为矩形, 下部为抛物线 $y = x^2$ 与 $y = 1$ (米) 围成的抛物弓形, 当水与闸门上部相平时, 欲使闸门矩形部分承受的水压力与闸门下部承受的水压力之比为 $5:4$, 矩形部分的高 h 应为多少?

微信公众号: 顶尖考研
 (ID: djky66)



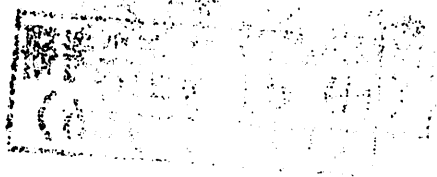
11. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且单调增加, 证明 $\int_a^b x f(x) dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx$.

12. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, $f(0) = \int_0^1 f(x) dx$. 试证在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 使 $\int_0^\xi f(x) dx = \xi f(\xi)$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

13. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有连续的二阶导数, 试证: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\xi).$$



第四章 多元函数微积分学

1. 设函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 点某邻域内有定义, 且 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - (x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 1$, 则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处
- (A) 不连续. (B) 两个偏导数都不存在.
(C) 两个偏导数存在但不可微. (D) 可微.

2. 证明 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{|xy|}}{x^2 + y^2} \sin(x^2 + y^2), & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 在点 $(0, 0)$ 处连续、可导, 但不可微.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

3. 设 $z = f(x^2 - y^2, e^{xy})$, 其中 f 具有连续二阶偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



4. 设 $z = z(x, y)$ 由方程 $F(x+y, y+z) = 1$ 所确定, 其中 F 具有连续二阶偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

5. 设 $u = f(r), r = \sqrt{x^2 + y^2}$, 其中 f 是二阶可微函数, 且 $f(1) = 1, f'(1) = 1, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, 求 $f(r)$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

6. 设 $z = z(x, y)$ 是由 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$ 确定的函数, 求 $z = z(x, y)$ 的极值点和极值.



7. 求函数 $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 在条件 $x^2 + y^2 = 1, x + y + z = 0$ 下的最大值和最小值.

8. 求 $f(x, y) = xy(a - x - y)$ 的极值.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

9. 设 a, b, c 为正实数, 试证明 $ab^2c^3 \leq 108(\frac{a+b+c}{6})^6$.

微信公众号:顶尖考研
(ID: djky66)



10. 计算下列二重积分:

(1) $\iint_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}} dx dy$, 其中 D 由 $y = -a + \sqrt{a^2-x^2} (a > 0)$ 与 $y = -x (x \geq 0)$ 围成.

(2) $\iint_D (\sqrt{x^2+y^2} + x) d\sigma$, 其中 D 由不等式 $x^2 + y^2 \leq 4$ 和 $x^2 + (y+1)^2 \geq 1$ 所确定.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

(3) $\iint_D y(1 + xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}) dx dy$, 其中 D 由 $y = x, y = -1, x = 1$ 围成.



(4) $\iint_D |x^2 + y^2 - 1| d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

11. 设 $f(x, y)$ 在区域 $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ 上可微, 且 $f(0, 0) = 0$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} dt \int_x^{\sqrt{t}} f(t, u) du}{1 - e^{-x^4}}$.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



第五章 常微分方程

1. 微分方程 $ydx + (x^2 - 4x)dy = 0$ 的通解为_____.
2. 微分方程 $xy'' + 3y' = 0$ 的通解为_____.
3. 方程 $y''(x + y'^2) = y'$ 满足条件 $y(1) = y'(1) = 1$ 的特解为_____.
4. 若 $y = xe^x + x$ 是方程 $y'' - 2y' + ay = bx + c$ 的解, 则
 (A) $a = 1, b = 1, c = 0$. (B) $a = 1, b = 1, c = -2$.
 (C) $a = -3, b = -3, c = 0$. (D) $a = -3, b = 1, c = 1$.
5. 微分方程 $y'' + y = x^2 + 2x + \cos x$ 的特解可设为
 (A) $y^* = ax^2 + bx + c + x(A\sin x + B\cos x)$.
 (B) $y^* = x(ax^2 + bx + c + A\sin x + B\cos x)$.
 (C) $y^* = ax^2 + bx + c + A\sin x$.
 (D) $y^* = ax^2 + bx + c + A\cos x$.
6. 具有特解 $y_1 = e^{-x}, y_2 = 2xe^{-x}, y_3 = 3e^x$ 的三阶常系数齐次线性微分方程是
 (A) $y''' - y'' - y' - y = 0$. (B) $y''' + y'' - y' - y = 0$.
 (C) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$. (D) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$.
7. 求微分方程 $y'' - 3y' + 2y = xe^x$ 的通解.



8. 求微分方程 $y'' + 3y' + 2y = e^{-x} + \sin x$ 的通解.

9. 设 $f(x) = e^x + \int_0^x t f(x-t) dt$, 其中 $f(x)$ 为连续函数, 求 $f(x)$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

题源探究同步练习

10. 设 $z = f(r) (r > 0)$ 有二阶连续导数, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} - z = x^2 + y^2$, 求 $f(r)$.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



11. 设 $f(t)$ 为连续函数, 且 $f(t) = \iint_{x^2+y^2 \leq t^2} x \left(1 + \frac{f(\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2} \right) dx dy (x \geq 0, y \geq 0, t > 0)$, 求 $f(t)$.

12. 设曲线 L 位于 xOy 平面的第一象限内, L 上任一点 M 处的切线与 y 轴总相交, 交点记为 A , 已知 $|\overline{MA}| = |\overline{OA}|$, 且 L 过点 $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$, 求 L 的方程.

第二篇 线性代数

第一章 行列式

1.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

2.
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

3.
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$
 则 $x = \underline{\hspace{2cm}}.$

4. 已知 A 是 3 阶矩阵, B 是 4 阶矩阵, 若 $|A| = 3$, $|B| = -36$, 则 $|-A^T B^{-1}| = \underline{\hspace{2cm}}.$

5. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, E 为 2 阶单位矩阵, 矩阵 B 满足 $BA = B + 2E$, B^* 是 B 的伴随矩阵, 则 $|B^*| = \underline{\hspace{2cm}}.$

6. 设 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = m$, 则 $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 3a_1 & 3b_1 & 3c_1 \\ a_3 - 2a_1 & b_3 - 2b_1 & c_3 - 2c_1 \end{vmatrix} =$

(A) $-2m$. (B) $-3m$.
(C) m . (D) $6m$.

7. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ 都是 4 维列向量, 且 4 阶行列式 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1| = m$, $|\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3| = n$, 则 4 阶行列式 $|\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta_1 + \beta_2| =$

(A) $m + n$. (B) $-(m + n)$.
(C) $m - n$. (D) $n - m$.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



8. 设 $|A_{n \times n}| = a$, $|B_{m \times m}| = b$, 则 $\begin{vmatrix} O & 3B \\ -A & O \end{vmatrix} =$

(A) $-3ab$.

(B) $(-1)^n 3^m ab$.

(C) $(-1)^{n(m+1)} 3^m ab$.

(D) $(-1)^{m \times n} 3^m ab$.

9. 设 A 为 n 阶方阵则 $|A| = 0$ 的必要条件是

(A) A 中必有两行(列)的元素对应成比例.

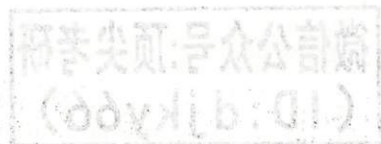
(B) A 中任意一行(列)向量是其余各行(列)向量的线性组合.

(C) A 中必有一行(列)向量是其余各行(列)向量的线性组合.

(D) A 中至少有一行(列)的元素全为 0.

10. 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是 4 维列向量. 证明 $|\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1| = 0$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)



第二章 矩 阵

1. 设 n 阶矩阵 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, n 维向量 $x = \left(\frac{1}{2}, 0, \dots, 0, \frac{1}{2}\right)^T$, $y = \left(\frac{1}{2}, 0, \dots, 0, -\frac{1}{2}\right)^T$, 则

$$x^T A x + x^T A y - y^T A x - y^T A y = \underline{\hspace{2cm}}.$$

2. 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$, 其中 $a_i \neq 0 (i = 1, 2, \dots, n)$, 则 $A^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. 设 A 是 n 阶矩阵, 满足 $A^2 + 3A - 5E = O$, 则 $(A + 5E)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

4. 已知 $AX = B$, 其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & 10 & -2 \\ 7 & 9 & 3 \end{bmatrix}$, 则 $X = \underline{\hspace{2cm}}.$

5. (1) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$, 若秩 $r(A) = 3$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}.$

- (2) 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & a & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $r(AB) = 2$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}.$

6. 已知 $A = PBQ$, 其中 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $B = \underline{\hspace{2cm}}.$

7. 若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, 则 $A^3 = \underline{\hspace{2cm}}.$

8. 设 A 是 n 阶矩阵, 下列命题中错误的是

(A) $AA^T = A^T A.$

(B) $A^* A = AA^*.$

(C) $(A^2)^n = (A^n)^2.$

(D) $(E + A)(E - A) = (E - A)(E + A).$



9. 设 A 是 n 阶对称矩阵, B 是 n 阶反对称矩阵, 则下列矩阵为反对称阵的是

- (A) $AB - BA$. (B) $(AB)^2$.
(C) $AB + BA$. (D) BAB .

10. 下列命题中, 正确的是

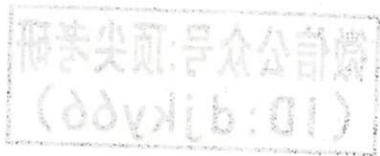
- (A) 如果 A, B 都是 n 阶可逆矩阵, 则 $A + B$ 必可逆.
(B) 如果 A, B 都是 n 阶可逆矩阵, 则 $A^* B^T$ 必可逆.
(C) 如果 A, B 都是 n 阶不可逆矩阵, 则 $A - B$ 必不可逆.
(D) 如果 $AB = E$, 则 A 可逆, 且 $A^{-1} = B$.

11. 设 $A = E - 2\alpha^T \alpha$, 其中 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 且 $\alpha \alpha^T = 1$, 则 A 不能满足的结论是

- (A) $A^T = A$. (B) $A^T = A^{-1}$. (C) $AA^T = E$. (D) $A^2 = A$.

12. 设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a_{12} + a_{13} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} + a_{23} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} + a_{33} & a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$, $P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 则 B
=
(A) $P_1 A P_2$. (B) $A P_2 P_1$. (C) $A P_1 P_2$. (D) $P_2 A P_1$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)



第三章 向 量

1. 若 $\beta = (1, 3, 0)^T$ 不能由 $\alpha_1 = (1, 2, 1)^T, \alpha_2 = (2, 3, a)^T, \alpha_3 = (1, a+2, -2)^T$ 线性表示, 则 $a =$ _____.
2. 任意 3 维向量都可由 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T, \alpha_2 = (1, -2, 3)^T, \alpha_3 = (a, 1, 2)^T$ 线性表出, 则 a _____.
3. 设向量组 $\alpha_1 = (2, 1, 1, 1), \alpha_2 = (2, 1, a, a), \alpha_3 = (3, 2, 1, a), \alpha_4 = (4, 3, 2, 1)$ 线性无关, 则 a 应满足条件 _____.
4. 向量组 $\alpha_1 = (1, -1, 3, 0)^T, \alpha_2 = (-2, 1, a, 1)^T, \alpha_3 = (1, 1, -5, -2)^T$ 的秩为 2, 则 $a =$ _____.
5. 下列向量组中 a, b, c, d, e, f 均是常数, 则线性无关的向量组是
 (A) $\alpha_1 = (1, -1, 0, 2)^T, \alpha_2 = (0, 1, -1, 1)^T, \alpha_3 = (0, 0, 0, 0)^T$.
 (B) $\beta_1 = (a, b, c)^T, \beta_2 = (b, c, d)^T, \beta_3 = (c, d, a)^T, \beta_4 = (d, a, b)^T$.
 (C) $\xi_1 = (a, 1, b, 0, 0)^T, \xi_2 = (c, 0, d, 1, 0)^T, \xi_3 = (e, 0, f, 0, 1)^T$.
 (D) $\eta_1 = (1, 2, 1, 5)^T, \eta_2 = (1, 2, 3, 6)^T, \eta_3 = (1, 2, 5, 7)^T, \eta_4 = (0, 0, 0, 1)^T$.
6. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则下列向量组中线性无关的是
 (A) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$.
 (B) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$.
 (C) $\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_2 + 3\alpha_3, 3\alpha_3 + \alpha_1$.
 (D) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 - 3\alpha_2 + 22\alpha_3, 3\alpha_1 + 5\alpha_2 - 5\alpha_3$.
7. 设向量组 I: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, II: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \dots, \alpha_{s+r}$, 则必有
 (A) I 相关 $\Rightarrow$ II 相关. (B) I 无关 $\Rightarrow$ II 无关.
 (C) II 相关 $\Rightarrow$ I 相关. (D) II 相关 $\Rightarrow$ I 无关.
8. 设向量组 I: $\alpha_1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}), \alpha_2 = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2}), \dots, \alpha_s = (a_{1s}, a_{2s}, \dots, a_{ns})$, II: $\beta_1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{n+r,1}), \beta_2 = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2}, \dots, a_{n+r,2}), \dots, \beta_s = (a_{1s}, a_{2s}, \dots, a_{ns}, \dots, a_{n+r,s})$, 则必有
 (A) I 相关 $\Rightarrow$ II 相关. (B) I 无关 $\Rightarrow$ II 无关.
 (C) II 无关 $\Rightarrow$ I 无关. (D) II 无关 $\Rightarrow$ I 相关.
9. 已知向量组 I: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 则与 I 等价的向量组是
 (A) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1$. (B) $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$.
 (C) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$. (D) $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1$.
10. n 维向量组 (I): $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, 若秩 $r(I) = r$. 则
 (A) (I) 中任意 $r-1$ 个向量都线性无关. (B) (I) 中任意 $r+1$ 个向量都线性相关.
 (C) (I) 中任意 r 个向量都线性无关. (D) (I) 中向量个数 s 必大于 r .

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



11. 设 $\alpha_1 = (1, 2, 0)$, $\alpha_2 = (1, a+2, -3a)$, $\alpha_3 = (-1, -a-2, 3a)$, $\beta = (1, 3, -3)$, 问 a 为何值时, β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出? a 为何值时, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出? 并求其表出式.

12. 设向量组 $\alpha_1 = (1, -1, 2, 4)$, $\alpha_2 = (0, 3, 1, 2)$, $\alpha_3 = (3, 0, 7, 14)$, $\alpha_4 = (1, -1, 2, 0)$, $\alpha_5 = (2, 1, 5, 6)$. 求向量组的秩、极大线性无关组, 并将其余向量由极大线性无关组线性表出.

13. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 证明向量组

$$\beta_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n,$$

$$\beta_2 = \alpha_1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n,$$

$$\vdots$$

$$\beta_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1}$$

也线性无关.

14. 设 A 是 n 阶方阵, 列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 证明: 列向量组 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_n$ 线性无关的充要条件是 A 为可逆矩阵.



第四章 线性方程组

1. 已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ (a+2)x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3, \\ -2x_1 + ax_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

无解, 则参数 a 应满足_____.

2. 对于 n 元方程组, 则下列说法正确的是

- (A) 若 $Ax = 0$ 只有零解, 则 $Ax = b$ 有唯一解.
 (B) $Ax = 0$ 有非零解的充要条件是 $|A| = 0$.
 (C) $Ax = b$ 有唯一解的充要条件是 $r(A) = n$.
 (D) 若 $Ax = b$ 有两个不同的解, 则 $Ax = 0$ 有无穷多解.

3. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, 则线性方程组 $(AB)x = 0$

- (A) 当 $n > m$ 时仅有零解. (B) 当 $n > m$ 时必有非零解.
 (C) 当 $m > n$ 时仅有零解. (D) 当 $m > n$ 时必有非零解.

4. 设 ξ_1, ξ_2, ξ_3 是 $Ax = 0$ 的基础解系, 则该方程组的基础解系还可表示成

- (A) ξ_1, ξ_2, ξ_3 的一个等价向量组. (B) ξ_1, ξ_2, ξ_3 的一个等秩向量组.
 (C) $\xi_1 + \xi_2, \xi_2 + \xi_3, \xi_3 + \xi_1$. (D) $\xi_1 - \xi_2, \xi_2 - \xi_3, \xi_3 - \xi_1$.

5. 设非齐次线性方程组 $A_{3 \times 4}x = b$ 有通解 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \eta = k_1(1, 2, 0, -2)^T + k_2(4, -1, -1, -1)^T + (1, 0, -1, 1)^T$, 则下列向量中是 $Ax = b$ 的解的是

- (A) $\alpha_1 = (1, 2, 0, -2)^T$. (B) $\alpha_2 = (6, 1, -2, -2)^T$.
 (C) $\alpha_3 = (3, 1, -2, 4)^T$. (D) $\alpha_4 = (5, 1, -1, -3)^T$.

6. 设线性方程组

$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 & + x_2 & + x_3 = 1, \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 & & + x_3 = \lambda, \\ x_1 & + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda^2, \end{cases}$$

问 λ 为何值时, 方程组无解? λ 为何值时, 方程组有解? 有解时, 求方程组的解.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



7. 已知 3 阶矩阵 A 的第 1 行是 (a, b, c) , a, b, c 不全为零, 矩阵 $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & -6 & k \end{bmatrix}$ (k 为常数), 且 $AB = O$, 求线性方程组 $Ax = 0$ 的通解.

8. 求线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 11, \\ -3x_1 + x_2 - 4x_3 - 2x_4 = -6, \\ -x_1 - 9x_2 + \quad \quad + 3x_4 = 15. \end{cases}$$

满足条件 $x_1 = x_2$ 的全部解.



9. 已知 A 是 $m \times n$ 矩阵, $Ax = b$ 有唯一解, 证明 $A^T A$ 是可逆阵, 并求 $Ax = b$ 的唯一解.

10. 设 A, B 均是 3×4 矩阵, $Ax = 0$ 有基础解系 ξ_1, ξ_2, ξ_3 , $Bx = 0$ 有基础解系 η_1, η_2 .

(1) 证明 $Ax = 0$ 和 $Bx = 0$ 有非零公共解.

(2) 若 $Ax = 0$ 的基础解系为 $\xi_1 = (1, -1, 2, 4)^T, \xi_2 = (0, 3, 1, 2)^T, \xi_3 = (1, -2, 2, 0)^T$.

$Bx = 0$ 的基础解系为 $\eta_1 = (3, 0, 7, 14)^T, \eta_2 = (2, 1, 5, 10)^T$, 求 $Ax = 0$ 和 $Bx = 0$ 的非零公共解.

(ID: djky66)

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



第五章 特征值、特征向量、相似矩阵

1. 已知 $\xi = (1, -1, -1)^T$ 是矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & a \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ 的特征向量, 则参数 $a =$ _____.
2. 设 A 是 n 阶实对称阵, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 A 的 n 个互不相同的特征值, ξ_1 是 A 的对应于 λ_1 的 1 个单位特征向量, 则矩阵 $B = A - \lambda_1 \xi_1 \xi_1^T$ 的特征值为 _____.
3. 已知 A 是三阶矩阵, $r(A) = 1$, 则 $\lambda = 0$
 (A) 必是 A 的二重特征值. (B) 至少是 A 的二重特征值.
 (C) 至多是 A 的二重特征值. (D) 一重、二重、三重特征值都可能.
4. 下列矩阵中能相似于对角阵的矩阵是
 (A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (C) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.
5. A 是三阶矩阵, P 是三阶可逆矩阵, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$, 且 $A\alpha_1 = \alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_2, A\alpha_3 = 0$, 其中 α_1, α_2 线性无关, 则 P 是
 (A) $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_3]$. (B) $[\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1]$.
 (C) $[\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_2, 3\alpha_3]$. (D) $[\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1]$.
6. 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 问 A 是否相似于 B , 为什么?

7. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, 求正交阵 Q , 使得 $Q^{-1}AQ = Q^T AQ = \Lambda$, 其中 Λ 是对角阵.

8. 设 A 是三阶矩阵, 有特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 3$, 对应的特征向量分别是 $\xi_1 = (1, -2, 1)^T$, $\xi_2 = (1, 0, -1)^T, \xi_3 = (1, 1, 1)^T, \beta = (3, -1, 1)^T$, 求 $A^{100}\beta$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

9. 设 A 是三阶实对称阵, 有特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2, \alpha_1 = (1, -1, 1)^T$ 是 A 的属于 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量, $B = A^5 - 4A^3 + E$, 其中 E 是单位阵.
(1) 验证 α_1 也是 B 的特征向量, 并求 B 的特征值和特征向量;
(2) 求 B .

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



第六章 二次型

1. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$, 则二次型的对应矩阵是 _____.

2. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3)(a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3)$, 则二次型的对应矩阵是 _____.

3. A, B 都是 n 阶实对称阵, 则使 A, B 合同的充要条件是

(A) A, B 有相同的秩.

(B) A, B 都合同于对角阵.

(C) A, B 的全部特征值相同.

(D) A, B 有相同的正负惯性指数.

4. 下列矩阵中与 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ 合同的矩阵是

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(D) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

5. 实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的秩为 r , 符号差为 s , 且 f 和 $-f$ 合同, 则必有

(A) r 是偶数, $s = 1$.

(B) r 是奇数, $s = 1$.

(C) r 是偶数, $s = 0$.

(D) r 是奇数, $s = 0$.

6. 下列矩阵中正定矩阵是

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(B) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$.

(D) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$.

7. 已知 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$, 用配方法化二次型为标准形, 并求所作的可逆线性变换.



8. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3$,

(1) 写出二次型的矩阵表达式;

(2) 用正交变换化二次型为标准形, 并写出所作的正交变换.

参考答案

9. 求 a 的值, 使二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2ax_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

为正定二次型.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

题源探究同步练习

10. 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_s \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_s^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_s^{n-1} \end{bmatrix}, \text{ 其中 } x_i \neq x_j \begin{pmatrix} i = 1, 2, \cdots, n \\ j = 1, 2, \cdots, n \end{pmatrix},$$

讨论 $B = A^T A$ 的正定性.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



参考答案

第一篇 高等数学

第一章 函数、极限、连续

1. $\frac{4}{e}$

【解析】 $\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right) \right]^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} [\ln(1 + \frac{1}{n}) + \cdots + \ln(1 + \frac{n}{n})]}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [\ln(1 + \frac{1}{n}) + \cdots + \ln(1 + \frac{n}{n})] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\ln\left(1 + \frac{i}{n}\right) \right] = \int_0^1 \ln(1+x) dx = 2\ln 2 - 1,$

所以原式 $= e^{2\ln 2 - 1} = \frac{4}{e}.$

【解析】 $\left(\sin^2 \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^{x^2} = e^{x^2 \ln(\sin^2 \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x})},$

$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \ln\left(\sin^2 \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin^2 t + \cos t)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2 t + \cos t - 1}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t(1 - \cos t)}{t^2} = \frac{1}{2},$

所以原式 $= e^{\frac{1}{2}}.$

3. C

【解析】 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$ 存在, 而由已知 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] - \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 与 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 不存在矛盾, 故 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$ 必不存在. 选(C).

4. D

【解析】 由 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a, \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) = b, a < b$, 所以 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} (g(x) - f(x)) = b - a > 0$. 由保号性定理知,

存在去心邻域 $U_\delta(x_0)$, 当 $x \in U_\delta(x_0)$ 时, 有 $g(x) - f(x) > 0$. 选(D). 其他均可举出反例.

5. B

【解析】 考虑 $x = 0$ 处. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + e^{\frac{1}{x}}}{1 - e^{\frac{1}{x}}} \xrightarrow{\text{洛}} -1, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 + e^{\frac{1}{x}}}{1 - e^{\frac{1}{x}}} = 1.$

所以 $x = 0$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点. 选(B).

6. 【解】 $\frac{k}{(n+k)(n+k+1)} \leq \frac{k}{(n+k)^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\frac{k}{n}}{(1 + \frac{k}{n})^2},$

$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{\frac{k}{n}}{(1 + \frac{k}{n})^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n}}{(1 + \frac{k}{n})^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x}{(1+x)^2} dx = \ln 2 - \frac{1}{2},$



另一方面,

$$\begin{aligned} \frac{k}{(n+k)(n+k+1)} &= \frac{k}{n(n+1)(1+\frac{k}{n})(1+\frac{k}{n+1})} \geq \frac{k}{n(n+1)(1+\frac{k}{n})(1+\frac{k}{n})} \\ &= \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{\frac{k}{n}}{(1+\frac{k}{n})^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \cdot \int_0^1 \frac{x}{(1+x)^2} dx = \ln 2 - \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

由夹逼定理知原式 $= \ln 2 - \frac{1}{2}$.

7.【解】 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{x} + \frac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{-\sin x}{x} + \frac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}} \right) = -1 + 2 = 1,$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{x} + \frac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|\sin x|}{x} + 0 = 1.$$

【注】 请注意 $\sqrt{x^2} = |x|$.

8.【解】 ① 设 $a_j = \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, 有

$$a_j \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{x}} \leq f(x) = a_j \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{x}} \left[\left(\frac{a_1}{a_j} \right)^x + \dots + \left(\frac{a_n}{a_j} \right)^x \right]^{\frac{1}{x}} \leq a_j \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{x}} \cdot n^{\frac{1}{x}} = a_j,$$

因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{x}} = 1$, 由夹逼定理知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a_j = \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

② 命 $b_i = a_i^{-1} (i = 1, \dots, n)$, $t = -x$, $\varphi(t) = (f(x))^{-1}$, 由 ①, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \max\{b_1, \dots, b_n\}$,

所以 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = (\max\{b_1, \dots, b_n\})^{-1} = \min\{a_1, \dots, a_n\}$.

③ 由洛必达法则得:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x) - \ln n}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_1^x \ln a_1 + a_2^x \ln a_2 + \dots + a_n^x \ln a_n}{a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x} = \frac{\ln(a_1 a_2 \dots a_n)}{n},$$

$$\text{于是 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln f(x)} = e^{\frac{\ln(a_1 a_2 \dots a_n)}{n}} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

9.【解】 方法一: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(1+bx+cx^2) - 1 - ax}{x^4} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(1+bx+cx^2) + e^x(b+2cx) - a}{4x^3}.$

若 $1+b-a \neq 0$, 则上式右边趋于 ∞ , 与题设矛盾, 故 $1+b-a=0$. 再用洛必达法则,

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(1+bx+cx^2) + 2e^x(b+2cx) + 2ce^x}{12x^2},$$

仿上讨论有 $1+2b+2c=0$. 继续用洛必达法则,

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(1+bx+cx^2) + 3e^x(b+2cx) + 6ce^x}{24x},$$

仿上讨论有 $1+3b+6c=0$. 综合之, 由以上 3 个等式解得 $a = \frac{1}{3}, b = -\frac{2}{3}, c = \frac{1}{6}$. 以 a, b, c 之值代入, 再由

洛必达法则, 可得原式极限为 $\frac{1}{72}$.

方法二: 将 e^x 在 $x_0 = 0$ 处按佩亚诺余项泰勒公式展开到 $o(x^4)$, 有 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$, 于是

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+b-a)x + (\frac{1}{2}+b+c)x^2 + (\frac{1}{6}+\frac{b}{2}+c)x^3 + (\frac{1}{24}+\frac{b}{6}+\frac{c}{2})x^4 + o(x^4)}{x^4}$$

可见上述极限存在的充要条件是 $1+b-a=0, \frac{1}{2}+b+c=0, \frac{1}{6}+\frac{b}{2}+c=0$.

解之 a, b, c 如方法一. 以 a, b, c 之值代入, 立即可得原式极限为 $\frac{1}{72}$.

【注】 若式中有待定系数且用洛必达法则时, 必须步步讨论, 方法二比方法一方便、快捷.



10.【解】 分 $|x| < 1$, $|x| = 1$, $|x| > 1$ 讨论, 得

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ x, & |x| > 1, \\ -\frac{a}{a+1}, & x = 1, \\ \text{无定义}, & x = -1. \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} x = -1$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1$, 在 $x = -1$ 处 $f(x)$ 为跳跃间断点, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$, $f(1) = -\frac{a}{a+1}$. 当 $-\frac{a}{a+1} = 1$ 即 $a = -\frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 在 $x = 1$ 处连续; 当 $a \neq -\frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 在 $x = 1$ 为可去间断点, 其他情形其他点处 $f(x)$ 均连续.

11.【解】 由 $x_1 > 0$, $x_{n+1} = 3 + \frac{4}{x_n}$, 可见 $x_{n+1} > 3 (n = 1, 2, \dots)$. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 记为 a , 则 $a \geq 3$, 对 $x_{n+1} = 3 + \frac{4}{x_n}$ 两边取极限, 得 $a = 3 + \frac{4}{a}$, 即 $a^2 - 3a - 4 = 0$, 得 $a = 4$, ($a = -1$ 舍去).

考虑 $x_{n+1} - 4 = 3 + \frac{4}{x_n} - 4 = \frac{4 - x_n}{x_n}$, $0 \leq |x_{n+1} - 4| = \frac{|x_n - 4|}{|x_n|} < \frac{1}{3} |x_n - 4| < \dots < \frac{1}{3^{n-1}} |x_1 - 4|$. 令 $n \rightarrow \infty$, 由夹逼定理得 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - 4| = 0$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在且等于 4.

第二章 一元函数微分学

1. $-\frac{\sqrt{\pi}e^{2\pi}}{2}$

【解析】 设 $u = t - s$, 则 $y = \int_0^t \sin u^2 du$, 所以 $\frac{dy}{dx} = \frac{(\int_0^t \sin u^2 du)'}{(\int_0^t 2e^{-s^2} ds)'} = \frac{\sin t^2}{2e^{-t^2}}$,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{\left(\frac{\sin t^2}{2e^{-t^2}} \right)'}{\left(\int_0^t 2e^{-s^2} ds \right)'} = \frac{4t \cos t^2 e^{-t^2} + \sin t^2 \cdot 2e^{-t^2} \cdot 2t}{(2e^{-t^2})^2} = \frac{4t \cos t^2 + 4t \sin t^2}{8(e^{-t^2})^2},$$

故 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=\sqrt{\pi}} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2e^{-2\pi}} = -\frac{\sqrt{\pi}e^{2\pi}}{2}$.

2. $(-\frac{\pi^2}{8}, \frac{\pi^2}{4}, 1 - \frac{\pi^2}{8})$

【解析】 当 $t = 1$ 时, $x = \frac{4}{\pi} \arctan t = 1$, $y = \frac{2t}{1+t^2} = 1$.

因 $\frac{dy}{dt} = \frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2}$, $\frac{dx}{dt} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{1+t^2}$, 所以 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} = 0$.

且 $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} \right)'}{\frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{1+t^2}} = \frac{\pi^2}{8} \cdot \frac{-4t}{1+t^2}$, 所以 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=1} = -\frac{\pi^2}{4}$.

另一方面 $y = ax^2 + bx + c$, 所以 $y'|_{x=1} = 2a + b$, $y''|_{x=1} = 2a$, 因 $y = ax^2 + bx + c$ 与 $\begin{cases} x = \frac{4}{\pi} \arctan t, \\ y = \frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$ 在

点 $(1, 1)$ 有相同的曲率圆, 因此两曲线在点 $(1, 1)$ 相切, y'' 同号且曲率半径相同, 从而有相同的 y'' .



所以由 $a+b+c=1, 2a+b=0, 2a=-\frac{\pi^2}{4}$, 解得 $a=-\frac{\pi^2}{8}, b=\frac{\pi^2}{4}, c=1-\frac{\pi^2}{8}$.

3. $n!2^{n+1}$

【解析】 因为 $f'(x)=f^2(x)$, 所以 $f''(x)=2f(x)f'(x)=2f^3(x)$,
 $f'''(x)=3 \times 2 \times f^2(x)f'(x)=3 \times 2 \times 1 \times f^4(x)$,
 $f^{(4)}(x)=4 \times 3 \times 2 \times 1 \times f^5(x)$,

...

由数学归纳法可证得 $f^{(n)}(x)=n!f^{n+1}(x)$, 所以 $f^{(n)}(0)=n!f^{n+1}(0)=n!2^{n+1}$.

4. A

【解析】 证明 ① 与 ② 是正确的. 对于 ①, 设 $f(a)>0$, 由连续性知存在 $U_\delta(a)$, 当 $x \in U_\delta(a)$ 时 $f(x)>0$, 从而当 $x \in U_\delta(a)$ 时 $f(x)=|f(x)|$. 于是 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导. 设 $f(a)<0$, 其证明是类似的.

设 $f(a)=0$, 由 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}$ 存在记为 A , 即有 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x)|}{x-a} = A$. 当 $x < a$ 时, $\frac{|f(x)|}{x-a} \leq 0$, 当 $x > a$ 时, $\frac{|f(x)|}{x-a} \geq 0$. 由于 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x)|}{x-a} = A$, 所以 $A=0$.

从而 $\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \right| = \lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x)}{x-a} \right| = 0$. 所以 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0$. 说明 $f'(a)$ 存在且等于 0, 综上所述, ① 正确.

对于 ②, 由 $f(a)=0, \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} p(x)$ 存在, 所以 $f'(a)$ 存在, ② 正确.

5. C

【解析】 因 $f'_-(x_0)$ 与 $f'_+(x_0)$ 均存在, 则可推出 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处左连续且右连续, 因此 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续, 所以 ② 正确. 因 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)=A$, 由洛必达法则, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = A$, 即有 $f'(x_0)=A$. ③ 正确. 选(C).

6. D

【解析】 由题知 $f''(x)=1-e^{-x}-x[f'(x)]^2$, 表明 $f''(x)$ 存在, 从而知 $f'(x)$ 连续.

从而 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^{-x}}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} [f'(x)]^2 = 1-0=1$. 由极限的保号性知 $f''(x)$ 在 $x=0$ 的某去心邻域内与 x 同号, 从而知当 $x>0$ 时 $f''(x)>0$; 当 $x<0$ 时 $f''(x)<0$. 故曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 左侧邻近是凸的, 右侧邻近是凹的, 选(D).

7. C

【解析】 易知 $f(1)=0, f(\frac{3}{2})=\frac{1}{4}>0, f(\frac{7}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}<0, f(2)=\frac{1}{2}>0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上至少有 3 个零点. 又因 $f'(x)=\pi \sin \pi x + 6(2x-3)^2 + \frac{1}{2}, f''(x)=\pi^2 \cos \pi x + 24(2x-3), f'''(x)=-\pi^3 \sin \pi x + 48>0$, 所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上至多有 3 个零点, 结合以上两项知, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上正好有 3 个零点.

【注】 讨论 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上正好有几个零点, 一般要将 (a, b) 分成相应的几个区间并证明小区间的端点处 $f(x)$ 反号, 且区间内 $f'(x) \neq 0$ (即每个小区间的内 $f(x)$ 为单调). 其中第一步通过试算可以达到目的, 但划分的区间内不一定单调, 本题解法使用了下述定理: “设 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内存在 n 阶导数, 且 $f^{(n)}(x) \neq 0$, 则在区间 (a, b) 内 $f(x)$ 至多有几个零点.” 你会证明这个定理么? (反复用罗尔定理即得).

8. 【解】 设切点为 (x_0, y_0) , 于是在切点处的切线方程为 $y-y_0=-2x_0(x-x_0)$. 此切线与两坐标轴的截距分别为 $X=\frac{y_0}{2x_0}+x_0=\frac{x_0^2+1}{2x_0}, Y=y_0+2x_0^2=x_0^2+1, x_0>0$. 所以此切线与两坐标轴围成的三角形面积 $S=\frac{(x_0^2+1)^2}{4x_0}$. 命 $S(x)=\frac{(x^2+1)^2}{4x}, x>0$. 由求最小值的办法可得 $S(x)$ 的唯一驻点 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$, 验证知它是极小值点,

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



故为最小值点,相应地 $y = 1 - x^2 = \frac{2}{3}$. 故切点为 $(\sqrt{\frac{3}{3}}, \frac{2}{3})$.

9.【证明】 证法一:令 $\varphi(x) = (x^2 - 1)\ln x - (x - 1)^2$, 易知 $\varphi(1) = 0$, 由于 $\varphi'(x) = 2x\ln x - x + 2 - \frac{1}{x}$, 易见 $\varphi'(1) = 0$. 因为 $\varphi''(x) = 2\ln x + 1 + \frac{1}{x^2}$, $\varphi''(1) = 2 > 0$, 所以 $\varphi(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极小值, 又 $\varphi'''(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{x^3}$,

当 $0 < x < 1$ 时, $\varphi'''(x) < 0$; 当 $1 < x < +\infty$ 时, $\varphi'''(x) > 0$, 且 $\varphi''(1) = 2 > 0$. 从而推知当 $x \in (0, +\infty)$ 时 $\varphi''(x) \geq 2$ (仅在 $x = 1$ 时等于 2). 所以曲线 $y = \varphi(x)$ 是凹的. 所以 $\varphi(x) \geq \varphi(1) = 0$ 仅在 $x = 1$ 处成立等号.

证法二:由证法一已知 $\varphi(1) = 0$, $\varphi'(1) = 0$, $\varphi''(1) = 2$. 当 $0 < x < 1$ 时, $\varphi'''(x) < 0$, 当 $1 < x < +\infty$ 时, $\varphi'''(x) > 0$. 将 $\varphi(x)$ 在 $x = 1$ 处展开成泰勒公式

$$\varphi(x) = \varphi(1) + \varphi'(1)(x-1) + \frac{1}{2!}\varphi''(1)(x-1)^2 + \frac{\varphi'''(\xi)}{3!}(x-1)^3 = (x-1)^2 + \frac{1}{6}\varphi'''(\xi)(x-1)^3.$$

当 $0 < x < 1$ 时, $x < \xi < 1$; 当 $1 < x < +\infty$ 时, $1 < \xi < x$. 所以当 $x > 0$ 时, $\varphi(x) \geq 0$.

证法三:设 $\varphi(x) = \ln x - \frac{x-1}{x+1}$, 所以 $\varphi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+1}{x(x+1)^2} > 0$ (当 $x > 0$), $\varphi(1) = 0$,

所以当 $0 < x < 1$ 时, $\varphi(x) < 0$; 当 $1 < x < +\infty$ 时, $\varphi(x) > 0$.

于是当 $x > 0$ 时, $(x^2 - 1)\varphi(x) = (x^2 - 1)\ln x - (x - 1)^2 \geq 0$, 即 $(x^2 - 1)\ln x \geq (x - 1)^2$.

10.【证明】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. 又因为 $f(x)$ 连续, 所以 $f(0) = 0$.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$, 所以 $f'(0) = 2$. 由泰勒公式,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi)x^2 = 2x + \frac{1}{2}f''(\xi)x^2 \leq 2x, \text{ 且仅当 } x = 0 \text{ 时成立等号, 证毕.}$$

11.【证明】 作 $F(x) = xf(x)$, $G(x) = \frac{1}{x}$, 由柯西定理知, 存在 $\xi \in (a, b)$ 有 $\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$,

$$\text{则 } \frac{bf(b) - af(a)}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} = \frac{f(\xi) + \xi f'(\xi)}{\xi^2}, \text{ 即 } \frac{bf(b) - af(a)}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = \xi^2[f(\xi) + \xi f'(\xi)],$$

$$\text{整理得 } \frac{ab}{b-a}[bf(b) - af(a)] = \xi^2[f(\xi) + \xi f'(\xi)].$$

12.【解】 设在 $[0, 1]$ 上 $f(x) \equiv$ 某常数, 即 $f(x) \equiv 0$, 结论自然成立.

设在 $[0, 1]$ 上 $f(x) \not\equiv 0$, 则在 $(0, 1)$ 上 $|f(x)|$ 存在最大值. 设 $x_0 \in (0, 1)$ 有 $|f(x_0)| = M = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$, 所以 $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的最大值就是 $f(x)$ 的最小值, 所以 $f'(x_0) = 0$. 将 $f(x)$ 在 x_0 处按泰勒公式展开:

$$0 = f(0) = f(x_0) + f'(x_0)(-x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)x_0^2 = f(x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)x_0^2, (0 < \xi_1 < x_0),$$

$$0 = f(1) = f(x_0) + f'(x_0)(1-x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x_0)^2 = f(x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x_0)^2, (x_0 < \xi_2 < 1),$$

$$\text{所以有 } |f''(\xi_1)| = \frac{2M}{x_0^2}, \text{ 及 } |f''(\xi_2)| = \frac{2M}{(1-x_0)^2},$$

① 若 $x_0 \in (0, \frac{1}{2})$ 时, 则存在 $\xi \in (0, \frac{1}{2})$ 使 $|f''(\xi)| > 8M$,

② 若 $x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$ 时, 则存在 $\xi \in (\frac{1}{2}, 1)$ 使 $|f''(\xi)| \geq 8M$.

总之, 至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$ 使 $|f''(\xi)| \geq 8M = 8 \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$.

13.【证明】 由 $f(a) > 0$, $f(b) > 0$, $\int_a^b f(x)dx = 0$ 知存在 $c \in (a, b)$ 使 $f(c) < 0$, 故在 (a, b) 内存在 x_0 使 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极小值且为负, 故知 $f'(x_0) = 0$.

$$\text{由泰勒公式 } f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2,$$



即 $f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_0)^2$, ξ 介于 x_0 与 x 之间.

以 $x = a$ 代入, 左边为正, 故知存在 $\xi \in (a, b)$ 使 $f''(\xi) > 0$, 证毕.

第三章 一元函数积分学

1. B

【解析】①②③ 正确, ④ 不正确. 对于 ①, 将 a 看成变量, 两边对 a 求导, 由

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0 \Rightarrow f(a) - (-f(-a)) = 0 \Rightarrow f(a) = -f(-a) \Rightarrow f(x) \text{ 为奇函数.}$$

反之, 设 $f(x)$ 为奇函数, $f(x) = -f(-x) \Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = \int_a^{-a} f(-x) d(-x)$

$$\Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = \int_a^{-a} f(x) dx \Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

对于 ②, 其证明与 ① 类似.

对于 ③, 设 $\int_a^{a+w} f(x) dx$ 与 a 无关, 于是 $(\int_a^{a+w} f(x) dx)'_a = 0 \Rightarrow f(a+w) - f(a) = 0 \Rightarrow f(x)$ 具有周期 w .

反之, 设 $f(a+w) - f(a) = 0 \Rightarrow (\int_a^{a+w} f(x) dx)'_a = f(a+w) - f(a) = 0 \Rightarrow \int_a^{a+w} f(x) dx$ 与 a 无关, 顺便可得出

$$\int_a^{a+w} f(x) dx = \int_0^w f(x) dx = \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} f(x) dx.$$

对于 ④ 可举出反例. 例如 $f(x) = x - 1$, $\int_0^2 (x-1) dx = 0$, 但 $f(x)$ 并不是周期函数.

2. D

$$\text{【解析】 } M = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\tan x}{1+x^4} + x^8 \right) dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x^8 dx, N = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\sin^8 x + \ln(x + \sqrt{x^2+1})) dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^8 x dx <$$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x^8 dx = M, P = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\tan^4 x + (e^x - e^{-x}) \cos x) dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 x dx > \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x^4 dx > \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x^8 dx = M.$$

所以 $N < M < P$. 选 (D).

3. D

$$\text{【解析】 } F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt = \begin{cases} \int_{-1}^x e^t dt, & x \leq 0 \\ \int_{-1}^0 e^t dt + \int_0^x (x^2 + a) dx, & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} e^x - e^{-1}, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-1} + \frac{1}{3} x^3 + ax, & x > 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = 1 - e^{-1}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 1 - e^{-1}$, 知 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处连续,

$$F'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - e^{-1} - 1 + e^{-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

$$F'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{-1} + \frac{1}{3} x^3 + ax - 1 + e^{-1}}{x} =$$

故当且仅当 $a = 1$ 时可导, 所以选 (D).

$$\begin{aligned} \text{4. 【解】 } \int \frac{1+x^2+x^4}{x^3(1+x^2)} \ln(1+x^2) dx &= \int \frac{1}{x^3} \ln(1+x^2) dx + \int \frac{x}{1+x^2} \ln(1+x^2) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int \ln(1+x^2) dx^{-2} + \frac{1}{2} \int \ln(1+x^2) d\ln(1+x^2) \\ &= -\frac{\ln(1+x^2)}{2x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \cdot \frac{1}{x^2} dx + \frac{1}{4} \ln^2(1+x^2) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= -\frac{\ln(1+x^2)}{2x^2} + \int \frac{1}{(1+x^2)x} dx + \frac{1}{4} \ln^2(1+x^2) \\
 &= -\frac{\ln(1+x^2)}{2x^2} + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx + \frac{1}{4} \ln^2(1+x^2) \\
 &= -\frac{\ln(1+x^2)}{2x^2} + \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \frac{1}{4} \ln^2(1+x^2) + C.
 \end{aligned}$$

5.【解】 令 $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}} dx$, 令 $x = -t$ 有 $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 t}{1+e^t} (-dt) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1+e^x} dx$,

则 $2I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{4}$. 所以 $I = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$.

6.【解】 $\int_0^{2\pi} x \sin^8 x dx \xrightarrow{\text{令 } x = 2\pi - t} \int_{2\pi}^0 (2\pi - t) \sin^8(2\pi - t) (-dt) = \int_0^{2\pi} (2\pi - t) \sin^8 t dt$
 $= 2\pi \int_0^{2\pi} \sin^8 t dt - \int_0^{2\pi} t \sin^8 t dt = 2\pi \int_0^{2\pi} \sin^8 t dt - \int_0^{2\pi} x \sin^8 x dx$,

所以 $\int_0^{2\pi} x \sin^8 x dx = \pi \int_0^{2\pi} \sin^8 t dt = 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 t dt = 4\pi \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{35}{64} \pi^2$.

7.【解】 $G(x) = \int_x^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^3}} dt$, 则 $G'(x) = -2x \frac{x^2}{\sqrt{1+x^6}}$,

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 x G(x) dx &= \int_0^1 G(x) d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2} G(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} dG(x) = -\int_0^1 \frac{x^2}{2} \cdot \left(-\frac{2x \cdot x^2}{\sqrt{1+x^6}}\right) dx \\
 &= \int_0^1 \frac{x^5}{\sqrt{1+x^6}} dx = \frac{1}{6} \int_0^1 \frac{d(1+x^6)}{\sqrt{1+x^6}} = \frac{1}{6} \times 2 \sqrt{1+x^6} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} (\sqrt{2} - 1).
 \end{aligned}$$

8.【解】 令 $\sqrt{x-1} = t, x = t^2 + 1, dx = 2t dt$, 则
 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x-1}} = \int_0^{+\infty} \frac{2t dt}{(t^2+1) \cdot t} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+1} dt = 2 \arctan t \Big|_0^{+\infty} = \pi$.

9.【解】 由方程 $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$ 知该星形线的直角坐标方程为 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, 由题中所给图形知, 此曲线关于 x, y 轴均对称, 于是有:

① 该曲线所围图形面积 $S_D = 4S_{D_1}$, 其中 S_{D_1} 为曲线所围图形在第一象限的面积.

由 $x = a \cos^3 t \geq 0, y = a \sin^3 t \geq 0, t = \frac{\pi}{2}$ 时对应于 $x = 0, t = 0$ 对应于 $x = a$. 故

$$\begin{aligned}
 S_{D_1} &= \int_0^a y dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 a \sin^3 t \cdot 3a \cos^2 t \cdot (-\sin t) dt = 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cdot \cos^2 t dt = 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cdot (1 - \sin^2 t) dt \\
 &= 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t dt - 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 t dt = \frac{3\pi}{32} a^2, S_D = 4S_{D_1} = 4 \cdot \frac{3\pi}{32} a^2 = \frac{3\pi}{8} a^2.
 \end{aligned}$$

② 该曲线的全长 $L = 4L_1$, 其中 L_1 为该曲线在第一象限的长度, 弧长

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-a \cdot 3 \cos^2 t \cdot \sin t)^2 + (a \cdot 3 \sin^2 t \cdot \cos t)^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2 \sin^2 t \cdot \cos^2 t} dt \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a \cdot \frac{1}{2} \sin 2t dt = \frac{3}{2} a, \text{ 故 } L = 4L_1 = 4 \cdot \frac{3}{2} a = 6a.
 \end{aligned}$$

③ 该曲线绕 x 轴旋转成旋转体的全面积 $S_{\Sigma} = 2S_1$, 其中 S_1 为该曲线在第一象限的全面积. 曲线绕 x 轴旋转而成旋转面面积

$$S_1 = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} y(t) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sin^3 t \sqrt{(3a \cos^2 t (-\sin t))^2 + (3a \sin^2 t \cos t)^2} dt = \frac{6\pi}{5} a^2.$$

$$S_{\Sigma} = 2S_1 = 2 \times \frac{6\pi}{5} a^2 = \frac{12\pi}{5} a^2.$$

④ 所围图形 D 绕 x 轴一周所围立体体积 $V = 2V_1$, 其中 V_1 为 D 在第一象限部分绕 x 轴所围立体体积.



$$V_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \pi y^2 dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \pi \cdot a^2 \sin^6 t \cdot 3a \cdot \cos^2 t \cdot (-\sin t) dt = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 3\pi a^3 \sin^7 t \cos^2 t dt = \frac{16\pi}{105} a^3,$$

$$\text{故 } V = 2V_1 = 2 \cdot \frac{16\pi a^3}{105} = \frac{32\pi}{105} a^3.$$

10.【解】 根据题意, 如图所示: 因已知矩形部分高为 h , 则矩形上边为 $y = h + 1$, 故矩形部分所受水压力

$$P_{\text{矩}} = 2 \int_1^{1+h} \rho g (h + 1 - y) \cdot 1 dy = 2 \left[\rho g (h + 1) \cdot y \Big|_1^{1+h} - \frac{\rho g}{2} y^2 \Big|_1^{1+h} \right] = \rho g h^2,$$

抛物线形部分所受水压力

$$P_{\text{抛}} = 2 \int_0^1 \rho g (h + 1 - y) \cdot x dy = 2 \int_0^1 \rho g (h + 1 - y) \cdot \sqrt{y} dy = 4\rho g \left(\frac{h}{3} + \frac{2}{15} \right).$$

$$\text{因 } P_{\text{矩}}/P_{\text{抛}} = 5/4, \text{ 故: } \frac{\rho g h^2}{4\rho g \left(\frac{h}{3} + \frac{2}{15} \right)} = \frac{5}{4} \Rightarrow 3h^2 - 5h - 2 = 0$$

得 $h = -\frac{1}{3}$ (舍去) 或 $h = 2$, 故矩形部分高 h 为 2 米.

11.【证明】 命 $F(x) = \int_a^x t f(t) dt - \frac{a+x}{2} \int_a^x f(t) dt$, 有 $F(a) = 0$,

$$F'(x) = x f(x) - \frac{1}{2} \int_a^x f(t) dt - \frac{a+x}{2} f(x) = \frac{x-a}{2} f(x) - \frac{1}{2} \int_a^x f(t) dt = \frac{x-a}{2} f(x) - \frac{x-a}{2} f(\xi), a \leq \xi \leq x.$$

再由 $f(x)$ 单调增加, 所以 $F'(x) \geq 0$, 从而当 $x \geq a$ 时 $F(x) \geq 0, F(b) \geq 0$, 即 $\int_a^b x f(x) dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx$.

12.【证明】 令 $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x}, & x \neq 0, \\ f(0), & x = 0. \end{cases}$ 因 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$,

所以 $\varphi(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 又在 $(0, 1)$ 上可导. $\varphi'(x) = \frac{1}{x^2} (x f(x) - \int_0^x f(t) dt), x \in (0, 1)$,

因 $\varphi(1) = \int_0^1 f(x) dx = f(0) = \varphi(0)$, 由罗尔定理可得 $\varphi'(\xi) = 0$ 即 $\xi f(\xi) - \int_0^\xi f(t) dt = 0, \xi \in (0, 1)$.

故 $\int_0^\xi f(x) dx = \xi f(\xi)$, 命题得证.

13.【证明】 令 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, 则有 $F(a) = \int_a^a f(t) dt = 0, F'(x) = f(x), F''(x) = f'(x)$,

$F'''(x) = f''(x)$. $F(x)$ 在 $x_0 = \frac{a+b}{2}$ 处的二阶泰勒展开式为

$$\begin{aligned} F(x) &= F\left(\frac{a+b}{2}\right) + F'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2!} F''\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!} F'''(\xi)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3 \\ &= F\left(\frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2!} f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!} f''(\xi)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3, \end{aligned}$$

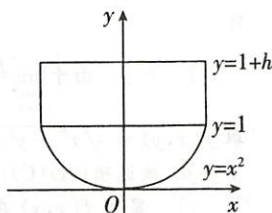
$\xi \in (x, \frac{a+b}{2})$ 或 $\xi \in (\frac{a+b}{2}, x)$. 此时分别将 $x = b, x = a$ 代入上式, 相减得:

$$F(b) - F(a) = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{24} (b-a)^3 \frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2)}{2}, \xi_1 \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right), \xi_2 \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right).$$

若 $f''(\xi_1) \leq f''(\xi_2)$, 则 $f''(\xi_1) \leq \frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2)}{2} \leq f''(\xi_2)$, 由 $f''(x)$ 的连续性及其介值定理可知, 在以 ξ_1, ξ_2 为

端点的闭区间上至少存在一个 ξ , 使 $f''(\xi) = \frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2)}{2}$, 当然此 $\xi \in (a, b)$, 若 $f''(\xi_1) \geq f''(\xi_2)$ 亦类似. 故

$$\text{有 } \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{24} (b-a)^3 f''(\xi).$$



第四章 多元函数微积分学

1. B

【解析】 由于 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - (x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left[\frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \sqrt{x^2 + y^2} \right] = 1$ 则 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 1$.

取 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, 显然符合题设条件. 而 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点连续, 但两个偏导数 $f'_x(0, 0)$ 和 $f'_y(0, 0)$ 都不存在, 故选项 (A) (C) (D) 均不正确, 故应选 (B).

2. 【证明】 显然 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点连续.

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0, f'_y(0, 0) = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) - [f'_x(0, 0)\Delta x + f'_y(0, 0)\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\sqrt{((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2)^{3/2}}} \sin((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2) \\ &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \text{ 不存在,} \end{aligned}$$

故 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点连续、可导, 但不可微.

3. 【解】 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xf'_1 + ye^{xy}f'_2, \frac{\partial z}{\partial y} = -2yf'_1 + xe^{xy}f'_2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= -4xyf''_{11} + 2x^2e^{xy}f''_{12} - 2y^2e^{xy}f''_{21} + xye^{2xy}f''_{22} + e^{xy}f'_2 + xye^{xy}f'_2 \\ &= -4xyf''_{11} + 2(x^2 - y^2)e^{xy}f''_{12} + xye^{2xy}f''_{22} + e^{xy}(1 + xy)f'_2. \end{aligned}$$

4. 【解】 等式 $F(x + y, y + z) = 1$ 两端对 x 求导得 $F'_1 + F'_2 \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_1}{F'_2}$,

$$\text{同理 } \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_1 + F'_2}{F'_2},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= -\frac{[F''_{11} + F''_{12}(1 + \frac{\partial z}{\partial y})]F'_2 - [F''_{21} + F''_{22}(1 + \frac{\partial z}{\partial y})]F'_1}{(F'_2)^2} \\ &= \frac{2F'_1F'_2F''_{21} - (F'_1)^2F''_{22} - (F'_2)^2F''_{11}}{(F'_2)^3} \end{aligned}$$

5. 【解】 由 $u = f(r), r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 知

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(r) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} f'(r)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{x^2}{r^2} f''(r) + f'(r) \frac{r - \frac{x^2}{r}}{r^2} = \frac{x^2}{r^2} f''(r) + f'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right)$$

由变量对称性知

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{y^2}{r^2} f''(r) + f'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} \right)$$

$$\text{则 } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) = 0.$$

$$rf''(r) + f'(r) = 0$$

$$\frac{d}{dr}(rf'(r)) = 0$$

$$rf'(r) = C_1$$

$$f'(r) = \frac{C_1}{r}$$

$$f(r) = C_1 \ln r + C_2$$



由 $f(1) = 1, f'(1) = 1$ 知 $C_2 = 1, C_1 = 1$, 则 $f(r) = \ln r + 1$.

6. 【解】
$$\begin{cases} 2x - 6y - 2yz'_x - 2zx'_x = 0 \\ -6x + 20y - 2z - 2yz'_y - 2zx'_y = 0 \end{cases}$$

令 $z'_x = 0, z'_y = 0$ 得驻点 $(9, 3), (-9, -3)$

容易验证在 $(9, 3)$ 点, $AC - B^2 > 0$, 且 $A > 0$, 则取极小值, $z(9, 3) = 3$,

在点 $(-9, -3)$ 处, $AC - B^2 > 0$, 且 $A < 0$, 则取极大值, $z(-9, -3) = -3$.

7. 【解】 令 $F(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x + y + z) + \mu(x^2 + y^2 - 1)$

由 $x^2 + y^2 = 1$ 知 $F = 1 + z^2 + \lambda(x + y + z) + \mu(x^2 + y^2 - 1)$

$$\begin{cases} F'_x = \lambda + 2\mu x = 0 & \text{①} \\ F'_y = \lambda + 2\mu y = 0 & \text{②} \\ F'_z = 2z + \lambda = 0 & \text{③} \\ F'_\lambda = x + y + z = 0 & \text{④} \\ F'_\mu = x^2 + y^2 - 1 = 0 & \text{⑤} \end{cases}$$

由 ① 式和 ② 式得 $\mu x = \mu y$

(1) 若 $\mu = 0$, 则由 ① 式得 $\lambda = 0$, 由 ③ 式得 $z = 0$, 将 $z = 0$ 代入 ④ 式和 ⑤ 式得驻点

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

(2) 若 $\mu \neq 0$, 则 $x = y$, 将此代入 ④ 式和 ⑤ 式得

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$$

$$u\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = u\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0} = 1$$

$$u\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right) = u\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 2} = \sqrt{3}$$

则函数 $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 在条件 $x^2 + y^2 = 1$ 及 $x + y + z = 0$ 下的最大值为 $\sqrt{3}$, 最小值为 1.

8. 【解】 驻点为 $(0, 0), (0, a), (a, 0), \left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$, $AC - B^2 = 4xy - (a - 2x - 2y)^2$.

(1) 当 $a > 0$ 时, $(0, 0), (0, a), (a, 0)$ 均不是极值点, $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ 为极大值点, $f\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right) = \left(\frac{a}{3}\right)^3$.

(2) 当 $a < 0$ 时, $(0, 0), (0, a), (a, 0)$ 均不是极值点, $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ 为极小值点, $f\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right) = \left(\frac{a}{3}\right)^3$.

(3) 当 $a = 0$ 时, 驻点只有一个 $(0, 0)$ 点, 此时 $AC - B^2 = 0$, 极值充分条件不能判定, 此时 $f(x, y) = -xy(x + y)$.

若取 $y = x$, 则 $f(x, x) = -2x^3$, 显然 $(0, 0)$ 点任何邻域内 $f(x, y)$ 可正可负, 而 $f(0, 0) = 0$, 则此时 $(0, 0)$ 不是极值点.

9. 【证明】 只要证明函数 xy^2z^3 在条件 $x + y + z = k$ 下的最大值不超过 $108\left(\frac{k}{6}\right)^6$ 即可. 过程略.

10. 【解】 (1)
$$\iint_D \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}} dx dy = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 d\theta \int_0^{-2\sin\theta} \frac{r^2}{\sqrt{4a^2 - r^2}} dr = \left(\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}\right)a^2.$$

(2)
$$\begin{aligned} \iint_D (\sqrt{x^2 + y^2} + x) d\sigma &= \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma + \iint_D x d\sigma \quad \text{利用对称性得} \iint_D x d\sigma = 0 \\ &= \iint_{x^2 + y^2 \leq 4} \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma - \iint_{x^2 + (y+1)^2 \leq 1} \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^2 dr - \int_{-\pi}^0 d\theta \int_0^{-2\sin\theta} r^2 dr = \frac{16}{9}(3\pi - 2). \end{aligned}$$

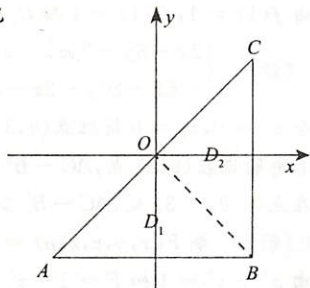


(3) 积分域如右图 $\triangle ABC$, 连结 OB 将积分域分为 $\triangle ABO$ (记为 D_1) 和 $\triangle BCO$ (记为 D_2)

由奇偶性知

$$\iint_{D_1} xye^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx dy = 0, \iint_{D_2} xye^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx dy = 0$$

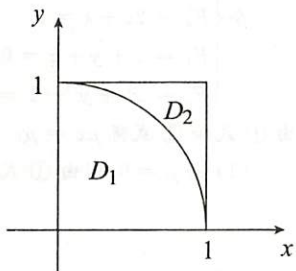
$$\begin{aligned} \text{则 } \iint_D y(1 + xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}) dx dy &= \iint_D y dx dy = \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^x y dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x^2 - 1) dx \\ &= -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$



第 10(3) 题图

$$(4) \iint_D |x^2 + y^2 - 1| d\sigma$$

$$\begin{aligned} &= \iint_{D_1} (1 - x^2 - y^2) d\sigma + \iint_{D_2} (x^2 + y^2 - 1) d\sigma \\ &= \iint_{D_1} (1 - x^2 - y^2) d\sigma + \iint_D (x^2 + y^2 - 1) d\sigma - \iint_{D_1} (x^2 + y^2 - 1) d\sigma \\ &= \iint_D (x^2 + y^2 - 1) d\sigma + 2 \iint_{D_1} (1 - x^2 - y^2) d\sigma \\ &= \int_0^1 dx \int_0^1 (x^2 + y^2 - 1) dy + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 (1 - r^2) r dr = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$



第 10(4) 题图

11. 【解】

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} dt \int_x^{t^2} f(t, u) du}{1 - e^{-x^4}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\int_0^x du \int_0^{u^2} f(t, u) dt}{x^4} \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} f(t, x) dt}{4x^3} = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 f(c, x)}{4x^3} \quad (0 \leq c \leq x^2) = -\frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(c, x)}{x} \\ &= -\frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'_x(0, 0)c + f'_y(0, 0)x + o(\sqrt{c^2 + x^2})}{x} = -\frac{1}{4} f'_y(0, 0). \end{aligned}$$

第五章 常微分方程

1. $(x-4)y' = Cx$

【解析】 由 $y dx + (x^2 - 4x) dy = 0$ 知 $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{4x - x^2}$, 积分得 $(x-4)y' = Cx$.

2. $y = \frac{C_1}{x^2} + C_2$

【解析】 令 $y' = p$, 则 $y'' = p'$, $x p' + 3p = 0 \Rightarrow p = \frac{C}{x^3} \Rightarrow y = \frac{C_1}{x^2} + C_2$.

3. $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}$

【解析】 令 $y' = p$, 则 $y'' = \frac{dp}{dx}$

$$\frac{dp}{dx}(x + p^2) = p \Rightarrow x + p^2 = p \frac{dx}{dp} \Rightarrow \frac{dx}{dp} = \frac{x}{p} + \frac{p}{x} = p \Rightarrow x = \int p e^{\int \frac{dp}{p}} dp + C = p(p + C)$$

由 $y'(1) = 1$ 知, $C = 0$, 则 $p^2 = x \Rightarrow p = \sqrt{x}$, $y' = \sqrt{x}$, $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C_1$



由 $y(1) = 1$ 知, $C_1 = \frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}$.

4. B

【解析】 由 $y = xe^x + x$ 是方程 $y'' - 2y' + ay = bx + c$ 的解知, xe^x 是齐次方程 $y'' - 2y' + ay = 0$ 的解, 且其特征方程有特征根 1, 则 $a = 1, x$ 为非齐次解, 代入 $y'' - 2y' + y = bx + c$, 得 $b = 1, c = -2$.

5. A

【解析】 齐次方程特征方程为 $r^2 + 1 = 0, r = \pm i$, 则原方程特征为

$$y^* = ax^2 + bx + c + x(A\sin x + B\cos x).$$

6. B

【解析】 由于 $y_1 = e^{-x}, y_2 = 2xe^{-x}, y_3 = 3e^x$ 为三阶常系数齐次方程的解, 则该齐次方程特征方程根为 $r_1 = r_2 = -1, r_3 = 1$, 方程 $y''' + y'' - y' - y = 0$ 的特征方程为 $r^3 + r^2 - r - 1 = 0$, 即 $(r-1)(r^2 + 2r + 1) = 0$, 故应选(B).

7. $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - (\frac{x^2}{2} + x)e^x$.

8. 【解】 齐次方程特征方程为 $r^2 + 3r + 2 = 0$, 特征根为 $r_1 = -2, r_2 = -1$.

设 $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$ 特解为 $y_1^* = A_1 xe^{-x}$, 代入该方程得 $A_1 = 1$.

设方程 $y'' + 3y' + 2y = \sin x$ 的特解为 $y = A_2 \cos x + B \sin x$,

代入该方程得 $A_2 = -\frac{3}{10}, B = \frac{1}{10}$.

则原方程通解为 $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + xe^{-x} + \frac{1}{10} \sin x - \frac{3}{10} \cos x$.

9. 【解】 $\int_0^x t f(x-t) dt \xrightarrow{x-t=u} \int_0^x (x-u) f(u) du = x \int_0^x f(u) du - \int_0^x u f(u) du$
 $f(x) = e^x + x \int_0^x f(u) du - \int_0^x u f(u) du$

上式两端求导得

$$f'(x) = e^x + \int_0^x f(u) du$$

$$f''(x) = e^x + f(x)$$

$$f''(x) - f(x) = e^x$$

特征方程 $r^2 - 1 = 0, r_1 = 1, r_2 = -1$

设非齐次特解为 $y^* = A x e^x$ 代入方程得 $A = \frac{1}{2}$, 则 $f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x e^x$

由 $f(0) = 1, f'(0) = 1$ 知 $C_1 = \frac{3}{4}, C_2 = \frac{1}{4}$

则 $f(x) = \frac{3}{4} e^x + \frac{1}{4} e^{-x} + \frac{1}{2} x e^x$.

10. $f(r) = C_1 e^r + C_2 e^{-r} - 2 - r^2$

11. 【解】 $f(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^t r \cos \theta \left(1 + \frac{f(r)}{r^2}\right) r dr = \int_0^t [r^2 + f(r)] dr$

$$f'(t) = t^2 + f(t)$$

$$f(t) = e^{\int dt} \left[\int t^2 e^{-\int dt} dt + C \right]$$

$$= e^t [-t^2 e^{-t} - 2t e^{-t} - 2e^{-t} + C]$$

$$= C e^t - t^2 - 2t - 2$$

由 $f(0) = 0$ 知 $C = 2, f(t) = 2e^t - t^2 - 2t - 2$.

12. $y = \sqrt{3x - x^2} \quad (0 < x < 3)$.

第二篇 线性代数

第一章 行列式

1. 160

【解析】

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \\ 4 & -3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 20 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= -80 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 160.$$

2. $a^5 + b^5$

【解析】按第5行展开,再用公式(1.5).

$$\text{原式} = b(-1)^{5+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & a & b \\ 0 & a & b & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + a(-1)^{5+5} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & a & b & 0 \\ a & b & 0 & 0 \end{vmatrix} = a^5 + b^5.$$

3. 3 或 -2

【解析】

$$\text{由范德蒙行列式(1.7)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = (x-3)(-2-3)(-2-x) = 0$$

故 $x = 3$ 或 $x = -2$.

4. $-\frac{9}{4}$

【解析】

由 $|kA| = k^n |A|$, $|A^T| = |A|$, $|A^{-1}| = |A|^{-1}$, 有

$$|-|A^T|B^{-1}| = (-|A|)^4 |B^{-1}| = (-3)^4 \cdot \left(-\frac{1}{36}\right) = -\frac{9}{4}.$$

5. 2

【解析】

由矩阵方程 $BA = B + 2E$ 得 $B(A-E) = 2E$, 两边取行列式有

$$|B(A-E)| = |2E| \text{ 即 } |B| |A-E| = 2^2 |E| = 4$$

又因 $|A-E| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$, 故 $|B| = 2$. 利用 $|A^*| = |A|^{n-1}$ 可知 $|B^*| = |B|^{2-1} = 2$.

6. B



【解析】
$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 3a_1 & 3b_1 & 3c_1 \\ a_3 - 2a_1 & b_3 - 2b_1 & c_3 - 2c_1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 - 2a_1 & b_3 - 2b_1 & c_3 - 2c_1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= -3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -3m.$$

请说出每一步所用的行列式的性质.

7. D

【解析】 利用行列式的性质,有

$$\begin{aligned} |\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta_1 + \beta_2| &= |\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta_1| + |\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta_2| \\ &= -|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1| - |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2| \\ &= -m + |\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3| = n - m. \end{aligned}$$

8. C

【解析】 利用拉普拉斯(1.6)和 $|kA| = k^n |A|$, 有

$$\begin{vmatrix} O & 3B \\ -A & O \end{vmatrix} = (-1)^{nm} \begin{vmatrix} 3B & O \\ O & -A \end{vmatrix} = (-1)^{nm} |-A| \cdot |3B| = (-1)^{nm} (-1)^n \cdot 3^m |A| |B| = (-1)^{n(m+1)} 3^m ab.$$

9. C

【解析】 本题考查的是 $|A| = 0$ 的必要条件,而选项(A)(B)(D)均是 $|A| = 0$ 的充分条件,并不必要.

$|A| = 0 \Leftrightarrow A$ 的行(列)向量组线性相关

$\Rightarrow$ 有一行(列)向量可由其余的行(列)向量线性表出.

注意 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} = 0$, 说明(A)(D)均不正确. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, 说明(B)不正确.

10. 【证明】 $|\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1| = |\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_1, \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_4 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3| = 0.$

第二章 矩 阵

1. a_{n1}

【解析】 $x^T Ax + x^T Ay - y^T Ax - y^T Ay = x^T A(x+y) - y^T A(x+y) = (x^T - y^T)A(x+y)$

$$= (x-y)^T A(x+y) = (0, 0, \dots, 0, 1) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = a_{n1}.$$

2.
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{bmatrix}$$

微信公众号:顶尖考研
(ID: djky66)



【解析】

$$\text{由于 } \begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{bmatrix}, \text{ 及 } \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix}$$

$$\text{那么将 } A \text{ 分块如下: } A = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{记}} \begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix}, \text{ 立即有 } A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{bmatrix}.$$

3. $\frac{1}{5}(2E - A)$

【解析】 因为 $A^2 + 3A - 5E = (A + 5E)(A - 2E) + 5E = O$

所以 $(A + 5E) \cdot \frac{1}{5}(2E - A) = E$ 故 $(A + 5E)^{-1} = \frac{1}{5}(2E - A)$.

4. $\begin{bmatrix} 4 & -7 & 11 \\ -1 & 6 & -6 \end{bmatrix}$

【解析】 由于 A 不是可逆矩阵, 故可设 $X = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix}$

$$\text{则 } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & 10 & -2 \\ 7 & 9 & 3 \end{bmatrix} \text{ 即 } \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 = 4 \\ 3x_1 + 5x_2 = 7 \end{cases}, \begin{cases} y_1 + 2y_2 = 5 \\ 2y_1 + 4y_2 = 10 \\ 3y_1 + 5y_2 = 9 \end{cases}, \begin{cases} z_1 + 2z_2 = -1 \\ 2z_1 + 4z_2 = -2 \\ 3z_1 + 5z_2 = 3 \end{cases}$$

解出 $x_1 = 4, x_2 = -1; y_1 = -7, y_2 = 6; z_1 = 11, z_2 = -6$ 故 $X = \begin{bmatrix} 4 & -7 & 11 \\ -1 & 6 & -6 \end{bmatrix}$.

5. (1) $a \neq 3$ (2) $a = 5$

【解析】 (1) $\begin{bmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 0 & -1-2a & a+2 & 1 \\ 0 & 10-a & -5 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 0 & -1-2a & a+2 & 1 \\ 0 & 9-3a & a-3 & 0 \end{bmatrix}$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & a-3 & -1 & 2 \\ 0 & a+5 & a+2 & 1 \\ 0 & 0 & a-3 & 0 \end{bmatrix}$ 因为秩 $r(A) = 3$, 所以 $a \neq 3$.

(2) $a = 5$. 因 B 可逆, 故 $r(AB) = r(A) = 2, A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & a & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & a-4 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & a-5 & 0 \end{bmatrix}.$

$r(A) = 2 \Leftrightarrow a = 5.$

6. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$



【解析】 由 $A = PBQ$ 有 $B = P^{-1}AQ^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$

7. $\begin{bmatrix} 9 & 9 & 0 & 0 \\ 18 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 27 & 108 \\ 0 & 0 & 0 & 27 \end{bmatrix}$

【解析】 因 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^3 = 3^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 9 \\ 18 & 18 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^3 = \left(3E + \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^3 = 3^3 E + 3 \cdot (3E)^2 \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
 $= \begin{bmatrix} 27 & 108 \\ 0 & 27 \end{bmatrix},$ 由 $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} A^n & O \\ O & B^n \end{bmatrix}$ 故 $A^3 = \begin{bmatrix} 9 & 9 & 0 & 0 \\ 18 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 27 & 108 \\ 0 & 0 & 0 & 27 \end{bmatrix}.$

8. A

【解析】 说明命题不成立,只要举出一个特例不成立即可.

设 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $A^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, AA^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A^T A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$ 故 $AA^T \neq A^T A$. 故选(A). 举特例越简单越好,只要能说明问题就好.

注意因 $EA = AE$, 故 $(E+A)(E-A) = E - A^2 = (E-A)(E+A)$. 又 $AA^{-1} = A^{-1}A = E, AA^* = A^*A = |A|E$.

9. C

【解析】 用定义, $A^T = A, B^T = -B$, 那么

$$(AB + BA)^T = (AB)^T + (BA)^T = B^T A^T + A^T B^T = -(AB + BA).$$

注意 $AB - BA$ 与 BAB 是对称矩阵, $(AB)^2$ 既不是对称阵, 也不是反对称阵.

10. B

【解析】 $|A^* B^T| = |A^*| \cdot |B^T| = |A|^{n-1} \cdot |B| \neq 0$

注意(A)中反例 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, (C)中反例 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, (D)中反例 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$

注意(D)没有方阵的条件.

11. D

【解析】 注意 $A^2 = (E - 2\alpha^T \alpha)(E - 2\alpha^T \alpha) = E - 4\alpha^T \alpha + 4\alpha^T \alpha \alpha^T \alpha = E,$

$$\text{且 } A^T = (E - 2\alpha^T \alpha)^T = E^T - 2\alpha^T (\alpha^T)^T = A.$$

因为 $A^2 = E$ 且 $A^T = A$ 所以(A)(B)(C)均正确.

12. B

【解析】 观察矩阵 A, B 元素之间的关系, 即 A 只作列变换即可得 B . 故(A)(D)可排除. 把矩阵 A 的第3列加到第2列, 再把1, 2两列互换就可得到矩阵 B , 故应选(B)(或者把 A 的1, 2两列互换, 再把第3列加到第1列).

$$\text{即 } B = A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = AP_2 P_1 \text{ (或 } B = A \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{, 但选项中没有.)}$$

第三章 向 量

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

1. -1

【解析】 向量 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示 $\Leftrightarrow$ 方程组 $x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_3 \alpha_3 = \beta$ 无解 $\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq r(\alpha_1,$



$\alpha_2, \alpha_3, \beta)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & \vdots & 3 \\ 1 & a & -2 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -a & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & (a-3)(a+1) & \vdots & a-3 \end{bmatrix}$$

所以当 $a = -1$ 时, $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2 \neq r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta) = 3 \Leftrightarrow \beta$ 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.

2. $a \neq 3$

【解析】 因为任意的 3 维向量 β 都可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 必线性无关, 否则 $r(A) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) < 3$. 总可找出适当的 β 使 $r(\bar{A}) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta) = 3$ 即方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$ 可以无解, 与题设矛盾.

$$\text{由 } |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2(a-3) \neq 0, \text{ 知 } a \neq 3.$$

3. $a \neq 1$ 且 $a \neq \frac{1}{2}$.

4. $a = -2$

【解析】 经初等变换向量组的秩不变

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & a & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2a+4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可见 $a = -2$.

易见 α_1, α_2 线性无关, 由秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$ 可知 α_3 必可由 α_1, α_2 线性表示方程组有解亦可求出 a .

5. C

【解析】 方法一 利用排除法, 把显然是线性相关的向量组排除.

(A) 因 α_3 是零向量, 故有 $0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 1 \cdot \alpha_3 = 0$, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

(B) $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 是 4 个 3 维向量, 向量个数超过维数, 则 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 必线性相关.

(D) $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 是 4 个 4 维向量, 由其组成的矩阵的行列式为

$$|\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

故 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 线性相关. (或方程组 $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)x = 0$ 有解 $(1, -2, 1, 0)^T$, 即有 $\eta_1 - 2\eta_2 + \eta_3 + 0\eta_4 = 0$, $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 线性相关.)

由排除法知, 应选 (C).

方法二 选项 (C) 中向量 ξ_1, ξ_2, ξ_3 去除第 1, 3 个分量, 得缩短的向量为 $\xi'_1 = (1, 0, 0)^T, \xi'_2 = (0, 1, 0)^T, \xi'_3 = (0, 0, 1)^T$ 是线性无关的基本向量, 添加分量成 ξ_1, ξ_2, ξ_3 后仍线性无关, 故应选 (C).

6. C. 7. A. 8. B. 9. D.

10. B

【解析】 用极大线性无关组的定义判别. 因 $r(I) = r \Leftrightarrow (I)$ 的极大线性无关组中向量个数是 $r \Leftrightarrow (I)$ 中有 r 个向量线性无关, 任意 $r+1$ 个必线性相关, 所以 (B) 正确.

由于不要求任何 r 个向量都是极大线性无关组, (C) 不正确. (I) 中可以有零向量, 故 (A) 不正确, (I) 可以是线性无关的, 即 $s = r$, (D) 不正确.

11. 【解析】 $a = 0$ 时, β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出. $a \neq 0$ 时, $\beta = (1 - \frac{1}{a})\alpha_1 + (k + \frac{1}{a})\alpha_2 + k\alpha_3$, k 是任意常数.



12.【解】 极大线性无关组为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ (或 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$ 或 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 或 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5$), $r[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5] = 3$.

$$\alpha_3 = 3\alpha_1 + \alpha_2 + 0\alpha_4, \alpha_5 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4.$$

13.【解】 提示: 利用关系式 $[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n] = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]C$.

若 C 可逆, 则 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$.

14.【解】 提示: A 可逆 $\Leftrightarrow r[A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)] = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = n = r[A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_n]$.

第四章 线性方程组

1. $a = -1$.

2. D

【解析】 注意(B) A 可能不是方阵. (A) $Ax = b$ 可能无解. (C) 可能 $r(A|b) = n+1$.

3. D

【解析】 当 $n < m$ 时, $A_{m \times n}, B_{n \times m}, AB$ 是 m 阶方阵, 且 $r(AB) \leq r(A) \leq n < m, ABx = 0$ 必有非零解.

4. C.

5. B

【解析】 $\alpha_i (i=1, 2, 3, 4)$ 是否是方程组的解, 可以考查是否属于通解, 即是否存在 k_1, k_2 , 使得 $\alpha_i = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \eta$. 即 $\alpha_i - \eta = k_1\xi_1 + k_2\xi_2$, $\alpha_i - \eta$ 能否由 ξ_1, ξ_2 线性表出.

6.【解】 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = -3$ 时, 方程组无解; $\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq -3$ 时, 方程组有唯一解, 其解为

$$\left(\frac{2-\lambda^2}{\lambda(\lambda+3)}, \frac{2\lambda-1}{\lambda(\lambda+3)}, \frac{\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1}{\lambda(\lambda+3)} \right)^T.$$

7.【解】 $AB = O$, B 的列都是 $Ax = 0$ 的解, $k \neq 9$ 时, $r(B) = 2$, 必有 $r(A) = 1$, 通解为 $k_1(1, 2, 3)^T + k_2(3, 6, k)^T$; $k = 9$ 时, $r(B) = 1$, 当 $r(A) = 2$ 时, 通解为 $k(1, 2, 3)^T$; 当 $r(A) = 1$ 时, 通解为 $k_1(b, -a, 0)^T + k_2(c, 0, -a)^T$.

8.【解】 将方程组的增广矩阵作初等行变换化成阶梯形矩阵:

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 2 & 3 & 11 \\ -3 & 1 & -4 & -2 & -6 \\ -1 & -9 & 0 & 3 & 15 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 2 & 3 & 11 \\ 0 & -14 & 2 & 7 & 27 \\ 0 & -14 & 2 & 6 & 26 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 2 & 3 & 11 \\ 0 & -14 & 2 & 7 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right],$$

求得通解为 $k(-9, 1, 7, 0)^T + (-12, 0, 10, 1)^T$, 其中 k 为任意常数.

由通解知 $x_1 = -9k - 12, x_2 = k$, 令 $x_1 = x_2$, 即 $-9k - 12 = k$, 得 $k = -\frac{6}{5}$. 故满足方程组且满足 $x_1 = x_2$ 的解为

$$-\frac{6}{5}(-9, 1, 7, 0)^T + (-12, 0, 10, 1)^T = \left(-\frac{6}{5}, -\frac{6}{5}, \frac{8}{5}, 1\right)^T.$$

或直接求解联立方程 $\begin{cases} Ax = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$.

9.【解】 提示: $A_{m \times n}x = b$ 有唯一解 $\Leftrightarrow r(A) = r[A|b] = n \Leftrightarrow r(A^T A)_{n \times n} = r(A) = n \Leftrightarrow A^T A$ 可逆. $Ax = b$ 两端左乘 A^T 及 $(A^T A)^{-1}$, 得唯一解 $x = (A^T A)^{-1} A^T b$.

10.【解】 (1) 由题条件知 $r(A) = 1, r(B) = 2, r\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}\right) \leq r(A) + r(B) < 4, \left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}\right)x = 0$ 有非零解, 即 $Ax = 0$ 和 $Bx = 0$ 有非零公共解. 或 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2$ 五个四维向量必线性相关, 存在不全为零的数 $k_1, k_2, k_3, \lambda_1, \lambda_2$ 使 $k_1\xi_1 +$

$k_2\xi_2 + k_3\xi_3 + \lambda_1\eta_1 + \lambda_2\eta_2 = 0$, 则 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3 = -\lambda_1\eta_1 - \lambda_2\eta_2 \neq 0$.

故 $Ax = 0$ 和 $Bx = 0$ 有非零公共解 $\alpha = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3$ (或 $-\lambda_1\eta_1 - \lambda_2\eta_2$)

$$(2) [\xi_1, \xi_2, \xi_3 | \eta_1, \eta_2] = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 7 & 5 \\ 4 & 2 & 0 & 14 & 10 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

因 η_1, η_2 均可由 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性表出, 故 $\mu_1\eta_1 + \mu_2\eta_2$ 即是 $Ax = 0$ 和 $Bx = 0$ 的公共解.

第五章 特征值、特征向量、相似矩阵

1. 3

【解析】 设 A 的特征向量 ξ 所对应的特征值为 λ , 则有 $A\xi = \lambda\xi$, 即

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & a \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

即

$$\begin{cases} 2 - 2 + 1 = \lambda, \\ 5 - 3 - a = -\lambda, \text{ 解得 } a = 3. \\ 1 - 2 + 0 = -\lambda. \end{cases}$$

2. $0, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$

【解析】 A 是实对称阵, 其余的特征向量为 $\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$, 因不同特征值对应的特征向量相互正交, 且有

$$(A - \lambda_1\xi_1\xi_1^T)\xi_i = A\xi_i - \lambda_1\xi_1\xi_1^T\xi_i = \begin{cases} 0, & i = 1, \\ A\xi_i = \lambda_i\xi_i, & i \neq 1, \end{cases} \text{ 故知 } A - \lambda_1\xi_1\xi_1^T \text{ 有特征值 } 0, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n.$$

3. B

【解析】 因 $r(A) = 1$, A 是三阶矩阵 (至少二重), 也可能三重, 如 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 一重是不可能的.

4. C

【解析】 四个三阶矩阵的特征值均是 $1, 1, 2$, $\lambda = 1$ 是二重特征值, 存在多重特征值时, 若对应线性无关特征向量个数等于特征值重数, 则该矩阵能相似于对角阵. (C) 中 $\lambda = 1$ 时, 对应有两个线性无关特征向量, 故 (C) 能相似于对角阵.

5. C

【解析】 要注意: (1) 特征值和对应的特征向量排列次序应一致, (B) 不是; (2) 不同特征值对应的特征向量之和不再是特征向量, (A)(D) 不是; (3) α_1, α_2 是 $\lambda = 1$ 的特征向量, $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$ (k_1, k_2 不同时为零) 仍是 $\lambda = 1$ 的特征向量.

6. 【解】 A, B 均是实对称阵, 它们均可相似于对角阵, 而 $|\lambda E - A| = 0$ 及 $|\lambda E - B| = 0$, 解得相同的特征值 $4, 1, -2$, 故 A, B 相似于同一个对角阵, 由相似关系的传递性, 得 $A \sim B$.

或由观察: 将 A 的 $1, 2$ 行互换得 C , 再将 C 的 $1, 2$ 列互换得 B , 即 $E_{12}AE_{12} = E_{12}^{-1}AE_{12} = B$, 故 $A \sim B$.

$$7. \text{【解】 } \lambda_1 = 5, \lambda_2 = \lambda_3 = -1. Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

8.【解】 由 $\beta = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3$, 解得 $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1)$.

$$\beta = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3, A^{100}\beta = A^{100}(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) = \xi_1 + (-2)^{100}\xi_2 + 3^{100}\xi_3 = \begin{bmatrix} 1 + 2^{100} + 3^{100} \\ -2 + 3^{100} \\ 1 - 2^{100} + 3^{100} \end{bmatrix}.$$

本题也可先由 λ, ξ 求出 A , 再计算 $A^{100}\beta$, 但计算较繁.

9.【解】 (1) 由题设条件知: $A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1 = \alpha_1$, 故 $A^k\alpha_1 = \lambda_1^k\alpha_1 = \alpha_1$, 从而有

$$B\alpha_1 = (A^5 - 4A^3 + E)\alpha_1 = \alpha_1 - 4\alpha_1 + \alpha_1 = -2\alpha_1,$$

知 α_1 是 B 的对应于特征值 $\lambda = -2$ 的特征向量.

又 A 有特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$. $B = f(A)$, 其中 $f(x) = x^5 - 4x^3 + 1$, 故 B 有特征值 $\mu_i = f(\lambda_i), i = 1, 2, 3$, 其中 $\mu_1 = -2, \mu_2 = f(2) = 1, \mu_3 = f(-2) = 1$, 因 $\mu_2 = \mu_3 = 1$, 故 B 的对应于 $\mu_2 = \mu_3 = 1$ 的特征向量应与 $\mu_1 = -2$ 对应的特征向量 α_1 正交.

设特征向量为 $\alpha = (x_1, x_2, x_3)^T$, 则 $\alpha_1^T \alpha = x_1 - x_2 + x_3 = 0$, 可解得 $\mu_2 = \mu_3 = 1$ 对应的特征向量为

$$\alpha_2 = (1, 1, 0)^T, \alpha_3 = (1, -1, -2)^T.$$

(2) 方法一 取 $P = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, 则 $B = PAP^{-1}$

$$\text{其中 } P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

$$B = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

方法二 将 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 单位化 (α_2, α_3 已正交)

$$\alpha_1^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^T, \alpha_2^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T, \alpha_3^0 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, -2)^T,$$

$$\text{得正交阵 } Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

$$B = QAQ^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

第六章 二次型

1. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



$$2. A = \begin{bmatrix} a_1 a_2 & \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{2} & \frac{a_1 c_2 + a_2 c_1}{2} \\ \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{2} & b_1 b_2 & \frac{b_1 c_2 + b_2 c_1}{2} \\ \frac{a_1 c_2 + a_2 c_1}{2} & \frac{b_1 c_2 + b_2 c_1}{2} & c_1 c_2 \end{bmatrix}. \text{注意必须是对称阵.}$$

3. D

【解析】(A), (B) 是必要条件, 但不是充分条件; (C) 是充分条件, 但不是必要条件.

4. C

【解析】关键是正、负惯性指数一致, 且只需讨论 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 的正、负惯性指数即可. $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = (x_1 + 2x_2)^2 - 3x_2^2 - x_3^2$, 知 $p = 1, q = 2$, 故选 (C).

5. C

【解析】设 f 的正惯性指数为 p , 负惯性指数为 q , 则 $-f$ 的正惯性指数为 q , 负惯性指数为 p , 有 $f \simeq -f$, 故 $p = q$, 从而知 $r = p + q = 2p, s = p - q = 0$, 故选 (C).

6. D

【解析】(B) 中 $a_{22} = 0$, (C) 中 $a_{33} = -2$. (A) 中 a_{33} 的余子式 $M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 < 0$ (二阶顺序主子式), 不满足 A 正定的必要条件, 应排除. 或直接用顺序主子式全部大于零. 判别 (D) 是正定的.

7. 【解】 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 4(x_2 + \frac{1}{2}x_3)^2 - 5x_3^2 = y_1^2 + 4y_2^2 - 5y_3^2$.

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + \frac{5}{2}y_3, \\ x_2 = y_2 - \frac{1}{2}y_3, \\ x_3 = y_3. \end{cases}$$

$$8. A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}, f = -y_1^2 - y_2^2 + 8y_3^2.$$

$$9. -\frac{4}{5} < a < 0.$$

10. 若 $s > n$, 不正定; 若 $s = n$ 或 $s < n$, 正定.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

顶尖考研公众号
(ID: djky66)



微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

顶尖考研
微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

书名	出版时间	适用阶段
数学公式的奥秘	2020年3月	全程复习
数学复习全书·基础篇	2020年6月	夯实基础
数学基础过关660题	2020年8月	夯实基础
数学历年真题全精解析·基础篇	2020年10月	夯实基础
数学复习全书	2020年12月	全程复习
数学历年真题全精解析	2021年1月	全程复习
高等数学辅导讲义	2021年1月	强化提高
线性代数辅导讲义	2021年1月	强化提高
概率论与数理统计辅导讲义	2021年1月	强化提高
数学强化通关330题	2021年1月	强化提高
数学决胜冲刺6套卷	2021年10月	冲刺预测
数学临阵磨枪	2021年10月	冲刺预测



微信扫一扫
解锁更多精彩内容



关注作者团队微博
与名师一起互动交流

