

助力乡村学校音体美课堂行动”官方合作图书
研客及全国各大考研培训学校指定用书

金榜时代TM
GLIST 明德·弘毅·品质 97

榜时代考研数学系列

高等数学 辅导讲义

2022

主编◎武忠祥（西安交通大学）

经典畅品 | 本书为作者多年强化班讲稿精华集结而成，并结合考生反馈不断修订，精益求精

严选习题 | 超值赠送《高分提档严选题》，提档加速，火力全开，高分领跑直通名校

免费视频 | 微信扫右侧二维码观看本书配套精选视频，随时随地轻松学，犹如名师在身旁



 西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

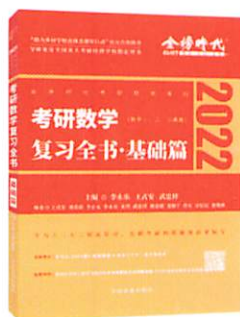
考研数学满分复习“四段论”

📍 考研之路 从青铜到王者
通关装备一览

一

基础不牢
地动山摇

达标分数
65分



二

全面复习
综合提高

达标分数
130分



三

专项突破
提分拉档

达标分数
150分



四

模拟训练
冲刺满分

达标分数
150分



金榜时代TM
GLIST 明德·弘毅·品质

金榜时代 考研数学系列

高等数学 辅导讲义

2022

主编 © 武忠祥 (西安交通大学)

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

@考研路上愈战愈勇的你

年轻人, 你的职责是平整土地, 而非焦虑时光。
你做三四月的事, 在八九月自有答案。



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学辅导讲义/武忠祥主编. —西安:西安交通大学出版社,2020.3(2021.2重印)
ISBN 978-7-5693-1325-3

I. ①高… II. ①武… III. ①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 208735 号

微信公众号【顶尖考研】

书 名 高等数学辅导讲义
主 编 武忠祥
责任编辑 张培茹 贺彦峰

出版发行 西安交通大学出版社
(西安市兴庆南路1号 邮政编码 710048)
网 址 <http://www.xjtupress.com>
电 话 (029)82668357 82667874(发行中心)
(029)82668315(总编办)
传 真 (029)82668280
印 刷 三河市燕山印刷有限公司

开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 17.5 字数 450 千字
版次印次 2020 年 3 月第 1 版 2021 年 2 月第 2 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5693-1325-3
定 价 69.80 元

如发现印装质量问题,请与本社发行中心联系、调换。

版权所有 侵权必究

金榜时代™ 考研数学系列图书

GLIST

内容简介及使用说明

考研数学满分 150 分,数学在考研成绩中的比重很大;同时又因数学学科本身的特点,考生的数学成绩历年来千差万别,数学成绩好在考研中很占优势,因此有“得数学者考研成”之说。既然数学对考研成绩如此重要,那么就有必要探讨一下影响数学成绩的主要因素。

本系列图书作者根据多年的命题经验和阅卷经验,发现考研数学命题的灵活性非常大,不仅表现在一个知识点与多个知识点的考查难度不同,更表现在对多个知识的综合考查上,这些题目在表达上多一个字或多一句话,难度都会变得截然不同。正是这些综合型题目拉开了考试成绩的距离,而构成这些难点的主要因素,实际上是最基础的基本概念、定理和公式的综合。同时,从阅卷反映的情况来看,考生答错题目的主要原因也是对基本概念、定理和公式记忆和掌握得不够熟练。总结为一句话,那就是:要想数学拿高分,就必须熟练掌握、灵活运用基本概念、定理和公式。

基于此,李永乐考研数学辅导团队结合多年来考研辅导和研究的经验,精心编写了本系列图书,目的在于帮助考生有计划、有步骤地完成数学复习,从基本概念、定理和公式的记忆,到对其的熟练运用,循序渐进。以下介绍本系列图书的主要特点和使用说明,供考生复习时参考。

书名	本书特点	本书使用说明
	内容基础·提炼精准·易学易懂(推荐使用时间:2020 年 6 月—2020 年 12 月)	
《数学复习全书·基础篇》	本书根据大纲的考试范围将考研所需复习内容提炼出来,形成考研数学的基础内容和复习逻辑,实现大学数学同考研数学之间的顺利过渡,开启考研复习第一篇章。	考生复习过本校大学数学教材后,即可使用本书。如果大学没学过数学或者本校课本是自编教材,与考研大纲差别较大,也可使用本书替代大学数学教材。
	题目经典·体系完备·逻辑清晰(推荐使用时间:2020 年 9 月—2021 年 4 月)	
《数学基础过关 660 题》	本书主编团队出版 20 年的经典之作,一直被模仿,从未被超越。年销量达百万余册,是当之无愧的考研数学头号畅销书,拥有无数甘当“自来水”的粉丝读者,口碑爆棚,考研数学不可不入!“660”也早已成为考研数学的年度关键词。 本书重基础,重概念,重理论,一旦你拥有了《数学复习全书》《数学基础过关 660 题》教你的思维方式、知识逻辑、做题方法,你就能基础稳固、思维灵活,对知识、定理、公式的理解提升到新的高度,避免陷入复习中后期“基础不牢,地动山摇”的窘境。	与《数学复习全书·基础篇》搭配使用,在完成对基础知识的学习后,有针对性地做一些练习。帮助考生熟练掌握定理、公式和解题技巧,加强知识点的前后联系,将之体系化、系统化,分清重难点,让复习周期尽量缩短。 虽说书中都是选择题和填空题,同学们不要轻视,也不要一开始就盲目做题。看到一道题,要能分辨出是考哪个知识点,考什么,然后在做题过程中看看自己是否掌握了这个知识点,应用的定理、公式的条件是否熟悉,这样才算真正做好了一道题。
	分类详解·注重基础·突出重点(推荐使用时间:2020 年 6 月—2020 年 12 月)	
《数学历年真题全精解析·基础篇》	本书精选精析 1987—2008 年考研数学真题,帮助考生提前了解大学水平考试与考研选拔考试的差别,不会盲目自信,也不会妄自菲薄,真正跨入考研的门槛。	与《数学复习全书·基础篇》《数学基础过关 660 题》搭配使用,复习完一章,即可做相应的章节真题。不会做的题目做好笔记,二轮复习时的继续练习。

书名	本书特点	本书使用说明
《数学复习全书》(综合提高篇)	系统全面·深入细致·综合提高(推荐使用时间:2021年1月—2021年7月)	
	本书为作者团队扛鼎之作,常年稳居各大平台考研图书畅销榜前列,主编之一的李永乐老师更是入选2019年“当当20周年白金作家”,考研界仅两位作者获此称号。 本书从基本理论、基础知识、基本方法出发,全面、深入、细致地讲解考研数学大纲要求的所有考点,不提供花拳绣腿的不实用技巧,也不提倡误人子弟的费时背书法,而是扎扎实实地带同学们深入每一个考点背后,找到它们之间的关联、逻辑,让同学们从知识点零碎、概念不清楚、期末考试过后即忘的“低级”水平,提升到考研必需的高度。	利用《数学复习全书·基础篇》把基本知识“捡”起来之后,再使用本书。本书及赠送本包含知识点的详细讲解、相应的练习题,以及笔记功能,有利于同学们建立考研知识体系和框架,打好基础。 在《数学基础过关660题》中若遇到不会做的题,可以放到这里来做。以章或节为单位,学习新内容前要复习前面的内容,按照一定的规律来复习。基础薄弱或中等偏下的考生,务必要利用考研当年上半年的时间,整体吃透书中的理论知识,摸清例题设置的原理和必要性,特别是对大纲中要求的基本概念、理论、方法要系统理解和掌握。
《数学历年真题全精解析》(强化篇)	真题真练·总结规律·提升技巧(推荐使用时间:2021年7月—2021年11月)	
	本书完整收录2009—2021年考研数学的全部试题,将真题按考点分类,还精选了其他卷的试题作为练习题。力争做到考点全覆盖,题型多样,重点突出,不简单重复。书中的每道题给出的参考答案有常用、典型的解法,也有技巧性强的特殊解法。分析过程逻辑严谨、思路清晰,具有很强的可操作性,通过学习,考生可以独立完成对同类题的解答。	边做题、边总结,遇到“卡壳”的知识点、题目,回到《数学复习全书》和之前听过的基础课,强化课中去补,争取把每个真题知识点吃透、搞懂,不留死角。 通过做真题,进一步提高解题能力和技巧,满足实际考试的要求。第一阶段,浏览每年真题,熟悉题型和常考点。第二阶段,进行专项复习。
《高等数学辅导讲义》 《线性代数辅导讲义》 《概率论与数理统计辅导讲义》	经典讲义·专项突破·强化提高(推荐使用时间:2021年7月—2021年10月)	
	三本讲义分别由作者的教学讲稿改编而成,系统阐述了考研数学的基础知识。书中例题都经过严格筛选、归纳,是多年经验的总结,对同学们的重点、难点的把握准确,有针对性。适合认真研读,做到举一反三。	哪科较薄弱,精研哪本。搭配《数学强化通关330题》一起使用,先复习讲义上的知识点,做章节例题、练习,再去听相关章节的强化课,做《数学强化通关330题》的相关习题,更有利于知识的巩固和提高。
《数学强化通关330题》	综合训练·突破重点·强化提高(推荐使用时间:2021年5月—2021年10月)	
	强化阶段的练习题,综合训练必备。具有典型性、针对性、技巧性、综合性等特点,可以帮助同学们突破重点、难点,熟悉解题思路和方法,增强应试能力。	与《数学基础过关660题》互为补充,包含选择题、填空题和解答题。搭配《高等数学辅导讲义》《线性代数辅导讲义》《概率论与数理统计辅导讲义》使用,效果更佳。
《数学决胜冲刺6套卷》	冲刺模拟·有的放矢·高效提分(推荐使用时间:2021年11月—2021年12月)	
	通过整套题的训练,对所学知识进行系统总结和梳理。不同于重点题型的练习,需要全面的知识,要综合应用。必要时应复习基本概念、公式、定理,准确记忆。	在精研真题之后,用模拟卷练习,找漏洞,保持手感。不要掐时间、估分,遇到不会的题目,回归基础,翻看以前的学习笔记,把每道题吃透。
《数学临阵磨枪》	查漏补缺·问题清零·从容应战(推荐使用时间:考前20天)	
	本书是常用定理公式、基础知识的清单。最后阶段,大部分考生缺乏信心,感觉没复习完,本来会做的题目,因为紧张、压力,也容易出错。本书能帮助考生在考前查漏补缺,确保基础知识不丢分。	搭配《数学决胜冲刺6套卷》使用。上考场前,可以再次回忆、翻看本书。

前言

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

本书是为准备考研的同学复习高等数学(微积分)而编写的辅导讲义,由编者多年来在考研辅导班的讲稿改写而成。全书共分九章和一个附录,每章均由**考试内容要点精讲**、**常考题型的方法与技巧**,以及**高分提档严选题**三部分组成。此次特意将高分提档严选题单独成册,方便同学练习使用。

本书力求用不多的篇幅,在较短的时间内帮助同学理解基本概念,掌握基本理论、基本公式、重点及难点,澄清常犯错误与疑惑。同时,通过典型例题,在归纳题型的基础上帮助同学梳理解题思路,掌握常用解题方法和解题技巧。

为了考研同学使用方便,本书将数学一至数学三共同要求的内容编写在前面。其中,数学二只要求掌握前六章,数学三只要求掌握前七章,数学一要求全部掌握。希望本讲义能对考研同学有较大帮助。由于编者水平有限,疏漏和错误之处在所难免,欢迎批评指正。

祝同学们考研路上一路顺利!

编者

2021年2月

目 录

第一章 函数 极限 连续

第一节 函数 (2)

一、考试内容要点精讲 (2)

二、常考题型的方法与技巧 (5)

题型一 复合函数 (5)

题型二 函数性态 (6)

第二节 极限 (9)

一、考试内容要点精讲 (9)

二、常考题型的方法与技巧 (11)

题型一 极限的概念、性质及存在准则 (11)

题型二 求极限 (14)

题型三 确定极限式中的参数 (36)

题型四 无穷小量阶的比较 (38)

第三节 连续 (42)

一、考试内容要点精讲 (42)

二、常考题型的方法与技巧 (43)

题型一 讨论连续性 & 间断点类型 (43)

题型二 介值定理、最值定理及零点定理的证明题 (45)

第二章 一元函数微分学

第一节 导数与微分 (48)

一、考试内容要点精讲 (48)

二、常考题型的方法与技巧 (51)

题型一 导数与微分的概念 (51)

题型二 导数的几何意义 (57)

题型三 导数与微分的计算 (58)

第二节 导数应用 (64)

一、考试内容要点精讲 (64)

二、常考题型的方法与技巧 (67)

题型一 函数的单调性、极值与最值 (67)

题型二 曲线的凹向、拐点、渐近线及曲率 (70)

题型三 方程的根的存在性及个数 (72)

题型四 证明函数不等式 (76)

题型五 微分中值定理有关的证明题 (77)

第三章 一元函数积分学

第一节 不定积分 (86)

一、考试内容要点精讲 (86)

二、常考题型的方法与技巧 (89)

题型一 计算不定积分 (89)

题型二 不定积分杂例 (93)

第二节 定积分 (95)

一、考试内容要点精讲 (95)

二、常考题型的方法与技巧 (99)

题型一 定积分的概念、性质及几何意义	···	(99)
题型二 定积分计算	···	(101)
题型三 变上限积分函数及其应用	···	(105)
题型四 积分不等式	···	(111)
第三节 反常积分	···	(114)
一、考试内容要点精讲	···	(114)
二、常考题型的方法与技巧	···	(116)
题型一 反常积分的概念与敛散性	···	(116)
题型二 反常积分计算	···	(118)
第四节 定积分应用	···	(119)
一、考试内容要点精讲	···	(119)
二、常考题型的方法与技巧	···	(121)
题型一 几何应用	···	(121)
题型二 物理应用	···	(124)
第五节 导数在经济学中的应用 (数学一、二不要求)	···	(125)
一、考试内容要点精讲	···	(125)
二、常考题型的方法与技巧	···	(126)
第四章 常微分方程		
一、考试内容要点精讲	···	(130)
二、常考题型的方法与技巧	···	(134)
题型一 微分方程求解	···	(134)
题型二 综合题	···	(137)
题型三 应用题	···	(140)
第五章 多元函数微分学		
第一节 重极限、连续、偏导数、全微分	·	
(概念、理论)	···	(143)

一、考试内容要点精讲	···	(143)
二、常考题型的方法与技巧	···	(147)
题型一 讨论连续性、可导性、可微性	···	(147)
第二节 偏导数与全微分的计算	···	(151)
一、考试内容要点精讲	···	(151)
二、常考题型的方法与技巧	···	(152)
题型一 求一点处的偏导数与全微分	···	(152)
题型二 求已给出具体表达式函数的偏导数与全微分	···	(153)
题型三 含有抽象函数的复合函数偏导数与全微分	···	(155)
题型四 隐函数的偏导数与全微分	···	(159)
第三节 极值与最值	···	(163)
一、考试内容要点精讲	···	(163)
二、常考题型的方法与技巧	···	(164)
题型一 求无条件极值	···	(164)
题型二 求最大最小值	···	(167)
第六章 二重积分		
一、考试内容要点精讲	···	(172)
二、常考题型的方法与技巧	···	(175)
题型一 计算二重积分	···	(175)
题型二 累次积分交换次序及计算	···	(180)
题型三 与二重积分有关的综合题	···	(183)
题型四 与二重积分有关的积分不等式问题	···	(185)

第七章 无穷级数

第一节 常数项级数 (189)

一、考试内容要点精讲 (189)

二、常考题型的方法与技巧 (191)

题型一 正项级数敛散性的判定 (191)

题型二 交错级数敛散性判定 (193)

题型三 任意项级数敛散性判定 (194)

题型四 证明题与综合题 (198)

第二节 幂级数 (200)

一、考试内容要点精讲 (200)

二、常考题型的方法与技巧 (203)

题型一 求收敛区间及收敛域 (203)

题型二 将函数展开为幂级数 (205)

题型三 级数求和 (208)

第三节 傅里叶级数 (212)

一、考试内容要点精讲 (212)

二、常考题型的方法与技巧 (213)

题型一 有关收敛定理的问题 (213)

题型二 将函数展开为傅里叶级数 (215)

第八章 向量代数与空间解析几何及多元微分学在几何上的应用

第一节 向量代数 (217)

一、考试内容要点精讲 (217)

二、常考题型的方法与技巧 (218)

题型一 向量运算 (218)

题型二 向量运算的应用及向量的位置关系 (219)

第二节 空间平面与直线 (220)

一、考试内容要点精讲 (220)

二、常考题型的方法与技巧 (220)

题型一 建立直线方程 (220)

题型二 建立平面方程 (222)

题型三 与平面和直线位置关系有关的问题 (223)

第三节 曲面与空间曲线 (224)

一、考试内容要点精讲 (224)

二、常考题型的方法与技巧 (225)

题型一 建立柱面方程 (225)

题型二 建立旋转面方程 (226)

题型三 求空间曲线的投影曲线方程 (226)

第四节 多元微分在几何上的应用 (227)

一、考试内容要点精讲 (227)

二、常考题型的方法与技巧 (227)

题型一 建立曲面的切平面和法线方程 (227)

题型二 建立空间曲线的切线和法平面方程 (229)

第五节 方向导数与梯度 (230)

一、考试内容要点精讲 (230)

二、常考题型的方法与技巧 (230)

题型一 方向导数与梯度的计算 (230)

第九章 多元积分学及其应用

第一节 三重积分与线面积分 (233)

一、考试内容要点精讲 (233)

二、常考题型的方法与技巧 (239)

题型一 计算三重积分 (239)

题型二 更换三重积分次序	(241)
题型三 计算对弧长的线积分	(241)
题型四 计算对坐标的线积分	(243)
题型五 计算对面积的面积分	(249)
题型六 计算对坐标的面积分	(251)
第二节 多元积分应用	(254)
一、考试内容要点精讲	(254)
二、常考题型的方法与技巧	(254)
题型一 求几何量	(254)
题型二 计算物理量	(256)
第三节 场论初步	(258)
一、考试内容要点精讲	(258)

二、常考题型的方法与技巧	(258)
题型一 梯度、散度、旋度计算	(258)

附 录

2021 年考研数学——高等数学试题

数学一	(260)
数学二	(262)
数学三	(264)
数学一答案	(266)
数学二答案	(266)
数学三答案	(266)

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

第一章 函数 极限 连续

考试内容	考试要求		
	数一	数二	数三
函数的概念 复合函数及分段函数的概念 无穷小量的概念 函数连续性的概念(含左连续与右连续) 闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)	理解	理解	理解
函数的表示法 基本初等函数的性质及其图形 极限的四则运算法则 利用两个重要极限求极限的方法 无穷小量的比较方法	掌握	掌握	掌握
函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性 反函数及隐函数的概念 初等函数的概念 连续函数的性质和初等函数的连续性	了解	了解	了解
应用问题的函数关系	会建立	会建立	会建立
函数间断点的类型	会判别	会判别	会判别
闭区间上连续函数的性质	会应用	会应用	会应用
极限存在的两个准则求极限	会利用	会利用	了解
数列极限和函数极限的概念 函数左极限与右极限的概念 无穷大量的概念	理解	理解	理解
无穷大量与无穷小量的关系	理解	理解	理解
函数极限存在与左极限、右极限之间的关系	理解	理解	理解
极限的性质与极限存在的两个准则	掌握	掌握	了解
等价无穷小量求极限	会用	会用	会用
无穷小量的基本性质	理解	理解	理解



第一节 函数

一、考试内容要点精讲

(一) 函数的概念及常见函数

1. 函数概念

定义 设 x 和 y 是两个变量, D 是一个给定的数集. 如果对于每个数 $x \in D$, 变量 y 按照一定的法则总有一个确定的数值 y 和它对应, 则称 y 是 x 的**函数**, 记为

$$y = f(x), x \in D$$

其中 x 称为**自变量**, y 称为**因变量**, D 称为函数的**定义域**, 记作 D_f , 即 $D_f = D$.

函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的**值域**, 记作 R_f 或 $f(D)$, 即

$$R_f = f(D) = \{y | y = f(x), x \in D\}$$

【注】 函数概念有两个基本要素: 定义域、对应规则 (或称依赖关系). 当两个函数的定义域与对应规则完全相同时, 它们就是同一函数.

【例】 函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

称为**符号函数**.

【例】 设 x 为任意实数, 不超过 x 的最大整数称为 x 的**整数部分**, 记为 $[x]$. 函数 $y = [x]$ 称为**取整函数**.

【注】 取整函数的基本不等式: $x - 1 < [x] \leq x$.

2. 复合函数

定义 设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_f , 函数 $u = g(x)$ 的定义域为 D_g , 值域为 R_g , 若 $D_f \cap R_g \neq \emptyset$, 则称函数 $y = f(g(x))$ 为函数 $y = f(u)$ 与 $u = g(x)$ 的**复合函数**. 它的定义域为 $\{x | x \in D_g, g(x) \in D_f\}$.

【注】 不是任何两个函数都可以复合, 如 $y = f(u) = \ln u, u = g(x) = \sin x - 1$, 就不能复合, 这是由于 $D_f = (0, +\infty), R_g = [-2, 0], D_f \cap R_g = \emptyset$.

3. 反函数

定义 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 值域为 R_y . 若对任意 $y \in R_y$, 有唯一确定的 $x \in D$, 使得 $y = f(x)$, 则记为 $x = f^{-1}(y)$, 称其为函数 $y = f(x)$ 的**反函数**.

【注】 (1) 有时也将 $y = f(x)$ 的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 写成 $y = f^{-1}(x)$.

在同一直角坐标系中, $y = f(x)$ 和 $x = f^{-1}(y)$ 的图形重合, $y = f(x)$ 和 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称.



$$(2) f^{-1}(f(x)) = x, f(f^{-1}(x)) = x.$$

4. 初等函数

定义 将幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数统称为**基本初等函数**.

(1) 幂函数 $y = x^{\mu}$ (μ 为实数)

(2) 指数函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)

(3) 对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)

(4) 三角函数 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$

(5) 反三角函数 $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x$

定义 由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数,称为**初等函数**.

(二) 函数的性态

1. 单调性

定义 设函数 $y = f(x)$ 在某区间 I 上有定义,如果对于区间 I 上的任意两点 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时,恒有 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$), 则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上**单调增加** (或**单调减少**).

如果对于区间 I 上的任意两点 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时,恒有 $f(x_1) \leq f(x_2)$ (或 $f(x_1) \geq f(x_2)$), 则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上**单调不减** (或**单调不减**).

判定 (1) 利用定义;

(2) 利用导数.

设 $f(x)$ 在区间 I 上可导, 则

① $f'(x) > 0 (< 0) \Rightarrow f(x)$ 单调增 (单调减);

② $f'(x) \geq 0 (\leq 0) \Rightarrow f(x)$ 单调不减 (单调不减).

2. 奇偶性

定义 设函数 $y = f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称 (即若 $x \in D$, 则有一 $-x \in D$), 如果对于任一 $x \in D$, 恒有

$$f(-x) = f(x)$$

则称 $f(x)$ 为 D 上的**偶函数**; 如果恒有

$$f(-x) = -f(x)$$

则称 $f(x)$ 为 D 上的**奇函数**.

【注】 (1) $\sin x, \tan x, \arcsin x, \arctan x, \ln \frac{1-x}{1+x}, \ln(x + \sqrt{1+x^2}), \frac{e^x - 1}{e^x + 1}, f(x) - f(-x)$ 都是奇函数; $x^2, |x|, \cos x, f(x) + f(-x)$ 都是偶函数.

(2) 奇函数 $y = f(x)$ 的图形关于原点对称, 且若 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处有定义, 则 $f(0) = 0$; 偶函数的图形关于 y 轴对称.

判定 (1) 利用定义;

(2) 设 $f(x)$ 可导, 则

① $f(x)$ 是奇函数 $\Rightarrow f'(x)$ 是偶函数;



② $f(x)$ 是偶函数 $\Rightarrow f'(x)$ 是奇函数.

(3) 连续的奇函数其原函数都是偶函数;

连续的偶函数其原函数中有唯一一个是奇函数.

【注】 设 $f(x)$ 连续,

(1) 若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $\int_0^x f(t)dt$ 是偶函数;

(2) 若 $f(x)$ 是偶函数, 则 $\int_0^x f(t)dt$ 是奇函数.

笔记:

微信公众号【顶尖考研】

3. 周期性

定义 若存在实数 $T > 0$, 对于任意 x , 恒有 $f(x+T) = f(x)$, 则称 $y = f(x)$ 为周期函数. 使得上述关系式成立的最小正数 T 称为 $f(x)$ 的最小正周期, 简称为函数 $f(x)$ 的周期.

【注】 (1) $\sin x$ 和 $\cos x$ 以 2π 为周期, $\sin 2x$ 和 $|\sin x|$ 以 π 为周期.

(2) 若 $f(x)$ 以 T 为周期, 则 $f(ax+b)$ 以 $\frac{T}{|a|}$ ($a \neq 0$) 为周期.

判定 (1) 利用定义;

(2) 可导的周期函数其导函数为周期函数;

(3) 周期函数的原函数不一定是周期函数. (如 $1 + \cos x$)

【注】 (1) 设 $f(x)$ 连续且以 T 为周期, 则

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt \text{ 是以 } T \text{ 为周期的周期函数} \Leftrightarrow \int_0^T f(x)dx = 0.$$

(2) 周期函数的原函数是周期函数的充要条件是其在一个周期上的积分为零.

笔记:



4. 有界性

定义 若 $\exists M > 0, \forall x \in I, |f(x)| \leq M$, 则称 $f(x)$ 在 I 上有界.

【注】 $|\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1, |\arcsin x| \leq \frac{\pi}{2}, |\arctan x| < \frac{\pi}{2}, |\arccos x| \leq \pi$.

判定 (1) 利用定义;

(2) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续 $\Rightarrow f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界;

(3) $f(x)$ 在 (a, b) 上连续, 且 $f(a^+)$ 和 $f(b^-)$ 存在 $\Rightarrow f(x)$ 在 (a, b) 上有界;

(4) $f'(x)$ 在区间 I (有限) 上有界 $\Rightarrow f(x)$ 在 I 上有界.

【注】 (3) 中的区间 (a, b) 改为无穷区间 $(-\infty, b), (a, +\infty), (-\infty, +\infty)$ 结论仍成立.

笔记:

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

二、常考题型的方法与技巧

题型一 复合函数

【例 1】 已知 $f(x+1)$ 的定义域为 $[0, a] (a > 0)$, 则 $f(x)$ 的定义域为

(A) $[-1, a-1]$.

(B) $[1, a+1]$.

(C) $[a, a+1]$.

(D) $[a-1, a]$.

解 应选(B).

由 $f(x+1)$ 的定义域为 $[0, a]$ 知 $0 \leq x \leq a$, 则

$$1 \leq x+1 \leq a+1$$



故 $f(x)$ 的定义域为 $[1, a+1]$.

【例 2】 已知 $f(x) = e^{x^2}$, $f(\varphi(x)) = 1-x$, 且 $\varphi(x) \geq 0$, 求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

解 由 $f(x) = e^{x^2}$, $f(\varphi(x)) = 1-x$, 知

$$e^{\varphi^2(x)} = 1-x, \quad (x \leq 0)$$

$$\varphi^2(x) = \ln(1-x), \quad (x \leq 0)$$

$$\varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)}, \quad (x \leq 0)$$

【例 3】 设 $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 2-x^2, & |x| < 1 \\ |x|-2, & |x| \geq 1 \end{cases}$.

试求 $f(g(x))$, $g(f(x))$.

解 当 $|x| < 1$ 时, $g(x) = 2-x^2 > 0$, 则 $f(g(x)) = 1$;

当 $1 \leq |x| < 2$ 时, $g(x) = |x|-2 < 0$, 则 $f(g(x)) = 0$;

当 $|x| \geq 2$ 时, $g(x) = |x|-2 \geq 0$, 则 $f(g(x)) = 1$.

故
$$f(g(x)) = \begin{cases} 0, & 1 \leq |x| < 2 \\ 1, & |x| < 1 \text{ 或 } |x| \geq 2 \end{cases}$$

当 $x < 0$ 时, $f(x) = 0$, $|0| < 1$, 则 $g(f(x)) = 2-0^2 = 2$;

当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = 1$, $|1| = 1$, 则 $g(f(x)) = |1|-2 = -1$.

故
$$g(f(x)) = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ -1, & x \geq 0 \end{cases}$$

题型二 函数性质

【例 1】 已知函数 $f(x) = \frac{\int_0^x \ln(1+t^2) dt}{x^a}$ 在 $(0, +\infty)$ 上有界, 则 a 的取值范围应为

(A) $(0, +\infty)$. (B) $(0, 3]$. (C) $(0, 2)$. (D) $(1, 3]$.

分析 由于 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续, 所以, 只要 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 都存在, 则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上必有界.

解 由本题选项可知, 只需讨论 $a > 0$, 此时

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \ln(1+t^2) dt}{x^a} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x^2)}{ax^{a-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{ax^{a-1}}, (\ln(1+x^2) \sim x^2)$$

当 $a-1 \leq 2$, 即 $a \leq 3$ 时上式极限存在; 当 $a > 3$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \ln(1+t^2) dt}{x^a} = \infty$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上无界.

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \ln(1+t^2) dt}{x^a} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{ax^{a-1}}.$$

当 $\alpha - 1 > 0$ 时, 即 $\alpha > 1$ 时上式极限存在且为零;

当 $\alpha \leq 1$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \ln(1+t^2) dt}{x^\alpha} = \infty$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上无界.

因此, 当 $1 < \alpha \leq 3$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上必有界, 故应选(D).

【例 2】 以下四个命题中正确的是

- (A) 若 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内连续, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界.
 (B) 若 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内连续, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界.
 (C) 若 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界.
 (D) 若 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界, 则 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界.

解 (方法一) 直接法

由于 $f'(x)$ 在有限区间 $(0, 1)$ 内有界, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界, 故选(C).

(方法二) 排除法

令 $f(x) = \frac{1}{x}$, 则 $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, 显然 $f'(x)$ 和 $f(x)$ 都在 $(0, 1)$ 内连续, 但 $f(x)$ 在 $(0, 1)$

内无界, 则(A)(B) 都不正确.

令 $f(x) = \sqrt{x}$, 显然 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界, 但 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 在 $(0, 1)$ 内无界, 则(D) 不正确. 故应选(C).

【例 3】 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f'(0) > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 使得

- (A) $f(x)$ 在 $(0, \delta)$ 内单调增加.
 (B) $f(x)$ 在 $(0, \delta)$ 内单调减少.
 (C) 对任意的 $x \in (0, \delta)$ 有 $f(x) > f(0)$.
 (D) 对任意的 $x \in (-\delta, 0)$ 有 $f(x) > f(0)$.

解 本题要用到一个常用的结论: 若 $f'(x_0) > 0$, 则存在 $\delta > 0$,

当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时, $f(x) < f(x_0)$; 当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, $f(x) > f(x_0)$.

若 $f'(x_0) < 0$ 有相应的结论.

以上结论可利用导数定义和极限的保号性证明.

由以上结论知(C) 正确.

【注】 本题选(A) 是一种典型的错误, 原因是由 $f'(x_0) > 0$, 得不到一定存在 x_0 的某邻域, 在此邻域内 $f(x)$ 单调增. 反例如下:

$$\text{令 } f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

显然 $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 2x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = 1 > 0$, 但 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的任何邻域内不单调增.



事实上, 当 $x \neq 0$ 时, $f'(x) = 1 + 4x \sin \frac{1}{x} - 2 \cos \frac{1}{x}$.

取 $x_n = \frac{1}{2n\pi}$, 则 $f'(x_n) = 1 - 2 = -1 < 0$.

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, 故以上的点 x_n 在 $x = 0$ 的任何邻域内都存在, 即在 $x = 0$ 的任何邻域内都存在导数为负的点, 从而 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的任何邻域内都不单调增.

【例 4】 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且 $F(x) = \int_0^x (x-2t)f(t)dt$. 试证:

(1) 若 $f(x)$ 为偶函数, 则 $F(x)$ 也是偶函数;

(2) 若 $f(x)$ 单调不减, 则 $F(x)$ 单调不减.

证明 (1) **(方法一)** 由题设知 $F(-x) = \int_0^{-x} (-x-2t)f(t)dt$.

令 $t = -u$, 并由于 $f(-x) = f(x)$, 所以

$$F(-x) = - \int_0^x (-x+2u)f(-u)du = \int_0^x (x-2u)f(u)du = F(x)$$

即 $F(x)$ 为偶函数.

(方法二) $F(x) = \int_0^x (x-2t)f(t)dt = x \int_0^x f(t)dt - 2 \int_0^x tf(t)dt$

由于 $f(x)$ 为偶函数, 则 $x \int_0^x f(t)dt$, $\int_0^x tf(t)dt$ 都是偶函数, 故 $F(x)$ 为偶函数.

$$\begin{aligned} (2) F'(x) &= \left[x \int_0^x f(t)dt - 2 \int_0^x tf(t)dt \right]' = \int_0^x f(t)dt + xf(x) - 2xf(x) \\ &= \int_0^x f(t)dt - xf(x) = x[f(\xi) - f(x)], \xi \text{ 在 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间 (积分中值定理)}. \end{aligned}$$

因 $f(x)$ 单调不减, 故当 $x > 0$ 时, $0 \leq \xi \leq x$, 于是 $f(\xi) - f(x) \geq 0$, 从而 $F'(x) \geq 0$. 当 $x < 0$ 时, $x \leq \xi \leq 0$, 于是 $f(\xi) - f(x) \leq 0$, 从而 $F'(x) \geq 0$. 又 $F'(0) = 0$, 综上所述可知 $F(x)$ 为单调不减.

笔记:

第二节 极限

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

一、考试内容要点精讲

(一) 极限的概念

1. 数列极限

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a: \forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) > 0$, 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \epsilon$.

【注】(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 的几何意义: 对于 a 点的任何 ϵ 邻域即开区间 $(a - \epsilon, a + \epsilon)$, 一定存在 N , 当 $n > N$ 即第 N 项以后的点 x_n 都落在开区间 $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ 内, 而只有有限个(最多有 N 个)在这区间之外.

(2) 数列 $\{x_n\}$ 的极限是否存在, 如果存在极限值等于多少与数列的前有限项无关.

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = a$.

2. 函数极限

1) 自变量趋于无穷大时函数的极限

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A: \forall \epsilon > 0, \exists X(\epsilon) > 0$, 当 $x > X$ 时, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A: \forall \epsilon > 0, \exists X(\epsilon) > 0$, 当 $x < -X$ 时, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A: \forall \epsilon > 0, \exists X(\epsilon) > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$.

【注】在函数极限中 $x \rightarrow \infty$ 是指 $|x| \rightarrow +\infty$, 而在数列极限中, $n \rightarrow \infty$ 是指 $n \rightarrow +\infty$.

定理 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$.

2) 自变量趋于有限值时函数的极限

(1) 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A: \forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$.

【注】函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限是否存在, 如果存在极限值等于多少仅与 $f(x)$ 在 x_0 点的去心邻域 $\dot{U}(x_0, \delta)$ 内的函数值有关, 而与 $f(x)$ 在 x_0 是否有定义, 如果有定义函数值等于多少无关.

(2) 左极限: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0^-)$;

(3) 右极限: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0^+)$.

定理 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$.

【注】需要分左、右极限求极限的问题主要有三种:

(1) 分段函数在分界点处的极限, 而在该分界点两侧函数表达式不同

(这里也包括带有绝对值的函数, 如 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$);

(2) e^∞ 型极限 (如 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}, \lim_{x \rightarrow \infty} x, \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-x}$).



$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}$ 不存在;

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x$ 不存在.

$e^\infty \neq \infty, e^{+\infty} = +\infty, e^{-\infty} = 0$.

(3) $\arctan \infty$ 型极限 (如 $\lim_{x \rightarrow 0} \arctan \frac{1}{x}, \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$).

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}, \lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \arctan \frac{1}{x}$ 不存在;

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$ 不存在.

$\arctan \infty \neq \frac{\pi}{2}, \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}, \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$.

(二) 极限的性质

1. 局部有界性

若极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 在点 x_0 某去心邻域内有界.

2. 保号性

设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则

(1) 若 $A > 0$ (或 $A < 0$) $\Rightarrow \exists \delta > 0$, 当 $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$ 时, $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$).

(2) 若 $\exists \delta > 0$, 当 $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$ 时, $f(x) \geq 0$ (或 $f(x) \leq 0$) $\Rightarrow A \geq 0$ (或 $A \leq 0$).

【注】由保号性不难得到保序性: 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 则

(1) 若 $A > B \Rightarrow \exists \delta > 0$, 当 $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$ 时, $f(x) > g(x)$.

(2) 若 $\exists \delta > 0$, 当 $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$ 时, $f(x) \geq g(x) \Rightarrow A \geq B$.

3. 极限值与无穷小之间的关系

$\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, 其中 $\lim \alpha(x) = 0$.

【注】数列极限有对应的以上三条性质.

(三) 极限存在准则

1. 夹逼准则

若存在 N , 当 $n > N$ 时, $x_n \leq y_n \leq z_n$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$.

2. 单调有界准则

单调有界数列必有极限. 即单调增、有上界的数列必有极限, 单调减、有下界的数列必有极限.

【注】函数极限有对应的以上两条准则.

(四) 无穷小

1. 无穷小的概念

若 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的极限为零, 则称 $f(x)$ 为 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷小.



2. 无穷小的比较

设 $\lim \alpha(x) = 0, \lim \beta(x) = 0$.

(1) 高阶: 若 $\lim \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$, 记为 $\beta(x) = o(\alpha(x))$;

(2) 同阶: 若 $\lim \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = C \neq 0$;

(3) 等价: 若 $\lim \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1$, 记为 $\alpha(x) \sim \beta(x)$;

(4) 无穷小的阶: 若 $\lim \frac{\beta(x)}{[\alpha(x)]^k} = C \neq 0$, 称 $\beta(x)$ 是 $\alpha(x)$ 的 k 阶无穷小.

3. 无穷小的性质

(1) 有限个无穷小的和仍是无穷小;

(2) 有限个无穷小的积仍是无穷小;

(3) 无穷小量与有界量的积仍是无穷小.

【注】以上前两条中的“有限”二字不可少.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

(五) 无穷大

1. 无穷大的概念

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ (或 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$), 则称 $f(x)$ 为 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷大.

2. 常用的一些无穷大的比较

(1) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\ln^a x \ll x^\beta \ll a^x$ (其中 $\alpha > 0, \beta > 0, a > 1$).

(2) 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\ln^n n \ll n^\beta \ll a^n \ll n! \ll n^n$ (其中 $\alpha > 0, \beta > 0, a > 1$).

3. 无穷大与无界变量的关系 无穷大 $\Rightarrow$ 无界变量

数列 $\{x_n\}$ 是无穷大量: $\forall M > 0, \exists N$, 当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n| > M$.

数列 $\{x_n\}$ 是无界变量: $\forall M > 0, \exists N$, 使 $|x_N| > M$.

无穷大量一定是无界变量; 但无界变量不一定是无穷大量.

例如: 数列 $x_n = \begin{cases} n, & n \text{ 为奇数} \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$ 是无界变量, 但不是无穷大.

4. 无穷大与无穷小的关系

在自变量的同一变化过程中, 若 $f(x)$ 是无穷大, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷小; 若 $f(x)$ 是无穷小,

且 $f(x) \neq 0$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷大.

二、常考题型的方法与技巧

题型一 极限的概念、性质及存在准则

【例 1】设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 且 $a \neq 0$, 则当 n 充分大时有



$$(A) |a_n| > \frac{|a|}{2}, \quad (B) |a_n| < \frac{|a|}{2}, \quad (C) a_n > a - \frac{1}{n}, \quad (D) a_n < a + \frac{1}{n}.$$

解 直接法

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 且 $a \neq 0$ 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a| > \frac{|a|}{2}$, 则当 n 充分大时有

$$|a_n| > \frac{|a|}{2}$$

故应选(A).

排除法

若取 $a_n = 2 + \frac{2}{n}$, 显然 $a = 2$, 则(B) 和(D) 都不正确;

若取 $a_n = 2 - \frac{2}{n}$, 显然 $a = 2$, 则(C) 不正确.

故应选(A).

【注】 本题直接法中用到一个基本结论

(1) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$, 但反之不成立;

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 的充分必要条件是 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$.

【例 2】 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为非负数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, 则必有

(A) $a_n < b_n$ 对任意 n 成立.

(B) $b_n < c_n$ 对任意 n 成立.

(C) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 不存在.

(D) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在.

解 直接法

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n = \infty$.

故选(D).

排除法

由题设条件可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n < \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$, 但这只能得到, 存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时, 有 $a_n < b_n < c_n$, 而不能得到对任意的 n 有 $a_n < b_n < c_n$. 从而(A)(B) 均不正确.

事实上取 $a_n = \frac{100}{n}, b_n = \frac{n+10}{n+1}, c_n = n$, 显然符合题设条件, 但(A)(B) 选项的结论都不成立.

若取 $a_n = \frac{1}{n^2}, c_n = n$, 显然 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = 0$, 从而(C) 不正确.

故应选(D).

【例 3】 设对任意的 x 总有 $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

(A) 存在且等于零.

(B) 存在但不一定为零.

(C) 一定不存在.

(D) 不一定存在.

解 (1) 令 $\varphi(x) = 1 - \frac{1}{x^2}, g(x) = 1 + \frac{1}{x^2}, f(x) = 1$, 显然 $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$, 且



$\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$, 此时 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$, 则(A) 和(C) 不正确.

(2) 令 $\varphi(x) = x - \frac{1}{x^2}$, $f(x) = x$, $g(x) = x + \frac{1}{x^2}$, 则 $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$, 且

$\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$, 但 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ (不存在). 从而(B) 不正确.

故应选(D).

【注】 不难看出, 本题就是在极限的夹逼准则的基础上改造出来的. 以上是通过举反例用排除法. 事实上, 这里的反例可以更简单.

在(1) 中令 $\varphi(x) = f(x) = g(x) = 1$; 在(2) 中令 $\varphi(x) = f(x) = g(x) = x$.

【例 4】 设数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 则下列命题正确的是

(A) 若 x_n 发散, 则 y_n 必发散.

(B) 若 x_n 无界, 则 y_n 必有界.

(C) 若 x_n 有界, 则 y_n 必为无穷小.

(D) 若 $\frac{1}{x_n}$ 为无穷小, 则 y_n 必为无穷小.

解 直接法

由于 $y_n = (x_n y_n) \cdot \frac{1}{x_n}$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0 \cdot 0 = 0$$

故应选(D).

排除法

若取 $x_n = n$, $y_n = \frac{1}{n^2}$, 显然(A) 不正确.

若取 $x_n = \begin{cases} n, & n \text{ 为偶数} \\ 0, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$, $y_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数} \\ n, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 且 x_n 无界, 但 y_n 也无界, 故(B) 不正确.

若取 $x_n = \frac{1}{n^2}$, $y_n = n$, 显然(C) 不正确.

故应选(D).

【例 5】 设 $a_n > 0 (n = 1, 2, \dots)$, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, 则数列 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的

(A) 充分必要条件.

(B) 充分非必要条件.

(C) 必要非充分条件.

(D) 既非充分也非必要条件.

解 显然数列 $\{S_n\}$ 单调增, 若 $\{S_n\}$ 有界, 则 $\{S_n\}$ 收敛, 又

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

故数列 $\{a_n\}$ 收敛.

但当数列 $\{a_n\}$ 收敛时, 数列 $\{S_n\}$ 未必有界, 如 $a_n = 1$, 此时 $S_n = n$ 无界.

故应选(B).



【例 6】(1) 证明: 对任意的正整数 n , 都有 $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ 成立.

(2) 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n (n = 1, 2, \cdots)$, 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

证明 (1) 根据拉格朗日中值定理, 存在 $\xi \in (n, n+1)$, 使得

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{\xi}$$

所以 $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\xi} < \frac{1}{n}$.

(2) 当 $n \geq 1$ 时, 由(1)知

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0$$

$$\begin{aligned} \text{且 } a_n &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n > \ln(1+1) + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln n \\ &= \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \cdots + \ln \frac{n+1}{n} - \ln n = \ln\left(2 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{n+1}{n}\right) - \ln n \\ &= \ln(1+n) - \ln n > 0, \end{aligned}$$

所以数列 $\{a_n\}$ 单调下降且有下界, 故 $\{a_n\}$ 收敛.

题型二 求极限

(一) 求极限的常用方法

方法 1 利用有理运算法则求极限

若 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$, 则

$$\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B;$$

$$\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B;$$

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0).$$

推论: (1) 若 $\lim f(x) = A \neq 0$, 则

$$\lim f(x)g(x) = A \lim g(x);$$

$$\lim \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{A} \lim g(x).$$

(即: 极限非零的因子的极限可先求出来)

(2) 若 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在, 且 $\lim g(x) = 0$, 则 $\lim f(x) = 0$;

(3) 若 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0$, 且 $\lim f(x) = 0$, 则 $\lim g(x) = 0$.

【注】若 $\lim f(x)$ 存在, $\lim g(x)$ 不存在, 则 $\lim[f(x) \pm g(x)]$ 一定不存在;

若 $\lim f(x)$ 和 $\lim g(x)$ 都不存在, 则 $\lim[f(x) \pm g(x)]$ 不一定存在.



方法2 利用基本极限求极限

常用的基本极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (a > 0); \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m}, & n = m \\ 0, & n < m \\ \infty, & n > m \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0, & |x| < 1 \\ \infty, & |x| > 1 \\ 1, & x = 1 \\ \text{不存在}, & x = -1 \end{cases}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^x = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ +\infty, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

方法3 利用等价无穷小代换求极限

1. 常用等价无穷小

当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$(1) x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1,$$

$$(1+x)^a - 1 \sim ax, \quad 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \quad a^x - 1 \sim x \ln a.$$

$$(2) x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}, \quad \arcsin x - x \sim \frac{x^3}{6}, \quad x - \ln(1+x) \sim \frac{x^2}{2},$$

$$\tan x - x \sim \frac{x^3}{3}, \quad x - \arctan x \sim \frac{x^3}{3}.$$

【注】① 这五个等价无穷小中前3个要记住,后两个可由前两个推得.

事实上由 $x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}$ 得, $\arcsin(\sin x) - \sin x \sim \frac{x^3}{6} \sim \frac{\sin^3 x}{6}$, 从而有 $\arcsin x - x \sim \frac{x^3}{6}$; 同理可由 $\tan x - x \sim \frac{x^3}{3}$ 推得 $x - \arctan x \sim \frac{x^3}{3}$.

② 由这几个等价无穷小及等价无穷小的性质(若 $\alpha \sim \beta$, 则 $\alpha = \beta + o(\beta)$) 可得到几个泰勒公式.

事实上由 $\tan x - x \sim \frac{x^3}{3}$ 得, $\tan x - x = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, 即

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

同理可得

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

(3) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, 则



$$\int_0^x f(t) dt \sim \int_0^x g(t) dt$$

【注】例如当 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln(1+x^2) \sim x^2$, 则 $\int_0^x \ln(1+t^2) dt \sim \int_0^x t^2 dt = \frac{1}{3}x^3$.

2. 等价无穷小代换的原则

1) 乘、除关系可以换

若 $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$, 则 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \lim \frac{\alpha}{\beta_1} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta}$.

2) 加、减关系在一定条件下可以换

(1) 若 $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$, 且 $\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = A \neq 1$, 则 $\alpha - \beta \sim \alpha_1 - \beta_1$.

(2) 若 $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$, 且 $\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = A \neq -1$, 则 $\alpha + \beta \sim \alpha_1 + \beta_1$.

【例】求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$.

解 (方法一) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x(1 - \cos x)}{x^3}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{1}{2}x^2}{x^3}$$

(等价代换)

$$= \frac{1}{2}.$$

(方法二) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan x - x) - (\sin x - x)}{x^3}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\frac{1}{3}x^3) - (-\frac{1}{6}x^3)}{x^3}$$

(等价代换)

$$= \frac{1}{2}.$$

方法4 利用洛必达法则求极限

若 (1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0(\infty)$;

(2) $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内可导, 且 $g'(x) \neq 0$;

(3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或 ∞),

则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

【注】洛必达法则可用来求 7 种类型不定式的极限, 即 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, \infty^0, 0^0$,

其中前两种 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ 直接用洛必达法则, 后五种均可化为前两种.

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty} \leftarrow \begin{cases} 0 \cdot \infty \leftarrow \begin{cases} 1^\infty \\ \infty^0 \\ 0^0 \end{cases} \\ \infty - \infty \end{cases}$$



【例】求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \cos(x-1)}{1 - \sin \frac{\pi}{2}x}$.

解 原式 = $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\tan(x-1)}{-\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2}x}$

$$= \frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\cos \frac{\pi}{2}x}$$

$$= \frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{-\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2}x} = -\frac{4}{\pi^2}.$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

(洛必达法则)

(等价无穷小代换)

【例】求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$.

解

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{1}$$

(洛必达法则)

$$= 0$$

则

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

方法 5 利用泰勒公式求极限

定理 (带 Peano 余项的泰勒公式) 设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处 n 阶可导, 则

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

特别是当 $x_0 = 0$ 时,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

几个常用的泰勒公式

$$(1) e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

$$(2) \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1}).$$

$$(3) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}).$$

$$(4) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

$$(5) (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

【例】求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + 1 - \sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^x) \sin^2 x}$.

解

$$\text{由于 } \sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\frac{x^4}{2!} + o(x^4),$$



$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2),$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2),$$

代入所求极限式得

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{8}x^4 + o(x^4)}{\left[-\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)\right]x^2} = -\frac{1}{12}.$$

方法6 利用夹逼准则求极限

【例】求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \right)$.

$$\text{解} \quad \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n} \leq \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \right) \leq \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{则} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{【注】} \quad 1+2+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

方法7 利用定积分的定义求极限

【例】求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right)$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}} \right) \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2 \end{aligned}$$

【注】由定积分定义可知,若将区间 $[0,1]$ n 等分,第 k 个子区间上的 ξ_k 取该子区间右端点,此时 $\Delta x_k = \frac{1}{n}, \xi_k = \frac{k}{n}$,则

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

上式右端是一种常见的积分和式的极限.所以,用定积分定义求极限一般方法是:先提“可爱因子” $\frac{1}{n}$,然后再确定被积函数和积分区间.



方法8 利用单调有界准则求极限

【例】 设 $x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{1}{x_n} \right), n = 1, 2, \dots$. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

解 由题设知 $x_n > 0$, 且

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{1}{x_n} \right) = \frac{1}{2} \left[(\sqrt{x_n})^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{x_n}} \right)^2 \right] \geq \frac{1}{2} \times 2 \sqrt{x_n} \times \frac{1}{\sqrt{x_n}} = 1$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{x_n^2} \right) \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{1} \right) = 1$$

则数列 $\{x_n\}$ 单调减且有下界, 故极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 由极限保号性知 $a \geq 1$.

对等式 $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{1}{x_n} \right)$ 两端取极限, 得 $a = \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right)$, 又 $a \geq 1$, 由此解得 $a = 1$.

(二) 求极限常见题型

函数的极限

求函数的极限, 常见的是7种不定式, 即 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, \infty^0, 0^0$. 这里考查的重点是“ $\frac{0}{0}$ ”型和“ 1^∞ ”型.

1. “ $\frac{0}{0}$ ”型极限

常用的方法有三种

- (1) 洛必达法则;
- (2) 等价无穷小代换;
- (3) 泰勒公式.

以上三种方法使用的同时要注意将原式化简, 常用的方法有极限非零的因子极限先求出来、有理化及变量代换等.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

【例1】 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x \ln(1+x) - x^2}$.

解 (方法一) 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\tan x - \sin x}{x [\ln(1+x) - x]} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x}} \right\}$ (有理化)

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x (1 - \cos x)}{x [\ln(1+x) - x]} \quad (\text{先求极限非零因子的极限})$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \times \frac{1}{2} x^2}{x (-\frac{1}{2} x^2)} \quad (\text{等价代换})$$

$$= -\frac{1}{2}.$$

(方法二) 由拉格朗日中值定理得

原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+\xi}} (\tan x - \sin x)}{x [\ln(1+x) - x]} \quad (\xi \text{ 在 } \tan x \text{ 与 } \sin x \text{ 之间})$



$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x [\ln(1+x) - x]}.$$

以下同方法一.

【例 2】 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^{2-2\cos x}}{x^4}.$

解 (方法一)
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^{2-2\cos x}}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2-2\cos x} (e^{x^2-2+2\cos x} - 1)}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2 + 2\cos x}{x^4} \quad (\text{先求极限非零因子的极限, 等价代换}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2 + 2 \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \right]}{x^4} \quad (\text{泰勒公式}) \\ &= \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

(方法二) 由拉格朗日中值定理得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^{2-2\cos x}}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\xi} (x^2 - 2 + 2\cos x)}{x^4} \quad (\xi \text{ 在 } x^2 \text{ 与 } 2 - 2\cos x \text{ 之间}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2 + 2\cos x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 2\sin x}{4x^3} \quad (\text{洛必达法则}) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^3}{x^3} \quad (x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3) \\ &= \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

【注】 本题的两种方法中方法二更简单, 这里主要用了拉格朗日中值定理, 类似的可求下列极限

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - x};$ (1)
- (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (a^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x+1}}) (a > 0);$ ($\ln a$)
- (3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}];$ (0)
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} [\cos \sqrt{n+1} - \cos \sqrt{n}];$ (0)
- (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\arctan \frac{a}{n} - \arctan \frac{a}{n+1} \right) (a > 0);$ (a)
- (6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 [\arctan(x+1) - \arctan x];$ (1)
- (7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos(\sin x)}{x^4}.$ ($-\frac{1}{6}$)

【例 3】 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - \sin x}{\arctan x - \tan x}.$

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\arcsin x - x) - (\sin x - x)}{(\arctan x - x) - (\tan x - x)}$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{6}x^3\right) - \left(-\frac{1}{6}x^3\right)}{\left(-\frac{1}{3}x^3\right) - \left(\frac{1}{3}x^3\right)} \quad (\text{等价代换}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3}{-\frac{2}{3}x^3} = -\frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

【注】 本题主要用了等价无穷小代换,类似的可求下列极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x^3}; \quad \left(-\frac{1}{6}\right)$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - \arctan x}{\sin x - \tan x}. \quad (-1)$$

微信公众号:顶尖考研
(ID: djky66)

【例 4】 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x \ln(1+t^2) dt}{x^2 - \sin^2 x}$.

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \times \frac{1}{3}x^3}{(x + \sin x)(x - \sin x)} \quad \left(\int_0^x \ln(1+t^2) dt \sim \int_0^x t^2 dt = \frac{1}{3}x^3\right)$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \times \frac{1}{3}x^3}{2x \times \frac{1}{6}x^3} \quad (x + \sin x \sim 2x; x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3)$

$= 1.$

【例 5】 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - \sin x}{(1+x)^x - 1}$.

【分析】 本题是一个 $\frac{0}{0}$ 型极限,由于分母中出现幂指函数,直接用洛必达法则不方便,则先改写分母中的幂指函数为指数函数,然后用等价代换.

$$(1+x)^x - 1 = e^{x \ln(1+x)} - 1 \sim x \ln(1+x) \sim x^2$$

解 (方法一) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - \sin x}{(1+x)^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - \sin x}{x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + xe^x - \cos x}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x + xe^x + \sin x}{2} = 1.$$

(方法二) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - \sin x}{(1+x)^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - \sin x}{x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - x + x - \sin x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - 1)}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2} = 1.$$



【注】 当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1+x)^a - 1 \sim ax$, 这个结论推广可得, 若 $\alpha(x) \rightarrow 0, \alpha(x)\beta(x) \rightarrow 0$, 则

$$(1+\alpha(x))^{\beta(x)} - 1 \sim \alpha(x)\beta(x)$$

由此可得 $(1+x)^x - 1 \sim x^2$.

类似的可求下列极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left[\left(\frac{2+\cos x}{3} \right)^x - 1 \right]; \quad \left(-\frac{1}{6} \right)$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3+x)^{\sin x} - 3^{\sin x}}{x^2}. \quad \left(\frac{1}{3} \right)$$

【例 6】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2 [x + \ln(1-x)]}.$

解 (方法一) $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4),$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2^2 2!} + o(x^4).$$

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)}{x^2 \left[-\frac{x^2}{2} + o(x^2) \right]} = \frac{1}{6}.$$

(方法二) 由于 $x + \ln(1-x) = \ln(1-x) - (-x) \sim -\frac{x^2}{2}$, 则

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{-\frac{1}{2}x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + xe^{-\frac{x^2}{2}}}{-2x^3} \quad (\text{洛必达法则})$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^{-\frac{x^2}{2}} - 1)}{x^3} \right]$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^3}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left(-\frac{x^2}{2} \right)}{x^3} \right]$$

$$= \frac{1}{6}$$

2. “ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型极限

常用的方法有两种

(1) 洛必达法则;

(2) 分子分母同除以分子和分母各项中最高阶的无穷大.

【例 1】 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (1+t^2)e^{t^2} dt}{xe^{x^2} + x^2}$.

④ 原式 = $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2} + x^2 e^{x^2}}{e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2} + 2x}$ (洛必达法则)

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2} + 1}{\frac{1}{x^2} + 2 + \frac{2}{xe^{x^2}}}$$

(分子分母同除以 $x^2 e^{x^2}$)

$$= \frac{1}{2}.$$

【例 2】 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + x^{100}}{2e^x + \ln^{10} x}$.

④ 原式 = $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{2}{e}\right)^x + \frac{x^{100}}{e^x}}{2 + \frac{\ln^{10} x}{e^x}}$ (分子分母同除以 e^x)

$$= 0.$$

【例 3】 求极限 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1} + x + 1}{\sqrt{x^2 + \sin x}}$.

④ (方法一) 原式 = $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - 1} - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{\sin x}{x^2}}}$ (分子分母同除以 $-x$)

$$= 1.$$

(方法二) 原式 = $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1}}{\sqrt{x^2 + \sin x}} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + \sin x}} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + \sin x}}$ (拆项)

$$= 2 - 1 + 0 = 1.$$

3. “ $\infty - \infty$ ”型极限

常用的方法有

- (1) 通分化为 $\frac{0}{0}$ (适用于分式差);
- (2) 根式有理化 (适用于根式差);
- (3) 提无穷因子, 然后等价代换或变量代换、泰勒公式.

【例 1】 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \cot^2 x \right)$.

④ 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x - x^2}{x^2 \tan^2 x}$ (通分化为 $\frac{0}{0}$)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x + x}{x} \cdot \frac{\tan x - x}{x^3} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3}{x^3} = \frac{2}{3}.$$



【注】 类似的可求下列极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{x^2} \right]; \quad \left(\frac{4}{3} \right)$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(1 + \tan^2 x)} - \frac{1}{\ln(1 + x^2)} \right]. \quad \left(-\frac{2}{3} \right)$$

【例 2】 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x})$.

④ (方法一) 原式 = $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}}$ (有理化)

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}}} + 1} \quad (\text{分子分母同除}\sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{2}.$$

(方法二) 原式 = $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}}} - 1 \right)$ (提出 $\sqrt{x}$)

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \times \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}} \quad (\text{等价代换})$$

$$= \frac{1}{2}.$$

【例 3】 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$.

④ (方法一) 令 $x = \frac{1}{t}$, 则

$$\text{原式} = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \ln(1 + t) \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \ln(1 + t)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}t^2}{t^2} = \frac{1}{2}.$$

(方法二) 由 $\ln(1 + x)$ 的泰勒公式得 $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, 则

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} - x^2 \cdot o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right] = \frac{1}{2}.$$

(方法三) 原式 = $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left[\frac{1}{x} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right]$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} \right) \quad (\text{等价无穷小代换})$$

$$= \frac{1}{2}.$$

【注】显然,以上三种方法中方法三最简单,类似的可求下列极限

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n - n^2 \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right]; \quad \left(\frac{1}{2} \right)$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x^2}}. \quad (e^{\frac{1}{2}})$$

【例 4】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x} - \frac{x}{e} \right).$

④ (方法一) 原式 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x} - \frac{x}{e} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x[e - \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x]}{e \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x}$

$$= \frac{1}{e^2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e - \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x}{\frac{1}{x}} \quad (\text{令 } \frac{1}{x} = t)$$

$$= -\frac{1}{e^2} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(1+t)^{\frac{1}{t}} - e}{t} = -\frac{1}{e^2} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{\ln(1+t)}{t}} - e}{t} = -\frac{1}{e} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{\ln(1+t)-t}{t}} - 1}{t}$$

$$= -\frac{1}{e} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+t) - t}{t^2} \quad (e^{\frac{\ln(1+t)-t}{t}} - 1 \sim \frac{\ln(1+t) - t}{t})$$

$$= -\frac{1}{e} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{2}t^2}{t^2} = \frac{1}{2e}.$$

(方法二) 原式 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x} - \frac{x}{e} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x[e - \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x]}{e \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x}$

$$= \frac{1}{e^2} \lim_{x \rightarrow +\infty} x[e - e^{x \ln(1+\frac{1}{x})}]$$

$$= \frac{1}{e^2} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x x \left[1 - x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] \quad (\text{拉格朗日定理})$$

$$= \frac{1}{e} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[\frac{1}{x} - \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{e} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} \right)^2 \right] = \frac{1}{2e}.$$

4. “ $0 \cdot \infty$ ”型极限

常用的方法是化为“ $\frac{0}{0}$ ”型或“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型

【例】求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} x \ln |1-x|$.

④ $\ln x = \ln[1 + (x-1)] \sim x-1,$

$$\lim_{x \rightarrow 1} x \ln |1-x| = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \ln |1-x| = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln |1-x|}{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{1-x}}{\frac{1}{(x-1)^2}} = 0.$$



【注】 类似的可求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot \ln(1-x).$$

(0)

5. “ 1^∞ ”型极限

常用的方法有三种

(1) 凑基本极限 $\lim [1 + \varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}} = e$, 其中 $\lim \varphi(x) = 0 (\varphi(x) \neq 0)$;(2) 改写成指数 $\lim [f(x)]^{g(x)} = \lim e^{g(x) \ln f(x)}$, 用洛必达法则;(3) 利用结论: 若 $\lim \alpha(x) = 0, \lim \beta(x) = \infty$, 且 $\lim \alpha(x)\beta(x) = A$, 则

$$\lim [1 + \alpha(x)]^{\beta(x)} = e^A$$

以上三种方法往往第三种方法简单, 将其归纳为三步曲

第一步: 写标准型 原式 = $\lim (1 + \alpha)^\beta$;第二步: 求极限 $\lim \alpha\beta = A$;第三步: 写结果 原式 = e^A .**【例 1】** 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$.**解** (方法一) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \{ [1 + (\cos \sqrt{x} - 1)]^{\frac{1}{\cos \sqrt{x} - 1}} \}^{\frac{\cos \sqrt{x} - 1}{x}}$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos \sqrt{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2}{x} = -\frac{1}{2},$$

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

(方法二) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln \cos \sqrt{x}}{x}}$,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \cos \sqrt{x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{-\sin \sqrt{x}}{\cos \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

(方法三) 由于 $(\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}} = [1 + (\cos \sqrt{x} - 1)]^{\frac{1}{x}}$, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos \sqrt{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2}{x} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

【注】 以上三种方法中方法三最简单.

【例 2】求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

解 由于 $\left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}} = \left(1 + \frac{\arcsin x - x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$, 且

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - x}{x(1 - \cos x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^3}{\frac{1}{2}x^3} & (\arcsin x - x \sim \frac{1}{6}x^3, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2) \\ &= \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

则原式 $= e^{\frac{1}{3}}$.

【例 3】极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right)^x =$

(A) 1.

(B) e.

(C) e^{a-b} .

(D) e^{b-a} .

解 (方法一) 直接法

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-a} \right)^x \left(\frac{x}{x+b} \right)^x \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a}{x} \right)^{-x} \left(1 + \frac{b}{x} \right)^{-x} \\ &= e^a \cdot e^{-b} = e^{a-b} \end{aligned}$$

故应选(C).

(方法二) 排除法

取 $a = 0$, 则

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+b} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-b}{x+b} \right)^x = e^{-b}$$

选项(A)(B)(D) 都不正确, 故应选(C).

【例 4】求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x)^{\frac{1}{x^4}}$.

解 (方法一) (标准答案) 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x)^{\frac{1}{x^4}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 2x + 2x \sin x)}{x^4}}$, 且

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 2x + 2x \sin x)}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 2x + 2x \sin x} \cdot \frac{-2 \sin 2x + 2 \sin x + 2x \cos x}{4x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cos 2x + 2 \cos x - x \sin x}{6x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin 2x - 3 \sin x - x \cos x}{12x} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x)^{\frac{1}{x^4}} = e^{\frac{1}{3}}$.

(方法二) 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} [1 - 2 \sin^2 x + 2x \sin x]^{\frac{1}{x^4}}$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 x + 2x \sin x}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x (x - \sin x)}{x^4} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \frac{x^3}{6}}{x^4} \quad (\text{等价无穷小代换}) \\
 &= \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

原式 = $e^{\frac{1}{3}}$.

【注】 类似的可以求下列极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{1}{x} \right)^{x^2}; \quad (e^{-\frac{1}{2}})$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \tan x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{x^3}}; \quad (e^{\frac{1}{2}})$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x. \quad (e^2)$$

6. “ ∞^0 ”和“ 0^0 ”型极限

这两种极限的函数一定是幂指函数, 即 $\lim [f(x)]^{g(x)}$. 求解的方法是将其改写成指数形式 $\lim [f(x)]^{g(x)} = \lim e^{g(x) \ln f(x)}$, 从而就化为“ $0 \cdot \infty$ ”型极限.

【例】 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{(x^x-1)}$.

解 由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x}$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

则 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$, 所求极限为“ 0^0 ”.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{(x^x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{(x^x-1) \ln x},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^x-1) \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{x \ln x} - 1) \ln x$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^2 x \quad [(e^{x \ln x} - 1) \sim x \ln x]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{-\frac{1}{x}} = 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = 0,$$

则 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{(x^x-1)} = e^0 = 1$.

数列的极限

常见的数列极限有以下 4 种.

1. 不定式

求数列不定式极限和求函数不定式极限的方法完全相同, 但对数列极限不能直接用洛



必达法则.

【例 1】求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\arctan n - \frac{\pi}{2} \right]$.

$$\textcircled{\text{解}} \text{ 原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctan n - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= -1.$$

(改写成函数极限)

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

(洛必达法则)

【例 2】求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{e} \right]^n$.

$$\textcircled{\text{解}} \text{ 原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)}}{e} \right]^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{n^2 \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)}}{e^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n^2 \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - n}$$

$$\text{又 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n - n^2 \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left[\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{则原式} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

2. n 项和的数列极限

常用方法: (1) 夹逼原理; (2) 定积分定义; (3) 级数求和.

【例 1】求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \right)$.

$$\textcircled{\text{解}} \text{ 由于 } \frac{n^2}{n^2+n} \leq \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \right) \leq \frac{n^2}{n^2+1},$$

$$\text{且 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1, \text{ 则 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \right) = 1.$$

【例 2】求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \right)$.

$$\textcircled{\text{解}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{n}\right)^2} + \cdots + \frac{1}{1 + \left(\frac{n}{n}\right)^2} \right]$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}.$$



【注】(1) 用定积分定义求极限的一种常用且有效的方法是先提“可爱因子” $\frac{1}{n}$, 然后再分析被积函数和积分区间, 一种常见的极限式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$$

(2) 以上两个例题都是 n 项和的数列极限, 但一个适合用夹逼原理, 而另一个适合用定积分定义. 它们的本质区别在哪儿呢? 它们分母中的第一项都是 n^2 , 不随项的变化而变化, 称其为主体部分, 而分母中的第二项是随项的变化而变化, 称其为变化部分, 例 1 中的变化部分是由 1 变到 n , 其最大值 n 与其主体部分 n^2 相比较是次量级, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = 0$; 例 2 中的变化部分是由 1^2 变到 n^2 , 其最大值 n^2 与其主体部分 n^2 相比较是同量级, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2} = 1 \neq 0$; 综上所述, 当变化部分的最大值与其主体部分相比较是次量级就用夹逼原理, 而当变化部分的最大值与其主体部分相比较是同量级就用定积分定义.

类似的可求下列极限

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right); \quad (\ln 2)$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+\ln 1} + \frac{1}{n+\ln 2} + \cdots + \frac{1}{n+\ln n} \right); \quad (1)$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{e}{e^n + 1^2} + \frac{e^2}{e^n + 2^2} + \cdots + \frac{e^n}{e^n + n^2} \right); \quad \left(\frac{e}{e-1} \right)$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \right). \quad (\ln(1+\sqrt{2}))$$

【例 3】求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right)$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) \quad \left(\text{提可爱因子 } \frac{1}{n} \right) \\ &= \int_0^1 x \ln(1+x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \ln(1+x) dx^2 \\ &= \frac{x^2}{2} \ln(1+x) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

【例 4】求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}} \right)$.

$$\text{解} \quad \frac{1}{n+1} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{n\pi}{n} \right) \leq \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}} \right) \leq$$



$$\frac{1}{n + \frac{1}{n}} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{n\pi}{n} \right) < \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{n\pi}{n} \right),$$

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{n\pi}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{n\pi}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{n\pi}{n} \right) = \int_0^1 \sin(\pi x) dx = \frac{2}{\pi}, \end{aligned}$$

则原式 = $\frac{2}{\pi}$.

【例 5】 设 $x_n = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^{n-1}}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n =$ _____.

【分析】 由级数定义知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}}$, 考虑幂级数 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, $|x| < 1$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = S\left(\frac{1}{2}\right), \text{ 所以, 先求 } S(x).$$

【解】 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' = \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 4$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

【注】 本题数学二不要求.

【例 6】 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = \max_{1 \leq i \leq m} \{a_i\}$, 其中 $a_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, m)$, 并利用该结论求下列极限

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1^n + 2^n + 3^n}$;

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a^{-n} + b^{-n})^{\frac{1}{n}} (0 < a < b)$;

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} (x \geq 0)$.

【解】 令 $\max_{1 \leq i \leq m} \{a_i\} = a$, 则

$$a = \sqrt[n]{a^n} \leq \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} \leq \sqrt[n]{ma^n} = \sqrt[n]{m}a$$

又 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{m} = 1$, 则由夹逼原理知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = a = \max_{1 \leq i \leq m} \{a_i\}$$

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + 2^n + 3^n} = \max\{1, 2, 3\} = 3$.

$$\begin{aligned} (2) \lim_{n \rightarrow \infty} (a^{-n} + b^{-n})^{\frac{1}{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{a}\right)^n + \left(\frac{1}{b}\right)^n} \\ &= \max\left\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right\} = \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

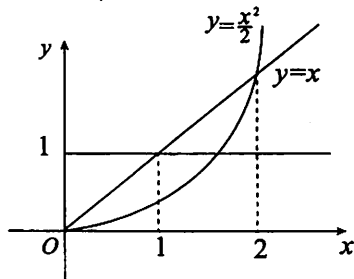


图 1-1



$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} = \max\left\{1, x, \frac{x^2}{2}\right\} = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ x, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{x^2}{2}, & x \geq 2 \end{cases}.$$

这里是用几何方法得出结果的,即如上图画 3 条线 $y=1, y=x, y=\frac{x^2}{2}$.

【注】 本题中所证的结论是一个常用结论.

3. n 项连乘的数列极限

常用方法:

(1) 夹逼原理; (2) 取对数化为 n 项和.

【例 1】 设 $a_n = \sqrt{\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{2n-1}{2n}}$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

解 显然 $a_n \leq 1$, 又

$$a_n = \sqrt{\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{2n-1}{2n}} = \sqrt{\frac{3}{2} \times \frac{5}{4} \times \cdots \times \frac{2n-1}{2n-2} \times \frac{1}{2n}} \geq \sqrt{\frac{1}{2n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{n}} = 0$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

【例 2】 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}$.

解 令 $y_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} [\ln(n+1) + \ln(n+2) + \cdots + \ln(2n)] - \ln n \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{n}{n}\right) \right]$$

$$= \int_0^1 \ln(1+x) dx = [(x+1)\ln(1+x) - x] \Big|_0^1$$

$$= 2\ln 2 - 1,$$

$$\text{故原式} = e^{2\ln 2 - 1} = \frac{4}{e}.$$

【注】 同样的方法可求得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$.

4. 递推关系 $x_1 = a, x_{n+1} = f(x_n) (n=1, 2, \cdots)$ 定义的数列

常用方法

方法 1: 先证数列 $\{x_n\}$ 收敛 (常用单调有界准则), 然后令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 等式 $x_{n+1} = f(x_n)$ 两端取极限得 $A = f(A)$, 由此求得极限 A .



方法2: 先令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 然后等式 $x_{n+1} = f(x_n)$ 两端取极限解得 A , 得到极限初步结果, 最后再证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$.

一般来说, 当数列 $\{x_n\}$ 具有单调性时用方法1, 而当数列 $\{x_n\}$ 不具有单调性或单调性很难判定时用方法2.

单调性判定常用有三种方法:

(1) 若 $x_{n+1} - x_n \geq 0$ (≤ 0), 则 $\{x_n\}$ 单调增(单调减);

(2) 设 $\{x_n\}$ 不变号,

① 若 $x_n > 0$, 则当 $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$ (≤ 1) 时, $\{x_n\}$ 单调增(单调减);

② 若 $x_n < 0$, 则当 $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$ (≤ 1) 时, $\{x_n\}$ 单调减(单调增);

(3) 设数列 $\{x_n\}$ 由 $x_1 = a, x_{n+1} = f(x_n) (n = 1, 2, \dots), x_n \in I$ 所确定,

① 若 $f(x)$ 在 I 上单调增, 则

当 $x_1 \leq x_2$ 时, $\{x_n\}$ 单调增; 当 $x_1 \geq x_2$ 时, $\{x_n\}$ 单调减;

② 若 $f(x)$ 在 I 上单调减, 则 $\{x_n\}$ 不单调.

笔记:

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

【例1】 设 $0 < x_1 < 3, x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)} (n = 1, 2, \dots)$, 证明: 数列 $\{x_n\}$ 极限存在并求此极限.

①证明 由 $0 < x_1 < 3, x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)}$ 知 $0 < x_n < 3$, 从而有

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)} \leq \frac{1}{2}[(\sqrt{x_n})^2 + (\sqrt{3-x_n})^2] = \frac{3}{2}$$

即 $\{x_n\}$ 上有界. 而

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \sqrt{x_n(3-x_n)} - x_n = \frac{x_n(3-x_n) - x_n^2}{\sqrt{x_n(3-x_n)} + x_n} \\ &= \frac{x_n(3-2x_n)}{\sqrt{x_n(3-x_n)} + x_n} \geq 0 \end{aligned}$$



故 $\{x_n\}$ 单调增. 或者由 $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \sqrt{\frac{3}{x_n}} - 1 \geq \sqrt{\frac{3}{\frac{3}{2}}} - 1 = 1$ 知 $\{x_n\}$ 递增.

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 不妨设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

对等式 $x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)}$ 两端取极限得 $a = \sqrt{a(3-a)}$, 由此解得 $a = \frac{3}{2}$ 或 $a = 0$ (舍去), 由于 $0 < x_1 \leq x_n < 3$, 故由极限的保号性知, $0 < x_1 \leq a \leq 3$.

$$\text{则 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{3}{2}.$$

【例 2】 设 $x_1 = \sqrt{6}, x_2 = \sqrt{6+\sqrt{6}}, \dots, x_n = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\dots+\sqrt{6}}}}$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

解 (方法一) $x_{n+1} = \sqrt{6+x_n}$, 令 $f(x) = \sqrt{6+x}$, 由于 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{6+x}} > 0$, 则

$f(x)$ 单调增, 又 $x_1 < x_2$, 则 $\{x_n\}$ 单调增.

又 $x_1 = \sqrt{6} < 3$, 若 $x_n < 3$, 则 $x_{n+1} = \sqrt{6+x_n} < 3$, 从而 $x_n < 3$, 即数列 $\{x_n\}$ 上有界, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 由于 $0 < x_n < 3$, 故由极限的保序性知, $0 \leq a \leq 3$. $x_{n+1} = \sqrt{6+x_n}$ 两端取极限知, $a = \sqrt{6+a}$, 解得 $a = 3$, 或 $a = -2$ (舍去).

$$\text{则 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3.$$

(方法二) 直接证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$.

由 $x_{n+1} = \sqrt{6+x_n}$ 知

$$|x_n - 3| = \left| \sqrt{6+x_{n-1}} - 3 \right| = \frac{|x_{n-1} - 3|}{\sqrt{6+x_{n-1}} + 3}$$

$$< \frac{1}{3} |x_{n-1} - 3| < \frac{1}{3^2} |x_{n-2} - 3| < \dots < \frac{1}{3^{n-1}} |x_1 - 3| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\text{则 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3.$$

【注】 方法二的关键是证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$. 一般的, 当数列 $\{x_n\}$ 由递推关系 $x_n = f(x_{n-1})$ 给出, 要证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 其核心是利用 $x_n = f(x_{n-1})$ 证明一个递推不等式

$$|x_n - a| \leq A |x_{n-1} - a|$$

这里 $0 < A < 1$.

【例 3】 设 $x_1 > 0, x_{n+1} = 1 - e^{-x_n}, n = 1, 2, \dots$.

(1) 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

(2) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n x_{n+1}}{x_n - x_{n+1}}$.

解 (1) 由 $x_1 > 0, x_{n+1} = 1 - e^{-x_n}, n = 1, 2, \dots$ 及归纳法可知 $x_n > 0$, 则数列 $\{x_n\}$ 下有界.

$$\text{又 } \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1 - e^{-x_n}}{x_n} = \frac{e^0 - e^{-x_n}}{x_n} = e^\xi < 1 \quad (-x_n < \xi < 0),$$

$$\text{或 } x_{n+1} - x_n = (1 - x_n) - e^{-x_n} \leq 0 \quad (e^x \geq 1 + x),$$

则 $\{x_n\}$ 单调减.

或由递推函数 $f(x) = 1 - e^{-x}$, $f'(x) = e^{-x} > 0$, 则 $\{x_n\}$ 单调, 又

$$0 < x_n = 1 - e^{-x_{n-1}} < 1$$

则极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $a \geq 0$ 且满足 $a = 1 - e^{-a}$, 易知 $a = 0$ 是其解.

令 $f(x) = x - 1 + e^{-x}$, 则 $f'(x) = 1 - e^{-x}$.

当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加, 所以 $a = 0$ 是方程 $a = 1 - e^{-a}$ 在 $[0, +\infty)$ 上的唯一解, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

$$\begin{aligned} (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n x_{n+1}}{x_n - x_{n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n (1 - e^{-x_n})}{x_n - 1 + e^{-x_n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 - e^{-x})}{x - 1 + e^{-x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x - 1 + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{1 - e^{-x}} = 2. \end{aligned}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

【例 4】 设 $x_1 = 2, x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n} (n = 1, 2, \dots)$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

【分析】 令 $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$, 则 $x_{n+1} = f(x_n)$, 显然 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调减, 故 $\{x_n\}$ 不具有单调性, 因此用方法 2.

【解】 令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (2 + \frac{1}{x_n})$, 即 $a = 2 + \frac{1}{a}$, 解得 $a = 1 \pm \sqrt{2}$.

由题设知 $x_n \geq 2$, 故由极限的保号性知, $a \geq 2$, 从而 $a = 1 + \sqrt{2}$. 以下证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1 + \sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} |x_n - a| &= \left| \left(2 + \frac{1}{x_{n-1}}\right) - \left(2 + \frac{1}{a}\right) \right| = \left| \frac{x_{n-1} - a}{a x_{n-1}} \right| \leq \frac{|x_{n-1} - a|}{2a} \leq \frac{|x_{n-1} - a|}{2} \\ &\leq \frac{|x_{n-2} - a|}{2^2} \leq \dots \leq \frac{|x_1 - a|}{2^{n-1}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

【例 5】 设 $f(x)$ 可微, 且 $0 < f'(x) \leq \frac{1}{2+x^2}$, 数列 $x_0 = A, x_n = f(x_{n-1}), n = 1, 2, \dots$.

证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在且是方程 $f(x) = x$ 的唯一实根.

【证明】 (方法一) 由于 $f'(x) > 0$, 则数列 $\{x_n\}$ 单调, 又

$$\begin{aligned} |x_n| &= |f(x_{n-1})| = \left| x_0 + \int_{x_0}^{x_{n-1}} f'(x) dx \right| \\ &\leq |f(x_0)| + \left| \int_{x_0}^{x_{n-1}} f'(x) dx \right| \\ &\leq |f(x_0)| + \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2+x^2} \right| \end{aligned}$$

这里反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2+x^2}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 有界, 从而极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $a = f(a)$.

又设 $\varphi(x) = x - f(x)$, 则 $\varphi'(x) = 1 - f'(x) > 0$, $\varphi(x)$ 单调增, a 是方程 $x = f(x)$ 的唯一实根.

(方法二) 设 $\varphi(x) = x - f(x)$, 则 $\varphi'(x) = 1 - f'(x) > 0$, $\varphi(x)$ 单调增, 则方程 $x = f(x)$ 有唯一实根. 设其为 a , 以下证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

$$|x_n - a| = |f(x_{n-1}) - f(a)|$$



$$\begin{aligned}
 &= |f'(\xi_{n-1})| |x_{n-1} - a| \quad (\text{拉格朗日定理}) \\
 &\leq \frac{1}{2} |x_{n-1} - a| \leq \cdots \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |x_1 - a| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)
 \end{aligned}$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

(方法三) (数学二不要求) 数列 $\{x_n\}$ 收敛等价于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - x_{n-1})$ 收敛.

以下证明该级数收敛

$$\begin{aligned}
 |x_n - x_{n-1}| &= |f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})| \\
 &= |f'(\xi_{n-1})| |x_{n-1} - x_{n-2}| \quad (\text{拉格朗日定理}) \\
 &\leq \frac{1}{2} |x_{n-1} - x_{n-2}| \leq \cdots \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |x_1 - x_0|
 \end{aligned}$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - x_{n-1})$ 收敛, 从而极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在. 以下同方法一.

题型三 确定极限式中的参数

【例 1】若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a^2 + t^2}} dt}{bx - \sin x} = 1$, 求 a, b , 其中 a, b 为正数.

① (方法一) $1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a^2 + t^2}} dt}{bx - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}}{b - \cos x} \quad (\text{洛必达法则})$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{a} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x} \quad (b = 1, \text{否则上式右端为 } 0, \text{左端为 } 1, \text{矛盾}) \\
 &= \frac{1}{a} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2} = \frac{2}{a},
 \end{aligned}$$

则 $a = 2, b = 1$.

(方法二) 由于当 $t \rightarrow 0$ 时, $\frac{t^2}{\sqrt{a^2 + t^2}} \sim \frac{t^2}{a}$, 则

$$\begin{aligned}
 1 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a^2 + t^2}} dt}{bx - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{t^2}{a} dt}{bx - \sin x} = \frac{1}{3a} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{bx - \sin x} \\
 &\stackrel{\text{若 } b \neq 1}{=} \frac{1}{3a} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{bx - x} = 0
 \end{aligned}$$

等式左右两端矛盾, 则 $b = 1$, 且

$$1 = \frac{1}{3a} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x - \sin x} = \frac{1}{3a} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{x^3}}{\frac{x - \sin x}{x^3}} = \frac{2}{a}$$

则 $a = 2, b = 1$.

【例2】 若 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + ax + b) = 0$, 求 a, b .

⑧ (方法一) 由 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + ax + b) = 0$ 可知, $a > 0$.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2 + x + 1) - (ax + b)^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} - (ax + b)} \quad (\text{有理化}) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1 - a^2)x^2 + (1 - 2ab)x + (1 - b^2)}{\sqrt{x^2 + x + 1} - (ax + b)} = 0, \end{aligned}$$

则 $1 - a^2 = 0, 1 - 2ab = 0$, 由此可得 $a = 1, b = \frac{1}{2}$.

$$(\text{方法二}) \quad \text{原式} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - a - \frac{b}{x} \right) = 0.$$

因此 $1 - a = 0$, 即 $a = 1$.

$$\begin{aligned} b &= - \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(方法三) 等式 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + ax + b) = 0$ 两端同除 x 可得

$$a = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x} = 1,$$

$$\begin{aligned} b &= - \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1 \right) \quad (\text{提出 } -x) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \times \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \right] \quad (\text{等价代换}) \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

【注】 方法一是同时把 a 和 b 求出来, 但比较繁琐. 而方法二和方法三都是分别先求出 a , 然后再求出 b , 比较简单. 类似的可求解下列题目:

$$\text{设 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax + b \right) = 3, \text{ 求 } a, b \text{ 的值.} \quad (a = 1, b = 4)$$

【例3】 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x^n + 7x^4 + 1)^m - x] = b (n > 4, b \neq 0)$, 求 n, m, b .

⑧ (解) $(x^n + 7x^4 + 1)$ 中最高次项为 x^n , 由题设知 $nm = 1$, 即 $m = \frac{1}{n}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x^n + 7x^4 + 1)^m - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x^n + 7x^4 + 1)^{\frac{1}{n}} - x] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\sqrt[n]{1 + \frac{7x^4}{x^n} + \frac{1}{x^n}} - 1 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \frac{1}{n} \left(\frac{7x^4}{x^n} + \frac{1}{x^n} \right) = b \neq 0, \quad (\text{等价代换}) \end{aligned}$$

则 $n = 5, b = \frac{7}{5}, m = \frac{1}{5}$.



【例4】 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2021}}{n^\alpha - (n-1)^\alpha} = \beta \neq 0$, 求 α 及 β .

$$\textcircled{\text{解}} \quad \beta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2021}}{n^\alpha - (n-1)^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2021}}{n^\alpha \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right)^\alpha \right]}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2021}}{n^\alpha \cdot \frac{\alpha}{n}}$$

$$\left(\left[1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right)^\alpha \right] \sim \frac{\alpha}{n} \right)$$

$$= \frac{1}{\alpha} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2021}}{n^{\alpha-1}}$$

则 $\alpha = 2022$, $\beta = \frac{1}{2022}$.

题型四 无穷小量阶的比较

由无穷小量阶的定义可知, 比较两个无穷小阶的问题就是求 $\frac{0}{0}$ 型极限, 所以常用的方法就是求 $\frac{0}{0}$ 型极限的常用三种方法.

(1) 洛必达法则(求导定阶).

若当 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x)$ 是无穷小量, 且 $f'(x)$ 是 x 的 $k(k \geq 0)$ 阶无穷小, 则 $f(x)$ 是 $x \rightarrow 0$ 时的 $k+1$ 阶无穷小量.

(2) 等价无穷小代换.

若当 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x)$ 是无穷小量, 且 $f(x) \sim Ax^k (A \neq 0, k > 0)$, 则 $f(x)$ 是 $x \rightarrow 0$ 时的 k 阶无穷小量.

若当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1 - \cos x) \sin x \sim \frac{1}{2}x^2 \cdot x$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1 - \cos x) \sin x$ 是 x 的 3 阶无穷小.

(3) 泰勒公式.

【例1】 把 $x \rightarrow 0^+$ 时的无穷小 $\alpha = \int_0^x \cos t^2 dt$, $\beta = \int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt$, $\gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt$ 进行排序, 使排在后面的是前一个的高阶无穷小, 则正确的排列顺序是

(A) α, β, γ .

(B) α, γ, β .

(C) β, α, γ .

(D) β, γ, α .

【解】 (方法一) (用定义直接比较)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x^2}{2x \tan x} = \infty$$

则 β 是 α 的高阶无穷小, (C) 和 (D) 选项不正确.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\beta}{\gamma} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x \tan x}{\sin x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}} = 4 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x} = 0$$

则 β 是 γ 的高阶无穷小, 即 β 应排在 γ 后面, (A) 不正确, 故应选 (B).

(方法二) (利用定义确定 α, β, γ 是 x 的几阶无穷小)

$$\text{由 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x^2}{kx^{k-1}} = a \neq 0 \text{ 可知 } k = 1.$$

$$\text{由 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x \tan x}{kx^{k-1}} = a \neq 0 \text{ 可知 } k = 3.$$

$$\text{由 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \sin x^{\frac{3}{2}}}{kx^{k-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}x}{kx^{k-1}} = a \neq 0 \text{ 可知 } k = 2,$$

则正确的排序是 α, γ, β .

(方法三) (求导定阶)

$$\text{由于 } \frac{d\alpha}{dx} = \cos x^2 \rightarrow 1, \quad x \text{ 的 } 0 \text{ 阶无穷小},$$

$$\frac{d\beta}{dx} = 2x \tan x \sim 2x^2, \quad x \text{ 的 } 2 \text{ 阶无穷小},$$

$$\frac{d\gamma}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin x^{\frac{3}{2}} \sim \frac{1}{2}x, \quad x \text{ 的 } 1 \text{ 阶无穷小},$$

则 α, γ, β 分别是 x 的 1 阶, 2 阶, 3 阶无穷小, 正确的排序是 α, γ, β .

(方法四) (利用若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, 则 $\int_0^{\varphi(x)} f(t) dt \sim \int_0^{\varphi(x)} g(t) dt$, 其中 $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0$)

$$\alpha = \int_0^x \cos t^2 dt \sim \int_0^x 1 dt = x$$

$$\beta = \int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt \sim \int_0^{x^2} \sqrt{t} dt = \frac{2}{3}x^3$$

$$\gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt \sim \int_0^{\sqrt{x}} t^3 dt = \frac{1}{4}x^2$$

则正确的排序是 α, γ, β .

(方法五) (结论: 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续, 且当 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x)$ 是 x 的 m 阶无穷小, $\varphi(x)$ 是 x 的 n 阶无穷小, 则当 $x \rightarrow 0$ 时 $F(x) = \int_0^{\varphi(x)} f(t) dt$ 是 x 的 $n(m+1)$ 阶无穷小)

$$\text{对于 } \alpha = \int_0^x \cos t^2 dt, m=0, n=1, \text{ 则 } n(m+1)=1;$$

$$\text{对于 } \beta = \int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt, m=\frac{1}{2}, n=2, \text{ 则 } n(m+1)=3;$$

$$\text{对于 } \gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt, m=3, n=\frac{1}{2}, \text{ 则 } n(m+1)=2,$$

则正确的排序是 α, γ, β .

【例 2】 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列无穷小中最高阶的是

(A) $(2 + \tan x)^x - 2^x$.

(B) $(\cos x^2)^{\frac{1}{x}} - 1$.

(C) $\int_0^{1-\cos x} e^x \sin t^2 dt$.

(D) $\int_{\sin x}^{1-\sqrt{\cos x}} \ln(1+t^3) dt$.

解 估计每个无穷小的阶数



微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$(2 + \tan x)^x - 2^x \sim 2^x \left[\left(1 + \frac{1}{2} \tan x \right)^x - 1 \right] \sim \left[\left(1 + \frac{1}{2} \tan x \right)^x - 1 \right] \\ \sim \left(\frac{1}{2} \tan x \right) x \sim \frac{1}{2} x^2 \quad (2 \text{ 阶})$$

$$(\cos x^2)^{\frac{1}{x}} - 1 = [1 + (\cos x^2 - 1)]^{\frac{1}{x}} - 1 \sim \frac{\cos x^2 - 1}{x} \\ \sim -\frac{\frac{1}{2} x^4}{x} \quad (3 \text{ 阶})$$

$$\int_0^{1-\cos x} e^x \sin t^2 dt = e^{x^2} \int_0^{1-\cos x} \sin t^2 dt \sim \int_0^{1-\cos x} \sin t^2 dt \quad (6 \text{ 阶})$$

$$\int_{\sin x}^{1-\sqrt{\cos x}} \ln(1+t^3) dt = \int_{\sin x}^0 \ln(1+t^3) dt + \int_0^{1-\sqrt{\cos x}} \ln(1+t^3) dt \\ = \int_0^{1-\sqrt{\cos x}} \ln(1+t^3) dt - \int_0^{\sin x} \ln(1+t^3) dt \\ 1 - \sqrt{\cos x} \sim \frac{\frac{1}{2} x^2}{2} \quad (2 \text{ 阶})$$

$$\int_0^{1-\sqrt{\cos x}} \ln(1+t^3) dt \quad (8 \text{ 阶})$$

$$\int_0^{\sin x} \ln(1+t^3) dt \quad (4 \text{ 阶})$$

$$\int_{\sin x}^{1-\sqrt{\cos x}} \ln(1+t^3) dt \quad (4 \text{ 阶})$$

故应选(C).

【例 3】 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1 - bx)$ 是等价无穷小, 则

$$(A) a = 1, b = -\frac{1}{6}. \quad (B) a = 1, b = \frac{1}{6}.$$

$$(C) a = -1, b = -\frac{1}{6}. \quad (D) a = -1, b = \frac{1}{6}.$$

解 (方法一) $1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin ax}{-bx^3} \quad (\ln(1 - bx) \sim -bx)$

$$\stackrel{\text{洛必达}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - a \cos ax}{-3bx^2} \quad (a = 1, \text{ 否则该极限为 } \infty, \text{ 与题设矛盾})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} x^2}{-3bx^2} = -\frac{1}{6b},$$

则 $b = -\frac{1}{6}.$

(方法二) $1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin ax}{-bx^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - [ax - \frac{(ax)^3}{3!} + o(x^3)]}{-bx^3}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-a)x + \frac{(ax)^3}{3!} - o(x^3)}{-bx^3},$$



则 $a = 1, b = -\frac{1}{6}$.

【例 4】 设 $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 若 $p(x) - \tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小, 则下列结论中错误的是

(A) $a = 0$.

(B) $b = 1$.

(C) $c = 0$.

(D) $d = \frac{1}{6}$.

解 (方法一) 由 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x - x \sim \frac{1}{3}x^3$ 知

$$\tan x - x = \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

从而得 $\tan x$ 的泰勒公式

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{p(x) - \tan x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a + (b-1)x + cx^2 + \left(d - \frac{1}{3}\right)x^3 + o(x^3)}{x^3} = 0$$

则 $a = 0, b = 1, c = 0, d = \frac{1}{3}$, 故应选(D).

(方法二) 由题设知

$$0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{p(x) - \tan x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[p(x) - x] - (\tan x - x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{p(x) - x}{x^3} - \frac{1}{3}$$

$$\text{即 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{p(x) - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a + (b-1)x + cx^2 + dx^3}{x^3} = \frac{1}{3}$$

则 $a = 0, b = 1, c = 0, d = \frac{1}{3}$. 故应选(D).

【注】 显然, 方法二简单, 类似的可求解下列题目:

设 $\lim_{x \rightarrow 0} (x^{-3} \sin 3x + ax^{-2} + b) = 0$, 求 a, b 的值.

$$(a = -3, b = \frac{9}{2})$$

【例 5】 已知 $x \rightarrow 0$ 时, $e^{-x^2} - \cos \sqrt{2}x$ 与 ax^n 是等价无穷小, 则

(A) $n = 2, a = \frac{1}{4}$.

(B) $n = 3, a = \frac{1}{2}$.

(C) $n = 4, a = \frac{1}{3}$.

(D) $n = 5, a = \frac{1}{6}$.

解 (方法一) 直接法 由 $e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} + o(x^4)$

$$\cos \sqrt{2}x = 1 - \frac{2x^2}{2!} + \frac{4x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} - \cos \sqrt{2}x}{ax^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^4 + o(x^4)}{ax^n} = 1$$



知, $n = 4, a = \frac{1}{3}$, 故应选(C).

(方法二) 排除法 由于 $e^{-x^2} - \cos\sqrt{2}x$ 是偶函数, 则其在 $x = 0$ 处的泰勒展开式中只有偶次项, 由此可知 n 只能是偶数, 故排除(B)(D). 又

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} - \cos\sqrt{2}x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} - 1}{x^2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\sqrt{2}x - 1}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{x^2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}(\sqrt{2}x)^2}{x^2} = 0\end{aligned}$$

则排除(A), 故应选(C).

【注】 类似的可求解下列题目

已知当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} - 2\ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 是 x 的 n 阶无穷小, 则 $n =$

(A)1.

(B)2.

(C)3.

(D)4.

(C)

第三节 连续

一、考试内容要点精讲

(一) 连续的概念

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ (或 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$), 则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

左、右连续概念: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 处左连续.

若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 处右连续.

定理 $f(x)$ 连续 $\Leftrightarrow f(x)$ 左连续且右连续.

(二) 间断点及其类型

1. 间断点的概念

若 $f(x)$ 在 x_0 某去心邻域有定义, 但在 x_0 处不连续, 则称点 $x = x_0$ 为函数 $f(x)$ 的间断点.

2. 间断点的分类

我们根据左、右极限是否都存在把间断点分为以下两类:

(1) 第一类间断点: 左、右极限均存在的间断点

可去间断点: 左、右极限存在且相等的间断点;

跳跃间断点: 左、右极限都存在但不相等的间断点.

(2) 第二类间断点: 左、右极限中至少有一个不存在的间断点

无穷间断点: 左、右极限中至少有一个为无穷, 如 $x = 0$ 为 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的无穷间断点;



振荡间断点: 如 $x = 0$ 为 $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ 的振荡间断点.

(三) 连续函数的性质

- (1) 连续函数的和、差、积、商(分母不为零)及复合仍连续;
- (2) 基本初等函数在其定义域内连续;初等函数在其定义区间内连续;
- (3) 闭区间上连续函数的性质

- ① 有界性: 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.
- ② 最值性: 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必有最大值和最小值.
- ③ 介值性: 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) \neq f(b)$, 则对 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间任一数 C , 至少存在一个 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = C$.

推论: 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可取到介于最小值 m 与最大值 M 之间的任何值.

- (4) 零点定理: 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 且 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则必存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi) = 0$.

二、常考题型的方法与技巧

题型一 讨论连续性及间断点类型

【例1】 设函数 $f(x) = \frac{x}{a + e^{bx}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, 则常数 a, b 应

满足

- (A) $a < 0, b < 0$. (B) $a > 0, b > 0$.
(C) $a \leq 0, b > 0$. (D) $a \geq 0, b < 0$.

解 由 $f(x) = \frac{x}{a + e^{bx}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续知, $a + e^{bx} \neq 0$.

又由 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ 知, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{bx} = +\infty$, 则 $b < 0$. 再由 $a + e^{bx} \neq 0$ 知, $a \geq 0$, 故应选(D).

【例2】 设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, $f(x)$ 为连续函数, 且 $f(x) \neq 0, \varphi(x)$ 有间断点, 则

- (A) $\varphi(f(x))$ 必有间断点. (B) $[\varphi(x)]^2$ 必有间断点.
(C) $f(\varphi(x))$ 必有间断点. (D) $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点.

解 (方法一) 直接法

直接证明选项(D)正确, 用反证法:

若 $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 无间断点, 由题设知 $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 有定义, 则连续.

由 $f(x)$ 的连续知 $\varphi(x) = \frac{\varphi(x)}{f(x)} f(x)$ 必连续, 这与 $\varphi(x)$ 有间断点矛盾, 故应选(D).

(方法二) 排除法

设 $f(x) \equiv 1, \varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$, 显然 $f(x), \varphi(x)$ 符合题设条件, 而



$$\varphi(f(x)) \equiv 1, \varphi^2(x) \equiv 1, f(\varphi(x)) \equiv 1$$

都处处连续, 则(A)(B)(C) 都不正确, 故应选(D).

【例 3】 讨论函数 $f(x) = \frac{x \arctan \frac{1}{x-1}}{\sin \frac{\pi}{2}x}$ 的连续性并指出间断点类型.

③ 由于 $f(x) = \frac{x \arctan \frac{1}{x-1}}{\sin \frac{\pi}{2}x}$ 为初等函数, 则除 $x=1, x=2k(k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 外

$f(x)$ 处处连续.

$$\text{当 } x=1 \text{ 时, } f(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x \arctan \frac{1}{x-1}}{\sin \frac{\pi}{2}x} = -\frac{\pi}{2},$$

$$f(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x \arctan \frac{1}{x-1}}{\sin \frac{\pi}{2}x} = \frac{\pi}{2},$$

则 $x=1$ 为跳跃间断点.

当 $x=0$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arctan \frac{1}{x-1}}{\sin \frac{\pi}{2}x} = -\frac{\pi}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\frac{\pi}{2}x} = -\frac{1}{2}$, 则 $x=0$ 为可去间断点.

当 $x=2k(k=\pm 1, \pm 2, \dots)$ 时, 有

$$\lim_{x \rightarrow 2k} \frac{x \arctan \frac{1}{x-1}}{\sin \frac{\pi}{2}x} = \infty$$

则 $x=2k(k=\pm 1, \pm 2, \dots)$ 为无穷间断点.

【例 4】 函数 $f(x) = \frac{(x+1)|x-1|}{e^{\frac{1}{x^2}} \ln|x|}$ 的可去间断点的个数为

(A)1. (B)2. (C)3. (D)4.

③ 显然 $x=0, x=\pm 1$ 及 $x=2$ 为 $f(x)$ 的间断点, 其余点处都连续.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

则 $x=0$ 为可去间断点.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2e \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{\ln x} = 2e \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x-1} = \begin{cases} 2e, & x \rightarrow 1^+ \\ -2e, & x \rightarrow 1^- \end{cases}$$

则 $x=1$ 为跳跃间断点.

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2\sqrt[3]{e} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)}{\ln|x|} = 2\sqrt[3]{e} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{\frac{1}{x}} = -2\sqrt[3]{e}$$

则 $x=-1$ 为可去间断点.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \infty$$



则 $x = 2$ 为第二类间断点.

故选(B).

【例 5】求极限 $\lim_{t \rightarrow x} \left(\frac{\sin t}{\sin x} \right)^{\frac{x}{\sin t - \sin x}}$, 记此极限为 $f(x)$, 求函数 $f(x)$ 的间断点并指出类型.

解 $f(x)$ 的定义式知在 $x = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 处没有定义, 当 $x \neq k\pi$ 时,

由于 $\left(\frac{\sin t}{\sin x} \right)^{\frac{x}{\sin t - \sin x}} = \left(1 + \frac{\sin t - \sin x}{\sin x} \right)^{\frac{x}{\sin t - \sin x}}$, 而

$$\lim_{t \rightarrow x} \frac{\sin t - \sin x}{\sin x} \cdot \frac{x}{\sin t - \sin x} = \frac{x}{\sin x}$$

$$\text{则 } f(x) = \lim_{t \rightarrow x} \left(\frac{\sin t}{\sin x} \right)^{\frac{x}{\sin t - \sin x}} = e^{\frac{x}{\sin x}}.$$

显然 $x = 0, x = k\pi (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$ 为 $f(x)$ 所有的间断点.

由于 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{x}{\sin x}} = e$, 则 $x = 0$ 为可去间断点.

而 $x = k\pi (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时, $f(x)$ 的左、右极限总有一个是无穷, 则都为第二类间断点.

【例 6】求函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+2} - x^{-n}}{x^n + x^{-n}}$ 的间断点并指出其类型.

解 由 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+2} - x^{-n}}{x^n + x^{-n}}$, 可知 $f(0)$ 无意义.

$$\text{当 } x \neq 0 \text{ 时, } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+2} - 1}{x^{2n} + 1} = \begin{cases} -1, & 0 < |x| < 1 \\ x^2, & |x| > 1 \\ 0, & |x| = 1 \end{cases}$$

由于 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$, 则 $x = 0$ 为可去间断点.

$$f(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-1) = -1$$

$$f(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = 1$$

则 $x = 1$ 为跳跃间断点.

由于 $f(x)$ 是偶函数, 则 $x = -1$ 也是跳跃间断点.

题型二 介值定理、最值定理及零点定理的证明题

【例 1】设 $f(x)$ 在 (a, b) 内非负连续, 且 $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$, 证明存在 $\xi \in (a, b)$ 使 $f(\xi) = \sqrt[n]{f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)}$.

证明 令 $c = \min_{1 \leq i \leq n} x_i, d = \max_{1 \leq i \leq n} x_i$, 则 $[c, d] \subset (a, b)$, 且 $f(x)$ 在闭区间 $[c, d]$ 上连续. 设 $f(x)$ 在 $[c, d]$ 上的最大值为 M , 最小值为 m , 则

$$m = \sqrt[n]{m^n} \leq \sqrt[n]{f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)} \leq \sqrt[n]{M^n} = M$$

由介值定理知存在 $\xi \in [c, d] \subset (a, b)$, 使

$$f(\xi) = \sqrt[n]{f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)}$$



【例 2】 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 连续, 非负且 $f(0) = f(1) = 0$. 求证: 存在 $\xi \in [0, 1]$, 使 $f(\xi + l) = f(\xi)$, 其中 $0 < l < 1$.

②② 令 $F(x) = f(x+l) - f(x), x \in [0, 1-l]$, 则

$$F(0) = f(l) - f(0) \geq 0$$

$$F(1-l) = f(1) - f(1-l) \leq 0$$

若以上二式中至少有一个等号成立, 原题结论显然成立. 若以上二式中的等号都不成立, 此时 $F(0) > 0, F(1-l) < 0$, 则由零点定理知存在 $\xi \in (0, 1-l) \subset (0, 1)$, 使 $F(\xi) = 0$, 即 $f(\xi+l) = f(\xi)$.

【例 3】 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 连续, $f(0) = f(1)$. 求证: 存在 $\xi \in [0, 1]$, 使 $f(\xi + \frac{1}{4}) = f(\xi)$.

②② 令 $F(x) = f(x + \frac{1}{4}) - f(x), x \in [0, \frac{3}{4}]$, 本题只要证 $F(x)$ 在 $[0, \frac{3}{4}]$ 上有零点.

$$\text{由于 } F(0) = f(\frac{1}{4}) - f(0), F(\frac{1}{4}) = f(\frac{1}{2}) - f(\frac{1}{4}),$$

$$F(\frac{1}{2}) = f(\frac{3}{4}) - f(\frac{1}{2}), F(\frac{3}{4}) = f(1) - f(\frac{3}{4}),$$

$$\text{相加得 } F(0) + F(\frac{1}{4}) + F(\frac{1}{2}) + F(\frac{3}{4}) = f(1) - f(0) = 0.$$

微信公众账号: 顶少考研
反证: 若 $F(x)$ 在 $[0, \frac{3}{4}]$ 内无零点, 则由连续性知 $F(x)$ 恒正或恒负. 不妨设 $F(x) > 0$, 那么 $F(0) + F(\frac{1}{4}) + F(\frac{1}{2}) + F(\frac{3}{4}) > 0$, 矛盾, 故 $F(x)$ 在 $[0, \frac{3}{4}]$ 上必有零点.

即存在 $\xi \in [0, 1]$, 使 $f(\xi + \frac{1}{4}) = f(\xi)$.

【注】 在本题条件下用同样的方法可证明一个更一般的结论:

对于任意正整数 $n (n \geq 2)$, 必存在 $x_n \in [0, 1]$, 使 $f(x_n) = f(x_n + \frac{1}{n})$.

【例 4】 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, 试证存在 $\xi \in (-\infty, +\infty)$, 使 $f(\xi) + \xi = 0$.

②② 令 $F(x) = f(x) + x$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{x} + 1 \right) = 1 > 0$. 由极限的保号性知, 存在 $X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, $\frac{F(x)}{x} > 0$.

取 $a > X$, 则 $\frac{F(a)}{a} > 0, \frac{F(-a)}{-a} > 0$, 从而有 $F(-a) < 0, F(a) > 0$. 由零点定理知, 存在 $\xi \in (-a, a) \subset (-\infty, +\infty)$, 使 $F(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) + \xi = 0$.

第二章 一元函数微分学

考试内容	考试要求		
	数一	数二	数三
导数的概念及其可导性与连续性之间的关系 罗尔(Rolle)定理、拉格朗日(Lagrange)中值定理	理解	理解	理解
高阶导数的概念 一阶微分形式的不变性 柯西(Cauchy)中值定理	了解	了解	了解
平面曲线的切线方程与法线方程 分段函数的导数 反函数与隐函数的导数 函数的微分 简单函数的高阶导数 函数图形的拐点	会求	会求	会求
导数判断函数图形的凹凸性	会用	会用	会用
基本初等函数的导数公式、导数的四则运算法则及复合函数的求导法则 用导数判断函数的单调性和求函数极值的方法 函数的最大值和最小值的求法及其应用	掌握	掌握	掌握
微分的概念、导数与微分之间的关系 导数的几何意义 函数的极值概念	理解	理解	理解
导数的物理意义 微分的四则运算法则 曲率、曲率圆和曲率半径的概念	了解	了解	
导数的经济意义(含边际与弹性的概念)			了解
导数描述一些物理量	会用	会用	
由参数方程所确定的函数的导数	会求	会求	
泰勒(Taylor)定理	理解并 会用	理解并 会用	理解并 会用
罗尔(Rolle)定理、拉格朗日(Lagrange)中值定理、柯西(Cauchy)中值定理	会运用	会运用	掌握简单 应用
洛必达法则求未定式极限的方法	掌握	掌握	掌握
曲率和曲率半径	会计算	会计算	



函数图形的水平、铅直和斜渐近线	会求	会求	会求
函数的图形	会描绘	会描绘	会描绘

第一节 导数与微分

一、考试内容要点精讲

(一) 导数概念

定义(导数) 设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义, 如果极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 并称此极限值为 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数, 记为 $f'(x_0)$, 或 $y'|_{x=x_0}$, 或 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$. 如果上述极限不存在, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处不可导.

【注】 常用的导数定义的等价形式有:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

定义(左导数) 若左极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

存在时, 则称该极限值为 $f(x)$ 在点 x_0 处的左导数, 记为 $f'_-(x_0)$.

定义(右导数) 若右极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

存在时, 则称该极限值为 $f(x)$ 在点 x_0 处的右导数, 记为 $f'_+(x_0)$.

定理 可导 $\Leftrightarrow$ 左、右导数都存在且相等.

(二) 微分概念

定义 若 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$, 其中 A 为不依赖于 Δx 的常数, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可微, 称 $A\Delta x$ 为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处相应于自变量增量 Δx 的微分, 记为 $dy = A\Delta x$.

定理 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 且有

$$dy = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)dx$$

(三) 导数与微分的几何意义

(1) 导数 $f'(x_0)$ 在几何上表示曲线 $y = f(x)$ 在点



$(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率.

(2) 微分 $dy = f'(x_0)dx$ 在几何上表示曲线 $y = f(x)$ 的切线上的增量.

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 在几何上表示曲线 $y = f(x)$ 上的增量. $\Delta y \approx dy$.

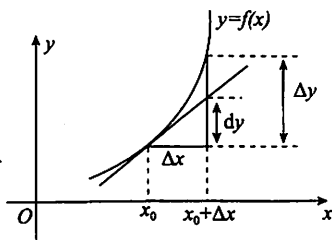


图 2-1

(四) 连续、可导、可微之间的关系

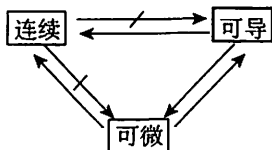


图 2-2

【注】 (1) 连续 $\not\rightarrow$ 可导, 连续 $\not\rightarrow$ 可微, 经典反例为 $f(x) = |x|$;

(2) $f(x)$ 可导 $\rightarrow f(x)$ 连续, $f(x)$ 可导 $\rightarrow f'(x)$ 连续, $f(x)$ 可导 $\rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ 存在. 例

如 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 处处可导, 但 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ 不存在, 从而 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处也不连续.

笔记:

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

(五) 求导公式

$$(1) (C)' = 0;$$

$$(3) (a^x)' = a^x \ln a;$$

$$(5) (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a};$$

$$(7) (\sin x)' = \cos x;$$

$$(9) (\tan x)' = \sec^2 x;$$

$$(11) (\sec x)' = \sec x \tan x;$$

$$(2) (x^a)' = ax^{a-1};$$

$$(4) (e^x)' = e^x;$$

$$(6) (\ln |x|)' = \frac{1}{x};$$

$$(8) (\cos x)' = -\sin x;$$

$$(10) (\cot x)' = -\csc^2 x;$$

$$(12) (\csc x)' = -\csc x \cot x;$$



$$(13) (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(14) (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(15) (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$(16) (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

(六) 求导法则

1. 有理运算法则

设 $u = u(x), v = v(x)$ 在 x 处可导, 则

$$(1) (u \pm v)' = u' \pm v';$$

$$(2) (uv)' = u'v + uv';$$

$$(3) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} (v \neq 0).$$

2. 复合函数求导法

设 $u = \varphi(x)$ 在 x 处可导, $y = f(u)$ 在对应点处可导, 则复合函数 $y = f(\varphi(x))$ 在 x 处可导, 且

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u)\varphi'(x)$$

3. 隐函数求导法

设 $y = y(x)$ 是由方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的可导函数, 为求得 y' , 可在方程 $F(x, y) = 0$ 两边对 x 求导, 可得到一个含有 y' 的方程, 从中解出 y' 即可.

【注】 y' 也可由多元函数微分法中的隐函数求导公式 $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$ 得到.

4. 反函数的导数

若 $x = \varphi(y)$ 在某区间内单调、可导, 且 $\varphi'(y) \neq 0$, 则其反函数 $y = f(x)$ 在对应区间内也可导, 且

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} \text{ 或 } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

5. 参数方程求导法 (数学三不要求)

设 $y = y(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (a < t < \beta)$ 确定的函数, 则

(1) 若 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 都可导, 且 $\varphi'(t) \neq 0$, 则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

(2) 若 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 二阶可导, 且 $\varphi'(t) \neq 0$, 则

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \right) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{\varphi'^3(t)}$$

6. 对数求导法

如果 $y = y(x)$ 的表达式由多个因式的乘除、乘幂构成, 或是幂指函数的形式, 则可先将函数取对数, 然后两边对 x 求导.



7. 高阶导数

$$(1) \text{ 定义: } f^{(n)}(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + \Delta x) - f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}.$$

(2) 常用公式

$$\textcircled{1} (\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2});$$

$$\textcircled{2} (\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{n\pi}{2});$$

$$\textcircled{3} (u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)};$$

$$\textcircled{4} (uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

二、常考题型的方法与技巧

题型一 导数与微分的概念

这里的重点是导数的概念,其题型主要有三种:

(1) 利用导数定义求极限;

(2) 利用导数定义求导数;

(3) 利用导数定义判断函数的可导性.

(一) 利用导数定义求极限

【例1】 设 $f(-1) = 1, f'(-1) = 2$, 则 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2-3x) - 1}{x-1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 (方法一)
$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2-3x) - 1}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f[-1 + 3(1-x)] - f(-1)}{3(1-x)} \times \frac{3(1-x)}{x-1} \\ &= f'(-1) \times (-3) = -6. \end{aligned}$$

(方法二) 取 $f(x) = 2x + 3$, 显然满足 $f(-1) = 1, f'(-1) = 2$, 代入得

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2-3x) - 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(2-3x) + 3 - 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6(1-x)}{x-1} = -6$$

【例2】 设 $f'(a)$ 存在, 且 $f(a) \neq 0$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{f(a + \frac{1}{n})}{f(a)} \right]^n$.

分析 这是一个 1^∞ 型极限.

解
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{f(a + \frac{1}{n})}{f(a)} \right]^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{f(a + \frac{1}{n}) - f(a)}{f(a)} \right]^n,$$

又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a + \frac{1}{n}) - f(a)}{f(a)} \cdot n = \frac{1}{f(a)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a + \frac{1}{n}) - f(a)}{\frac{1}{n}} = \frac{f'(a)}{f(a)},$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{f(a + \frac{1}{n})}{f(a)} \right]^n = e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}.$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



【例 3】 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f(0)=0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} =$

(A) $-2f'(0)$.

(B) $-f'(0)$.

(C) $f'(0)$.

(D) 0.

解 (方法一) 直接法

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^3)}{x^3} = f'(0) - 2f'(0) = -f'(0).$$

(方法二) 排除法 取 $f(x) = x$, 显然满足题设条件, 则 $f'(0) = 1$, 而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x^3}{x^3} = -1$$

显然, 选项(A)(C)(D) 都不正确, 故应选(B).

【例 4】 设曲线 $y = f(x)$ 与 $y = x^2 - x$ 在点(1,0) 处有公共切线, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n f\left(\frac{n}{n+2}\right) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

解 (方法一) 由曲线 $y = f(x)$ 与 $y = x^2 - x$ 在点(1,0) 处有公共切线可知,

$$f(1) = 0, f'(1) = (2x - 1)|_{x=1} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n f\left(\frac{n}{n+2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n}{n+2} \cdot \frac{f\left(1 + \frac{-2}{n+2}\right) - f(1)}{\frac{-2}{n+2}} = -2f'(1) = -2.$$

(方法二) 由方法一知 $f(1) = 0, f'(1) = 1$, 取 $f(x) = x - 1$ 显然满足题设条件, 代入

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n f\left(\frac{n}{n+2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{n}{n+2} - 1\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n}{n+2} = -2$$

(二) 利用导数定义求导数

【例 1】 设函数 $f(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)$, 其中 n 为正整数, 则 $f'(0) =$

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$.

(B) $(-1)^n(n-1)!$.

(C) $(-1)^{n-1}n!$.

(D) $(-1)^nn!$.

解 (方法一) 显然 $f(0) = 0$, 则由导数定义得

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n) \\ &= (1 - 2)(1 - 3) \cdots (1 - n) = (-1)^{n-1}(n-1)! \end{aligned}$$

(方法二) 显然 $f(0) = 0$, 令 $g(x) = (e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)$, 则 $f(x) = e^x g(x)$, 且

$$f'(x) = e^x g(x) + (e^x - 1)g'(x)$$

$$f'(0) = g(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

【例 2】 设 $f(x) = \begin{cases} (1+x^2)^{\frac{1}{\sin x}}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, 则 $f'(0) = \underline{\hspace{2cm}}.$



$$\begin{aligned} \textcircled{\text{解}} \quad f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{\sin x}} - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{\ln(1+x^2)}{\sin x}} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1. \end{aligned}$$

【注】 分段函数在分界点处的导数一般都要用定义求。

【例 3】 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin x) - 2}{x} = 1$, 求 $f'(0)$ 。

$$\textcircled{\text{解}} \quad \text{由 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin x) - 2}{x} = 1 \text{ 可知, } \lim_{x \rightarrow 0} f(\sin x) = 2.$$

又 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(\sin x) = f(0) = 2$, 则

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin x) - 2}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin x) - f(0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(\sin x) - f(0)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} \right] \\ &= f'(0) \end{aligned}$$

故 $f'(0) = 1$ 。

(三) 利用导数定义判定可导性

【例 1】 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 下列命题错误的是

- (A) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f(0) = 0$. (B) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f(0) = 0$.
 (C) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在. (D) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在.

④ (方法一) 直接法 直接说明(D)中的命题是错误的。

令 $f(x) = |x|$, 则 $f'(0)$ 不存在, 但 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| - |-x|}{x} = 0$ 存在。

故应选(D)。

(方法二) 排除法 即说明(A)(B)(C)中的三个命题都正确。

由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 且其分母趋于零, 则分子 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ 。又 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$, 即(A)中命题正确, 同理可说明(B)中命题正确。

由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在知 $f(0) = 0$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0)$$

从而(C)中命题也正确。即(A)(B)(C)都不能选。故应选(D)。

【例 2】 设 $f(0) = 0$, 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的充要条件为

- (A) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(1 - \cos h)$ 存在. (B) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f(1 - e^h)$ 存在.



(C) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(h - \sin h)$ 存在.(D) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(2h) - f(h)]$ 存在.**解** (方法一) 直接法

$$\begin{aligned}
 \text{由于 } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f(1 - e^h) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - e^h) - f(0)}{1 - e^h} \cdot \frac{1 - e^h}{h} \\
 &= - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - e^h) - f(0)}{1 - e^h} \quad (\text{令 } 1 - e^h = t) \\
 &= - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} = -f'(0),
 \end{aligned}$$

故应选(B).

(方法二) 排除法

$$\begin{aligned}
 (1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - \cos h)}{h^2} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - \cos h) - f(0)}{1 - \cos h} \cdot \frac{1 - \cos h}{h^2} \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - \cos h) - f(0)}{1 - \cos h} = \frac{1}{2} f'_+(0).
 \end{aligned}$$

由于当 $h \rightarrow 0$ 时, $(1 - \cos h) \rightarrow 0^+$, 则(A) 中极限存在只能推得 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的右导数存在, 所以(A) 不正确.

$$(2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(h - \sin h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h - \sin h) - f(0)}{h - \sin h} \cdot \frac{h - \sin h}{h^2}.$$

这里极限 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h - \sin h) - f(0)}{h - \sin h}$ 存在是 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导的充要条件. 但问题在于 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - \sin h}{h^2} = 0$, 极限 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h - \sin h) - f(0)}{h - \sin h} \cdot \frac{h - \sin h}{h^2}$ 存在时, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h - \sin h) - f(0)}{h - \sin h}$ 不一定存在. 事实上, 取 $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$, 则

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(h - \sin h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h - \sin h)^{\frac{2}{3}}}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{h - \sin h}{h^3} \right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{6} \right)^{\frac{2}{3}}$$

存在. 但 $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^{\frac{2}{3}}}{h} = \infty$. 故(C) 也不正确.

(3) 取 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 显然 $f'(0)$ 不存在, 因为 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续. 但

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(2h) - f(h)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (1 - 1) = 0$$

则(D) 不正确, 故应选(B).

笔记:



【例 3】 设 $f(x)$ 可导, $F(x) = f(x)(1 + |\sin x|)$, 则 $f(0) = 0$ 是 $F(x)$ 在 $x = 0$ 可导的

(A) 充分必要条件.

(B) 充分条件但非必要条件.

(C) 必要条件但非充分条件.

(D) 既非充分条件又非必要条件.

解 由于 $F(x) = f(x)(1 + |\sin x|) = f(x) + f(x)|\sin x|$, 而 $f(x)$ 可导, 则 $F(x)$ 在 $x = 0$ 可导的充要条件是 $f(x)|\sin x|$ 在 $x = 0$ 可导. 令 $\varphi(x) = f(x)|\sin x|$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)|\sin x|}{x} = \begin{cases} f(0), & x \rightarrow 0^+ \\ -f(0), & x \rightarrow 0^- \end{cases}$$

从而 $f(0) = 0$ 是 $\varphi(x)$ 在 $x = 0$ 可导的充要条件, 故应选 (A).

【注】 由本题的分析过程也得到一条常用的结论: 设 $f(x) = \varphi(x)|x - a|$, 其 $\varphi(x)$ 在 $x = a$ 处连续, 则 $f(x)$ 在 $x = a$ 处可导的充要条件是 $\varphi(a) = 0$.

【例 4】 函数 $f(x) = (x^2 - x - 2)|x^3 - x|$ 不可导的点的个数是
(A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 0.

解 (方法一)
$$f(x) = (x^2 - x - 2)|x^3 - x|$$

$$= (x - 2)(x + 1)|x + 1||x - 1||x|$$

显然 $f(x)$ 不可导的点最多有三个, 即 $x = -1, x = 1, x = 0$.

对于 $x = 1, f(x) = (x - 2)(x + 1)|x + 1||x - 1||x| = |x - 1|\varphi(x)$,

其中 $\varphi(x) = (x - 2)(x + 1)|x + 1||x|$. 由于 $\varphi(1) = -4 \neq 0$, 由上题的注可知, $f(x)$ 在 $x = 1$ 处不可导. 同理可知, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导, 而在 $x = -1$ 处可导, 故应选 (B).

(方法二) $f(x) = (x^2 - x - 2)|x^3 - x| = (x - 2)(x + 1)|x + 1||x - 1||x|$.

显然 $f(x)$ 不可导的点最多有三个, 即 $x = -1, x = 1, x = 0$.

我们知道 $|x|$ 在 $x = 0$ 处不可导, 而 $x|x|$ 在 $x = 0$ 处可导. 由此可知 $f(x) = (x - 2)(x + 1)|x + 1||x - 1||x|$ 在 $x = 0, x = 1$ 处不可导, 而在 $x = -1$ 处可导, 故应选 (B).

【例 5】 设 $f(x)$ 在点 $x = a$ 处可导, 则函数 $|f(x)|$ 在点 $x = a$ 处不可导的充分条件是

(A) $f(a) = 0$, 且 $f'(a) = 0$.

(B) $f(a) = 0$, 且 $f'(a) \neq 0$.

(C) $f(a) > 0$, 且 $f'(a) > 0$.

(D) $f(a) < 0$, 且 $f'(a) < 0$.

解 (方法一) 排除法

若令 $f(x) = (x - a)^2$, 显然 $f(a) = 0, f'(a) = 0$, 但 $|f(x)| = (x - a)^2$ 在 $x = a$ 可导, 则 (A) 不正确.

若 $f(a) > 0$, 由于 $f(x)$ 在 $x = a$ 处可导, 则 $f(x)$ 在 $x = a$ 处连续, 从而在 $x = a$ 的某邻域内 $f(x) > 0$, 此时

$$|f(x)| = f(x)$$



$|f(x)|$ 与 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导性相同, 故(C) 不正确.

同理(D) 不正确, 故应选(B).

(方法二) 直接法 直接证明(B) 正确.

令 $\varphi(x) = |f(x)|$, 由于 $f(a) = 0$, 故

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x)| - |f(a)|}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x)|}{x - a} \\ &= \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{|f(x)|}{x - a} \\ -\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{|f(x)|}{x - a} \end{cases} = \begin{cases} |f'(a)|, & x \rightarrow a^+ \\ -|f'(a)|, & x \rightarrow a^- \end{cases}\end{aligned}$$

即 $\varphi'_+(a) = |f'(a)|$, $\varphi'_-(a) = -|f'(a)|$.

由于 $f'(a) \neq 0$, 故 $\varphi'_+(a) \neq \varphi'_-(a)$, 则 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处不可导, 故应选(B).

【注】 在本题基础上对函数 $f(x)$ 和 $|f(x)|$ 可导性之间的关系归纳如下:

1. $f(x)$ 可导 $\xleftrightarrow{\text{不一定}} |f(x)|$ 可导. 反例分别是 $f(x) = x$ 和 $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$.

2. 设 $f(x)$ 连续,

若 $f(x_0) \neq 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 处可导 $\Leftrightarrow |f(x)|$ 在 x_0 处可导;

若 $f(x_0) = 0$, 则 $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow |f(x)|$ 在 x_0 处可导.

【例 6】 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + |x|^{3n}}$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内

(A) 处处可导.

(B) 恰有一个不可导点.

(C) 恰有两个不可导点.

(D) 至少有三个不可导点.

解 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + |x|^{3n}} = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ |x|^3, & |x| > 1 \end{cases}$

显然 $f(x)$ 为偶函数, 不可导的点只可能为 $x = \pm 1$, 只需讨论 $x = 1$.

$$f'_-(1) = 0, \quad f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$$

则 $f(x)$ 在 $x = 1$ 不可导, 从而在 $x = -1$ 也不可导, 故应选(C).

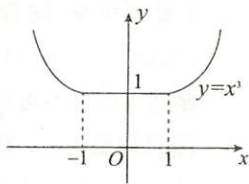


图 2-3

【注】 求得 $f(x)$ 表达式后画图易得 $f'_-(1) = 0$ 和 $f'_+(1) = 3$, 则 $f(x)$ 在 $x = 1$ 不可导.

【例 7】 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上二阶可导, $f(0) = 0$,

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

(1) 确定 a 使 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续;

(2) 证明对以上确定的 a , $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有连续一阶导数.



解 (1) 显然 $g(x)$ 在 $x \neq 0$ 处连续, 而 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0)$, 因此当 $a = f'(0)$ 时, $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续.

(2) 当 $x \neq 0$ 时, $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$, 且 $g'(x)$ 连续.

$$\begin{aligned} \text{当 } x = 0 \text{ 时, } g'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{x} - f'(0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f'(0)x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{2x} \\ &= \frac{f''(0)}{2}, \end{aligned} \quad (\text{导数定义})$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} g'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(f'(x) - f'(0)) + xf'(0) - f(x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - xf'(0)}{x^2} \\ &= f''(0) - \frac{f''(0)}{2} = \frac{f''(0)}{2} = g'(0), \end{aligned}$$

则 $g'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 故 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有连续的一阶导数.

题型二 导数的几何意义

【例 1】 曲线 $\tan\left(x + y + \frac{\pi}{4}\right) = e^y$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线方程为_____.

解 等式 $\tan\left(x + y + \frac{\pi}{4}\right) = e^y$ 两端对 x 求导得

$$\sec^2\left(x + y + \frac{\pi}{4}\right)(1 + y') = e^y y'$$

将 $x = 0, y = 0$ 代入上式得 $y'(0) = -2$, 则该曲线在点 $(0, 0)$ 处的切线方程为 $y = -2x$.

【例 2】 曲线 $\begin{cases} x = \arctan t \\ y = \ln \sqrt{1+t^2} \end{cases}$ 上对应于 $t = 1$ 的点处的法线方程为_____.

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}} = t$, 则该曲线上对应于 $t = 1$ 的点处的法线斜率为 -1 , 而当 $t = 1$ 时,

$x = \frac{\pi}{4}, y = \frac{1}{2} \ln 2$, 则所求法线方程为

$$y - \frac{1}{2} \ln 2 = -\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

即 $x + y = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$.



【例 3】 已知曲线的极坐标方程是 $r = 1 - \cos \theta$, 求该曲线上对应于 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 处的切线和法线的直角坐标方程.

解 由 $r = 1 - \cos \theta$ 可知该曲线的参数方程为 $\begin{cases} x = (1 - \cos \theta) \cos \theta \\ y = (1 - \cos \theta) \sin \theta \end{cases}$, 则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2 \theta + (1 - \cos \theta) \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta - \sin \theta (1 - \cos \theta)}$$

将 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 代入上式得该曲线上对应于 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 处的切线的斜率为 $k = -1$. 而当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, $x = 0, y = 1$. 则该曲线上对应于 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 处的切线和法线的直角坐标方程分别为 $y - 1 = -x$ 和 $y - 1 = x$.

【例 4】 曲线 $y = x^2$ 与曲线 $y = a \ln x (a \neq 0)$ 相切, 则 $a =$

- (A) $4e$. (B) $3e$. (C) $2e$. (D) e .

解 由曲线 $y = x^2$ 与曲线 $y = a \ln x (a \neq 0)$ 相切可知, $\begin{cases} x^2 = a \ln x \\ 2x = \frac{a}{x} \end{cases}$, 由此解得 $a = 2e$,

故应选 (C).

【注】 若两曲线相切, 则在切点处函数值相等且导数值相等.

题型三 导数与微分的计算

(一) 复合函数求导法

【例 1】 设 $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, 则 $f''(0) =$ _____.

解 应填 0.

因为 $f(x)$ 为奇函数, $f'(x)$ 为偶函数, $f''(x)$ 为奇函数, 则 $f''(0) = 0$.

【例 2】 已知 $y = f\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)$, $f'(x) = \arctan x^2$, 则 $\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=0} =$ _____.

解 $\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=0} = f'\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)\left(\frac{12}{(3x+2)^2}\right)\bigg|_{x=0} = f'(-1) \times 3 = 3 \arctan 1 = \frac{3}{4}\pi$.

【例 3】 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ x^4, & x < 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} -\sqrt{x}, & x > 0 \\ x^2, & x \leq 0 \end{cases}$, 若 $y = f(g(x))$, 则

- (A) $\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=1} = 1$. (B) $\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=1}$ 不存在. (C) $\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=0} = 0$. (D) $\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=0}$ 不存在.

解 由于 $g(1) = -1, g'(1) = \frac{-1}{2\sqrt{x}}\bigg|_{x=1} = -\frac{1}{2}, f'(-1) = 4x^3\bigg|_{x=-1} = -4$, 故



$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} = f'(-1) \cdot g'(1) = \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-4) = 2$$

显然 $g'(0)$ 不存在, 但由此不能断定 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$ 不存在. 事实上

$$y = f(g(x)) = \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ x^4, & x \leq 0 \end{cases}$$

则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 0$. 故应选(C).

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

【注】(1) 读者不难验证: 若 $y = g(f(x))$, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$ 不存在.

(2) 设 $y = f(u)$, $u = g(x)$, $u_0 = g(x_0)$, 如果 $g'(x_0)$ 和 $f'(u_0)$ 都存在, 则 $y = f(g(x))$ 在 x_0 处可导, 且 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = f'(u_0) \cdot g'(x_0)$; 如果 $g'(x_0)$ 和 $f'(u_0)$ 至少有一个不存在, 则 $y = f(g(x))$ 在 x_0 处并非一定不可导, 此时, 先求出复合函数 $y = f(g(x))$ 的表达式, 然后再进一步考察 $y = f(g(x))$ 在 x_0 处的可导性.

【例 4】设 $\varphi(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 函数 $f(x)$ 可导, 求 $F(x) = f(\varphi(x))$ 的导数.

解 $F(x) = f(\varphi(x)) = \begin{cases} f(x^3 \sin \frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ f(0), & x = 0 \end{cases}$

当 $x \neq 0$ 时, $F'(x) = f'(x^3 \sin \frac{1}{x}) \left(3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x} \right)$.

当 $x = 0$ 时, $F(x)$ 为 $f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$ 的复合, 且 $\varphi(0) = 0$. 由题设 $f'(0)$ 存在, 若 $\varphi'(0)$ 存在, 则由复合函数求导法知 $F'(0) = f'(0)\varphi'(0)$, 而

$$\varphi'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$$

故 $F'(0) = f'(0) \times 0 = 0$.

【注】
$$\begin{aligned} F'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f\left(x^3 \sin \frac{1}{x}\right) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f\left(x^3 \sin \frac{1}{x}\right) - f(0)}{x^3 \sin \frac{1}{x}} \cdot \frac{x^3 \sin \frac{1}{x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f\left(x^3 \sin \frac{1}{x}\right) - f(0)}{x^3 \sin \frac{1}{x}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sin \frac{1}{x}}{x} \\ &= f'(0) \times 0 = 0. \end{aligned}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



这是一种“经典”的错误,原因是极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f\left(x^3 \sin \frac{1}{x}\right) - f(0)}{x^3 \sin \frac{1}{x}}$ 不存在,因为求极限的函

数在 $x = 0$ 的任何去心邻域内都有没定义的点 $x = \frac{1}{n\pi}$ (n 充分大).

(二) 隐函数求导法

【例 1】 设 $y = y(x)$ 由 $y = \tan(x + y)$ 所确定,试求 y', y'' .

解 等式 $y = \tan(x + y)$ 两端对 x 求导得

$$\begin{aligned} y' &= \sec^2(x + y)(1 + y') \\ &= [1 + \tan^2(x + y)](1 + y') \\ &= (1 + y'^2)(1 + y') \end{aligned} \quad (\text{利用原方程化简})$$

$$y' = -\frac{1}{y^2} - 1$$

$$y'' = \frac{2y'}{y^3} = -\frac{2}{y^3} \left(\frac{1}{y^2} + 1 \right)$$

【例 2】 设函数 $y = y(x)$ 由 $y - xe^y = 1$ 确定,试求 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0}$.

解 由 $y - xe^y = 1$ 知, $x = 0$ 时 $y = 1$, 且

$$y' - e^y - xy'e^y = 0 \quad ①$$

将 $x = 0, y = 1$ 代入上式得 $y'(0) = e$.

① 式两端对 x 求导得

$$y'' - y'e^y - y'e^y - x(y'e^y)' = 0$$

将 $x = 0, y = 1, y'(0) = e$ 代入上式得

$$y''(0) = 2e^2$$

【例 3】 设可导函数 $y = y(x)$ 由方程 $\sin x - \int_x^y \varphi(u) du = 0$ 确定,其中可导函数 $\varphi(u) > 0$, 且 $\varphi(0) = \varphi'(0) = 1$, 求 $y''(0)$.

解 在 $\sin x - \int_x^y \varphi(u) du = 0$ 中, 令 $x = 0$ 得 $\int_0^y \varphi(u) du = 0$, 又 $\varphi(u) > 0$, 则 $y = 0$.

等式 $\sin x - \int_x^y \varphi(u) du = 0$ 两端对 x 求导得

$$\cos x - [\varphi(y)y' - \varphi(x)] = 0 \quad ①$$

将 $x = 0, y = 0$ 代入 ① 式得 $y'(0) = 2$.

等式 ① 两端对 x 求导得

$$-\sin x - [\varphi'(y)y'^2 + \varphi(y)y'' - \varphi'(x)] = 0$$

将 $x = 0, y = 0, y'(0) = 2$ 代入上式得

$$y''(0) = -3$$



(三) 参数方程求导法(数学三不要求)

公式: $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t)}{x'^3(t)}.$

方法: 一阶导数代公式, 二阶导数利用 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{y'(t)}{x'(t)} \right) \frac{1}{x'(t)}.$

【例 1】 设 $f''(t) \neq 0$, 有 $\begin{cases} x = f'(t) \\ y = tf'(t) - f(t) \end{cases}$, 求 $\frac{d^2y}{dx^2}.$

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{f'(t) + tf''(t) - f'(t)}{f''(t)} = t,$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(t) = \frac{d}{dt}(t) \frac{dt}{dx} = 1 \times \frac{1}{x'(t)} = \frac{1}{f''(t)}.$$

【注】 本题中求二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 不能套公式, 条件不够.

【例 2】 设 $y = y(x)$ 由 $\begin{cases} x = 3t^2 + 2t + 3 \\ e^y \sin t - y + 1 = 0 \end{cases}$ 确定, 求 $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=0}.$

解 本题最简单的方法是利用公式

$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=0} = \frac{y''(0)x'(0) - x''(0)y'(0)}{x'^3(0)}$$

由 $x = 3t^2 + 2t + 3$ 知 $x' = 6t + 2, x'' = 6$, 则

$$x'(0) = 2, x''(0) = 6$$

由 $e^y \sin t - y + 1 = 0$ 知 $y(0) = 1$, 且

$$e^y y' \sin t + e^y \cos t - y' = 0$$

$$(e^y y') \cos t + (e^y y')' \sin t + e^y y' \cos t - e^y \sin t - y'' = 0$$

令 $t = 0$, 得 $y'(0) = e, y''(0) = 2e^2$. 于是

$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=0} = \frac{2e^2 - 3e}{4}$$

【注】 本题是隐函数与参数方程求导的一种综合题, 直接代公式比较简单.

(四) 反函数求导法

【例】 设 $y = f(x)$ 的反函数是 $x = \varphi(y)$, 且 $f(x) = \int_1^{2x} e^t dt + 1$, 则 $\varphi''(1) = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 由反函数求导法得

$$\varphi'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{f'(x)}$$

上式两端对 y 求导得



$$\varphi''(y) = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{f'(x)} \right] \cdot \frac{dx}{dy} = - \frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} \cdot \frac{1}{f'(x)}$$

由 $f(x) = \int_1^{2x} e^{t^2} dt + 1$ 知, $x = \frac{1}{2}$ 时 $y = 1$, 且

$$f'(x) = 2e^{4x^2}, f''(x) = 16xe^{4x^2}$$

$$\text{则 } \varphi''(1) = - \frac{f''(\frac{1}{2})}{[f'(\frac{1}{2})]^3} = - \frac{8e}{8e^3} = - \frac{1}{e^2}.$$

【注】这里要注意 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$, 但 $\frac{d^2x}{dy^2} \neq \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}}$.

(五) 对数求导法

对于幂指函数, 连乘、连除, 开方、乘方等形式的函数一般采用对数求导法.

【例 1】设 $y = (1+x^2)^{\sin x}$, 求 y' .

解

$$\ln y = \sin x \ln(1+x^2)$$

$$\frac{y'}{y} = \cos x \ln(1+x^2) + \frac{2x \sin x}{1+x^2}$$

$$y' = (1+x^2)^{\sin x} \left[\cos x \ln(1+x^2) + \frac{2x \sin x}{1+x^2} \right]$$

【例 2】设 $y = \sqrt[3]{\frac{(x+1)(x+2)}{x(1+x^2)}}$, 求 y' .

解

$$\ln |y| = \frac{1}{3} [\ln |x+1| + \ln |x+2| - \ln |x| - \ln(1+x^2)]$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x} - \frac{2x}{1+x^2} \right)$$

$$y' = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{(x+1)(x+2)}{x(1+x^2)}} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x} - \frac{2x}{1+x^2} \right)$$

(六) 高阶导数

常用方法:

- (1) 代公式;
- (2) 求一阶 y' 、二阶 y'' , 归纳 n 阶导数 $y^{(n)}$;
- (3) 利用泰勒级数(或泰勒公式):

① 泰勒级数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

② 泰勒公式

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$



【例 1】 设 $f(x) = \frac{x}{2x^2 - 7x + 6}$, 求 $f^{(n)}(x)$.

$$\text{解} \quad f(x) = \frac{x}{2x^2 - 7x + 6} = \frac{x}{(2x-3)(x-2)} = \frac{2}{x-2} - \frac{3}{2x-3},$$

$$f^{(n)}(x) = \left(\frac{2}{x-2}\right)^{(n)} - \left(\frac{3}{2x-3}\right)^{(n)}$$

$$\text{令 } \varphi(x) = \frac{1}{x-2} = (x-2)^{-1}, \text{ 则}$$

$$\varphi'(x) = (-1)(x-2)^{-2}, \varphi''(x) = (-1)(-2)(x-2)^{-3}$$

$$\varphi^{(n)}(x) = (-1)^n n! (x-2)^{-(n+1)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}$$

$$\text{同理可得 } \left(\frac{1}{2x-3}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n 2^n n!}{(2x-3)^{n+1}}.$$

$$\text{则 } f^{(n)}(x) = \frac{2(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}} - \frac{3(-1)^n 2^n n!}{(2x-3)^{n+1}} = (-1)^n n! \left[\frac{2}{(x-2)^{n+1}} - \frac{3 \cdot 2^n}{(2x-3)^{n+1}} \right].$$

【例 2】 设 $f(x) = e^x \sin x$, 求 $f^{(n)}(x)$.

$$\text{解} \quad f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x (\sin x + \cos x) = \sqrt{2} e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$f^{(n)}(x) = (\sqrt{2})^n e^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)$$

【例 3】 设 $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$, 求 $f^{(n)}(x)$.

$$\text{解} \quad f(x) = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$$

$$f'(x) = -2\sin 2x \cos 2x = -\sin 4x$$

$$f^{(n)}(x) = -4^{n-1} \sin\left[4x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right]$$

【例 4】 求函数 $f(x) = x^2 \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 $n(n>2)$ 阶导数.

$$\text{解 (方法一)} \quad \text{利用公式 } (uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

令 $u = x^2, v = \ln(1+x)$, 则

$$u' = 2x, u'' = 2, u^{(k)} = 0 (k \geq 3)$$

$$u(0) = 0, u'(0) = 0, u''(0) = 2, u^{(k)}(0) = 0 (k \geq 3)$$

$$f^{(n)}(0) = C_n^2 u^{(2)}(0) v^{(n-2)}(0)$$

$$\text{又} \quad v' = \frac{1}{1+x} = (x+1)^{-1}, v'' = (-1)(x+1)^{-2}$$

$$v''' = (-1)(-2)(x+1)^{-3}, v^{(n)} = (-1)^{n-1} (n-1)! (x+1)^{-n}$$

$$v^{(n-2)} = (-1)^{n-3} (n-3)! (x+1)^{-(n-2)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-3)!}{(x+1)^{n-2}}$$

$$v^{(n-2)}(0) = (-1)^{n-1} (n-3)!$$

$$\text{故 } f^{(n)}(0) = \frac{n(n-1)}{2!} 2(-1)^{n-1} (n-3)! = \frac{(-1)^{n-1} n!}{n-2}.$$



$$\begin{aligned}
 \text{(方法二)} \quad f(x) &= x^2 \left[x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \cdots \right] \\
 &= x^3 - \frac{x^4}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^{n+2}}{n} + \cdots
 \end{aligned}$$

等式右端 x 的 $n(n \geq 3)$ 次项系数 $a_n = \frac{(-1)^{n-3}}{(n-2)} = \frac{(-1)^{n-1}}{n-2}$, 又 $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, 故

$$f^{(n)}(0) = a_n n! = \frac{(-1)^{n-1} n!}{(n-2)}$$

第二节 导数应用

一、考试内容要点精讲

(一) 微分中值定理

罗尔定理: 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b)$, 那么至少存在一个 $\xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) = 0$.

拉格朗日定理: 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 那么至少存在一个 $\xi \in (a, b)$, 使 $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$.

柯西定理: 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $g'(x) \neq 0$, 那么至少存在一个 $\xi \in (a, b)$, 使 $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

泰勒定理: (拉格朗日余项)

设 $f(x)$ 在区间 I 上 $n+1$ 阶可导, $x_0 \in I$, 那么 $\forall x \in I$, 至少存在一个 ξ 使得

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

其中 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, ξ 在 x_0 与 x 之间.

【注】 (1) 以上四大中值定理, 特别是拉格朗日中值定理建立了函数在区间上的变化 (改变量) 与函数在该区间内一点处导数的关系, 从而使我们能够利用导数来研究函数在区间上的整体性态.

(2) 四大中值定理的关系如下:

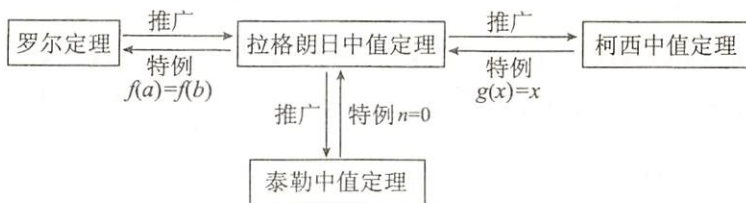


图 2-4



(二) 极值与最值

1. 极值的概念

设 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义, 如果对于该去心邻域内任何 x , 恒有 $f(x) < f(x_0)$ (或 $f(x) > f(x_0)$), 则称 x_0 为 $f(x)$ 的一个**极大值点** (或**极小值点**), 称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的**极大值** (或**极小值**). 极大(小)值统称为**极值**, 极大(小)值点统称为**极值点**.

【注】 (1) 函数在区间 $[a, b]$ 上的极值只能在开区间 (a, b) 上取得; 端点 $x = a, x = b$ 处不可能取得极值.

(2) 若函数在闭区间 $[a, b]$ 上的最大值(或最小值)在开区间 (a, b) 上某点取得, 那么, 函数在该点处必取得极大值(或极小值).

2. 极值的必要条件

设 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导, 且 x_0 为 $f(x)$ 的极值点, 则 $f'(x_0) = 0$.

通常把导数为零的点称为函数的**驻点**. 由极值的必要性可知, 对可导函数而言, 极值只可能在驻点上取得, 极值点必为驻点, 但驻点并不一定是极值点. 而对一般函数而言, 极值只可能在两种点上取得, 这两种点是驻点和导数不存在的点, 而要判断在这两种点上是否一定取得极值需利用下列充分条件.

3. 极值的充分条件

1) 第一充分条件

设 $f'(x_0) = 0$ (或 $f(x)$ 在 x_0 处连续), 且在 x_0 的某去心邻域 $\dot{U}(x_0, \delta)$ 内可导.

(1) 若 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时, $f'(x) > 0$, 而 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值;

(2) 若 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时, $f'(x) < 0$, 而 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值;

(3) 若 $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$ 时, $f'(x)$ 的符号保持不变, 则 $f(x)$ 在 x_0 处没有极值.

2) 第二充分条件

若 $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极值, 其中当 $f''(x_0) > 0$ 时取得极小值, 当 $f''(x_0) < 0$ 时取得极大值.

3) 第三充分条件

若 $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0$, 则

当 n 为偶数时, $f(x)$ 在 x_0 处有极值, 其中 $f^{(n)}(x_0) > 0$ 时取得极小值, $f^{(n)}(x_0) < 0$ 时取得极大值;

当 n 为奇数时, $f(x)$ 在 x_0 处无极值.

4. 函数的最值

连续函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最值的求法.

第一步: 求出 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内的驻点和不可导的点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$;

第二步: 求出 $f(x)$ 在点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 和区间端点 a, b 处的函数值 $f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n), f(a), f(b)$;

第三步: 比较以上各点函数值, 其中最大的即为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值, 最小的即为



$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值.

【注】 当闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内仅有唯一极值点, 若在该点 $f(x)$ 取得极大值(或极小值), 则它也是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值(或最小值).

(三) 曲线的凹向与拐点

1. 曲线的凹向

定义 设 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 如果对 I 上任意两点 x_1, x_2 , 恒有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

则称 $f(x)$ 在 I 上的图形是凹的; 如果恒有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

则称 $f(x)$ 在 I 上的图形是凸的.

判定 若在区间 I 上 $f''(x) > 0 (< 0)$, 则曲线 $y = f(x)$ 在 I 上是凹(凸)的.

2. 曲线的拐点

定义 如果连续曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 邻近两侧凹凸性相反, 则称点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

判定

(1) 必要条件 设 $y = f(x)$ 在点 x_0 处二阶可导, 且点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点, 则 $f''(x_0) = 0$.

(2) 第一充分条件 设 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内二阶可导, 且 $f''(x_0) = 0$ (或 $f(x)$ 在 x_0 处连续).

① 若 $f''(x)$ 在 x_0 的左、右两侧异号, 则点 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点;

② 若 $f''(x)$ 在 x_0 的左、右两侧同号, 则点 $(x_0, f(x_0))$ 不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(3) 第二充分条件 设 $y = f(x)$ 在点 x_0 处三阶可导, 且 $f''(x_0) = 0$.

① 若 $f'''(x_0) \neq 0$, 则点 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点;

② 若 $f'''(x_0) = 0$, 则此方法不能判定 $(x_0, f(x_0))$ 是否为曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(4) 第三充分条件 若 $f''(x_0) = f'''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, 但 $f^{(n)}(x_0) \neq 0 (n \geq 3)$, 则当 n 为奇数时, 点 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点, 当 n 为偶数时, 点 $(x_0, f(x_0))$ 不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

【注】 将极值点的必要条件和充分条件中的导数阶数提高一阶便是拐点的一个必要条件和三个充分条件.

(四) 曲线的渐近线

1. 水平渐近线

若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ (或 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$, 或 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$), 那么 $y = A$ 是 $y = f(x)$ 的水平渐近线.

2. 垂直渐近线

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ (或 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$, 或 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$), 那么 $x = x_0$ 是 $y = f(x)$ 的垂直渐近线.



近线.

3. 斜渐近线

若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a, \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b$ (或 $x \rightarrow -\infty$ 或 $x \rightarrow +\infty$), 那么 $y = ax + b$ 是 $y = f(x)$ 的斜渐近线.

(五) 平面曲线的曲率(数三不要求)

1. 曲率的定义

$$K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \right|$$

2. 曲率的计算

1) 若曲线由直角坐标方程 $y = y(x)$ 给出, 则

$$K = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

2) 若曲线由参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ 给出, 则

$$K = \frac{|y''x' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

3. 曲率圆与曲率半径

曲率半径 $R = \frac{1}{K}$.

二、常考题型的方法与技巧

题型一 函数的单调性、极值与最值

【例1】求函数 $f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t)e^{-t^2} dt$ 的单调区间与极值.

解 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 由于

$$f(x) = x^2 \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt - \int_1^{x^2} te^{-t^2} dt \quad (\text{偶函数})$$

$$f'(x) = 2x \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt + 2x^3 e^{-x^4} - 2x^3 e^{-x^4} = 2x \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt$$

所以 $f(x)$ 的驻点为 $x = 0, \pm 1$. 列表讨论如下:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	极小	$\nearrow$	极大	$\searrow$	极小	$\nearrow$

因此, $f(x)$ 的单调增加区间为 $(-1, 0)$ 及 $(1, +\infty)$, 单调减少区间为 $(-\infty, -1)$ 及



$(0, 1)$; 极小值为 $f(\pm 1) = 0$, 极大值为 $f(0) = \int_0^1 te^{-t^2} dt = \frac{1}{2}(1 - e^{-1})$.

【例 2】 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $y^3 + xy^2 + x^2y + 6 = 0$ 确定, 求 $f(x)$ 的极值.

解 方程 $y^3 + xy^2 + x^2y + 6 = 0$ 两端对 x 求导得

$$3y^2y' + y^2 + 2xyy' + 2xy + x^2y' = 0 \quad (1)$$

在 (1) 式中令 $y' = 0$, 得 $y^2 + 2xy = 0$, 由此可得, $y = 0, y = -2x$. 显然 $y = 0$ 不满足原方程, 将 $y = -2x$ 代入原方程 $y^3 + xy^2 + x^2y + 6 = 0$, 得 $-6x^3 + 6 = 0$, 解得 $x = 1, f(1) = -2, f'(1) = 0$.

对 (1) 式两端再对 x 求导得

$$6yy'^2 + 3y^2y'' + 4yy' + 2xyy'' + 2xyy'' + 2y + 4xy' + x^2y'' = 0 \quad (2)$$

将 $x = 1, f(1) = -2, f'(1) = 0$ 代入 (2) 式得 $f''(1) = \frac{4}{9} > 0$, 则函数 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极小值, 且 $f(1) = -2$.

【例 3】 设 $f(x)$ 有二阶连续导数, 且 $f'(0) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} = 1$, 则

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

(C) $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, $(0, f(0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

解 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} = 1 > 0$, 由极限的保号性知在 $x = 0$ 的某去心邻域内 $\frac{f''(x)}{|x|} > 0$, 即 $f''(x) > 0$, 从而 $f'(x)$ 单调增. 又 $f'(0) = 0$, 则在 $x = 0$ 的左半邻域 $f'(x) < 0$, 而在 $x = 0$ 的右半邻域内 $f'(x) > 0$, 从而 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取极小值, 故选 (B).

【注】 若将题设中条件 $f'(0) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} = 1$ 改为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{x} = -1$, 则本题应选 (C).

【例 4】 设 $f(x)$ 二阶导数连续, 且 $(x-1)f''(x) - 2(x-1)f'(x) = 1 - e^{1-x}$. 试问:

(1) 若 $f(x)$ 在 $x = a (a \neq 1)$ 取得极值, 是极小值还是极大值?

(2) 若 $f(x)$ 在 $x = 1$ 取得极值, 是极小值还是极大值?

解 (1) 由于 $x = a$ 为极值点, 则 $f'(a) = 0$. 在等式

$$(x-1)f''(x) - 2(x-1)f'(x) = 1 - e^{1-x}$$

中令 $x = a$ 得

$$(a-1)f''(a) - 2(a-1)f'(a) = 1 - e^{1-a}$$

即

$$(a-1)f''(a) = 1 - e^{1-a}$$

故

$$f''(a) = \frac{1 - e^{1-a}}{a-1} > 0 \quad (a \neq 1)$$

从而 $f(x)$ 在 $x = a$ 取极小值.

(2) 由 $(x-1)f''(x) - 2(x-1)f'(x) = 1 - e^{1-x}$ 知

$$f''(x) - 2f'(x) = \frac{1 - e^{1-x}}{x-1}$$



从而 $\lim_{x \rightarrow 1} f''(x) - 2 \lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - e^{1-x}}{x-1} = 1$

则 $f''(1) = 1 > 0$, 又 $f'(1) = 0$ 故 $x = 1$ 为 $f(x)$ 的极小值点.

【例 5】 设 $f(x)$ 二阶可导, 且 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h^2} = a \neq 0$, 试讨论 $f(x)$

在 x_0 点的极值.

解 (方法一) 由 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h^2}$ 存在, $f(x)$ 二阶可导, 得 $f(x)$ 连续.

又由 $\lim_{h \rightarrow 0} h^2 = 0$ 知 $f'(x_0) = 0$, 即 x_0 为驻点, 从而

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h^2} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0+h)}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{2h} \\ &= \frac{1}{2} f''(x_0) = a \end{aligned}$$

故当 $a > 0$ 时, x_0 为极小值点; 当 $a < 0$ 时, x_0 为极大值点.

(方法二) 同方法一知 $f'(x_0) = 0$, 则

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h^2} = a \neq 0$$

由泰勒公式可知

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + o(h^2) \\ &= f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + o(h^2) \end{aligned}$$

则

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + o(h^2)}{h^2} = \frac{f''(x_0)}{2!} = a \neq 0$$

则当 $a > 0$ 时, x_0 为极小值点; 当 $a < 0$ 时, x_0 为极大值点.

(方法三) 同方法一知 $f'(x_0) = 0$, 则

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h^2} = a \neq 0$$

不妨设 $a > 0$, 由极限保号性知, 当 h 的绝对值充分小时,

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h^2} > 0, \text{ 即 } f(x_0+h) - f(x_0) > 0$$

由极值定义知 x_0 为 $f(x)$ 极小值点, 同理可得当 $a < 0$ 时 x_0 为 $f(x)$ 极大值点.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



题型二 曲线的凹向、拐点、渐近线及曲率

【例 1】 设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x) + [f'(x)]^2 = \sin x$, 且 $f'(0) = 0$, 则

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

(C) 点 $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, 点 $(0, f(0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

解 在等式 $f''(x) + [f'(x)]^2 = \sin x$ 中, 令 $x = 0$, 得 $f''(0) = 0$.

等式 $f''(x) + [f'(x)]^2 = \sin x$ 两端对 x 求导得

$$f'''(x) + 2f'(x)f''(x) = \cos x$$

上式中令 $x = 0$, 得 $f'''(0) = 1 > 0$, 则点 $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点, 故应选 (C).

【例 2】 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \frac{1}{3}t^3 + t + \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3}t^3 - t + \frac{1}{3} \end{cases}$ 确定, 求 $y = y(x)$ 的极值和曲

线 $y = y(x)$ 的凹凸区间及拐点.

解 令 $\frac{dy}{dx} = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} = 0$, 得 $t = \pm 1$. 当 $t = 1$ 时, $x = \frac{5}{3}$; 当 $t = -1$ 时, $x = -1$.

$$\text{令 } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{4t}{(t^2+1)^2}}{t^2+1} = \frac{4t}{(t^2+1)^3} = 0, \text{ 得 } t = 0, \text{ 即 } x = \frac{1}{3}.$$

列表如下:

t	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, \frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3}, \frac{5}{3})$	$\frac{5}{3}$	$(\frac{5}{3}, +\infty)$
y'	+	0	-	-	-	0	+
y''	-	-	-	0	+	+	+

由此可知, 函数 $y(x)$ 的极大值为 $y(-1) = y|_{t=-1} = 1$, 极小值为 $y(\frac{5}{3}) = y|_{t=1} = -\frac{1}{3}$.

曲线 $y = y(x)$ 的凹区间为 $(\frac{1}{3}, +\infty)$, 凸区间为 $(-\infty, \frac{1}{3})$. 由于 $y(\frac{1}{3}) = y|_{t=0} = \frac{1}{3}$,

所以曲线 $y = y(x)$ 的拐点为 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

【例 3】 曲线 $y = \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$ 的斜渐近线方程为_____.

解 (方法一) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{x\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}} = 1 = a,$



$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - ax) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}} - x\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right]}{\sqrt{x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} \quad \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}} - 1 \sim \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x} \right) \\
 &= \frac{3}{2} = b,
 \end{aligned}$$

则斜渐近线方程为 $y = x + \frac{3}{2}$.

(方法二) 由斜渐近线的定义可知, 如果

$$f(x) = ax + b + o(x)$$

这里 $a \neq 0, \lim_{x \rightarrow \infty} o(x) = 0$, 则曲线 $y = f(x)$ 有斜渐近线 $y = ax + b$.

$$\begin{aligned}
 \text{又 } y &= \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}} = x \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}} \\
 &= x \left(1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \quad ((1+x)^a \text{ 的泰勒公式}) \\
 &= x + \frac{3}{2} + x \cdot o\left(\frac{1}{x}\right),
 \end{aligned}$$

则曲线 $y = \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$ 的斜渐近线为 $y = x + \frac{3}{2}$.

【例 4】曲线 $y = e^{x+\frac{1}{x}} \arctan \frac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)}$ 的渐近线条数是

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

解 由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x+\frac{1}{x}} \arctan \frac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)} = +\infty$, 则 $x = 0$ 为其垂直渐近线.

由于 $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x+\frac{1}{x}} \arctan \frac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)} = 0$, 则 $y = 0$ 为水平渐近线.

由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} e^{\frac{1}{x}} \arctan \frac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)} = +\infty$ (不存在), 则原曲线无斜渐近线.

应选 (B).

【例 5】求曲线 $y = x \arctan x$ 的渐近线.

解 (方法一) 显然曲线 $y = x \arctan x$ 无水平渐近线和垂直渐近线.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} = a \\
 b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \arctan x - \frac{\pi}{2} x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\arctan x - \frac{\pi}{2} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+x^2} = -1 = b
 \end{aligned}$$



所以 $y = ax + b = \frac{\pi}{2}x - 1$ 是 $x \rightarrow +\infty$ 时的斜渐近线.

同理, $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$ 是 $x \rightarrow -\infty$ 时的斜渐近线.

(方法二) 先求曲线 $y = x \arctan x$ 在 $+\infty$ 一侧的斜渐近线,

$$\begin{aligned} y &= x \arctan x = x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x} \right) & \left(\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} (x > 0) \right) \\ &= \frac{\pi}{2}x - x \arctan \frac{1}{x} \\ &= \frac{\pi}{2}x - 1 + \left(1 - x \arctan \frac{1}{x} \right), \end{aligned}$$

所以曲线 $y = x \arctan x$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时有斜渐近线为 $y = \frac{\pi}{2}x - 1$.

由于函数 $x \arctan x$ 是偶函数, 则曲线 $y = x \arctan x$ 关于 y 轴对称, 因此, 由 $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ 是该曲线在 $x \rightarrow +\infty$ 时的斜渐近线可知, $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$ 是该曲线在 $x \rightarrow -\infty$ 时的斜渐近线.

题型三 方程的根的存在性及个数

1. 存在性

方法 1: 零点定理;

方法 2: 罗尔定理.

2. 根的个数

方法 1: 单调性;

方法 2: 罗尔定理推论.

罗尔定理推论: 若在区间 I 上 $f^{(n)}(x) \neq 0$, 则方程 $f(x) = 0$ 在 I 上最多 n 个实根.

【例 1】 设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 为任意实数, 求证方程

$$a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx = 0$$

在 $[0, \pi]$ 内必有实根.

(证明) 令 $f(x) = a_1 \sin x + \frac{a_2}{2} \sin 2x + \dots + \frac{a_n}{n} \sin nx$, 则

$$f'(x) = a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx$$

$f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上满足罗尔定理条件, 由罗尔定理知存在 $c \in (0, \pi)$, 使 $f'(c) = 0$.

故原方程在 $[0, \pi]$ 内至少有一实根.

【例 2】 试讨论方程 $\ln x - \frac{x}{e} + 1 = 0$ 的实根个数.

(解) 令 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + 1, x \in (0, +\infty)$, 则 $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e}$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = e$.

当 $x \in (0, e)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调增. 当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调



减. 又 $f(e) = 1 > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, 则 $f(x)$ 在 $(0, e)$ 和 $(e, +\infty)$ 内各有一个零点, 故原方程有两个实根.

【例 3】 已知函数 $f(x) = \int_x^1 \sqrt{1+t^2} dt + \int_1^{x^2} \sqrt{1+t} dt$, 求 $f(x)$ 的零点个数.

解 (方法一) 由 $f(x) = \int_x^1 \sqrt{1+t^2} dt + \int_1^{x^2} \sqrt{1+t} dt$ 知

$$f'(x) = -\sqrt{1+x^2} + 2x\sqrt{1+x^2} = (2x-1)\sqrt{1+x^2}$$

令 $f'(x) = 0$ 得, $x = \frac{1}{2}$.

当 $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调减, $f(x)$ 在该区间最多一个零点.

当 $x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调增, $f(x)$ 在该区间最多一个零点.

$$\text{又 } f(-1) = \int_{-1}^1 \sqrt{1+t^2} dt = 2 \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx > 0,$$

$$\begin{aligned} f(0) &= \int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt + \int_1^0 \sqrt{1+t} dt \\ &= \int_0^1 (\sqrt{1+t^2} - \sqrt{1+t}) dx < 0, (\sqrt{1+t^2} < \sqrt{1+t}, t \in (0, 1)) \end{aligned}$$

则 $f(x)$ 在区间 $(-1, 0)$ 上至少有一个零点. 又 $f(1) = 0$, 则 $f(x)$ 共有两个零点.

(方法二) 由 $f(x) = \int_x^1 \sqrt{1+t^2} dt + \int_1^{x^2} \sqrt{1+t} dt$ 知

$$f'(x) = -\sqrt{1+x^2} + 2x\sqrt{1+x^2} = (2x-1)\sqrt{1+x^2}$$

令 $f'(x) = 0$ 得, $x = \frac{1}{2}$.

当 $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调减, $f(x)$ 在该区间最多一个零点.

当 $x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调增, $f(x)$ 在该区间最多一个零点.

又 $f(1) = 0$, 由 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{2}, +\infty)$ 单调增可知, $f(\frac{1}{2}) < 0$, 且

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

则 $f(x)$ 在 $(-\infty, \frac{1}{2})$ 上至少有一个零点, 综上所述 $f(x)$ 共有两个零点.

【例 4】 试证方程 $2^x - x^2 = 1$ 有且仅有三个实根.

证明 令 $f(x) = 2^x - x^2 - 1$, 则

$$f(0) = 0, f(1) = 0, f(2) = -1 < 0, f(5) = 2^5 - 25 - 1 = 6 > 0$$

因此 $f(x)$ 在 $(2, 5)$ 内至少有一个零点, 从而原方程至少有三个实根. 又

$$f'(x) = 2^x \ln 2 - 2x, f''(x) = 2^x \ln^2 2 - 2, f'''(x) = 2^x \ln^3 2 \neq 0$$

从而原方程最多三个实根, 故原题得证.



【例 5】 试确定方程 $x = ae^x (a > 0)$ 实根个数.

解 将原方程变形得 $xe^{-x} - a = 0$ (把参数 a 分离出来).

令 $f(x) = xe^{-x} - a (x > 0)$, 则

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 1$.

当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调增. 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调减.

又 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -a < 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{x}{e^x} - a) = -a < 0$, $f(1) = \frac{1}{e} - a$, 则

当 $a < \frac{1}{e}$ 时, 原方程有两个实根;

当 $a = \frac{1}{e}$ 时, 原方程有唯一实根;

当 $a > \frac{1}{e}$ 时, 原方程无实根.

【注】 这是一个带有参数的方程根的问题, 第一步将参数分离出来, 给求解带来方便, 这是一种常用方法.

【例 6】 设当 $x > 0$ 时, 方程 $kx + \frac{1}{x^2} = 1$ 有且仅有一个解, 试求 k 的取值范围.

解 (方法一) 设 $f(x) = kx + \frac{1}{x^2} - 1 (x > 0)$, 则 $f'(x) = k - \frac{2}{x^3}$.

(1) 若 $k \leq 0$ 时, 则 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调减. 又 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, 且当 $k < 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$; 当 $k = 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$, 所以, 当 $k \leq 0$ 时, 原方程在 $(0, +\infty)$ 内有且仅有一个解.

(2) 若 $k > 0$ 时, 令 $f'(x) = k - \frac{2}{x^3} = 0$, 得 $x = \sqrt[3]{\frac{2}{k}}$, 则在 $(0, \sqrt[3]{\frac{2}{k}})$ 上 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调减, 在 $(\sqrt[3]{\frac{2}{k}}, +\infty)$ 上 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调增. 又 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 所以, 当且仅当 $f(\sqrt[3]{\frac{2}{k}}) = 0$ 时, 原方程有且仅有一个解. 即

$$k \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{k}} + \frac{1}{(\sqrt[3]{\frac{2}{k}})^2} - 1 = 0$$

由上式解得 $k = \frac{2}{9}\sqrt{3}$.

综上所述, 当 $k \leq 0$ 或 $k = \frac{2}{9}\sqrt{3}$ 时原方程有且仅有一个解.

(方法二) 将原方程变形得 $k = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} (x > 0)$.

令 $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} (x > 0)$, 则



$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} = \frac{3-x^2}{x^4}.$$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \sqrt{3}$.

当 $x \in (0, \sqrt{3})$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调增.

当 $x \in (\sqrt{3}, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调减.

$$f(\sqrt{3}) = \frac{2}{9}\sqrt{3}, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2-1}{x^3} = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

由此得函数 $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}$ ($x > 0$) 的图形如图 2-5. 原

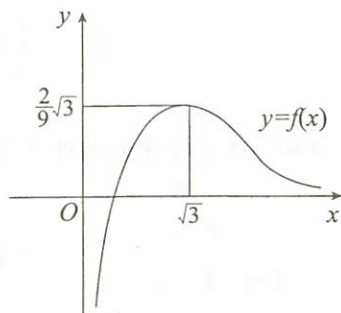


图 2-5

方程有且仅有一个实根的几何意义是直线 $y = k$ 和曲线 $y = f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}$ 有且仅有一个交点. 由图可知 $k = \frac{2}{9}\sqrt{3}$ 或 $k \leq 0$.

【例 7】 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可微, 且当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $0 < f(x) < 1$, $f'(x) \neq 1$. 试证在 $(0, 1)$ 内有且仅有一个 x , 使 $f(x) = x$.

证明 令 $F(x) = f(x) - x$, 则

$$F(0) = f(0) > 0, F(1) = f(1) - 1 < 0$$

由零点定理知, 方程 $F(x) = 0$ 在 $(0, 1)$ 内至少有一实根, 又 $F'(x) = f'(x) - 1 \neq 0$, 则 $F(x) = 0$ 最多一个实根, 原命题得证.

【例 8】 设 $f''(x) < 0$, $f(1) = 2$, $f'(1) = -3$, 求证: $f(x) = 0$ 在 $(1, +\infty)$ 有且仅有一个实根.

证明 (方法一) 由 $f''(x) < 0$ 知 $f'(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调减, 又 $f'(1) = -3 < 0$, 则当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, 从而 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调减, 方程 $f(x) = 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上最多一个实根.

由泰勒公式知, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-1)^2 \\ &= 2 - 3(x-1) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-1)^2 \\ &\leq 2 - 3(x-1) = 5 - 3x \end{aligned}$$

令 $x = 2$, 则 $f(2) \leq 5 - 6 = -1 < 0$.

又 $f(1) = 2 > 0$, 由零点定理知, 方程 $f(x) = 0$ 在 $(1, +\infty)$ 内有实根.

故 $f(x) = 0$ 在 $(1, +\infty)$ 有且仅有一个实根.

(方法二) 根的唯一性同方法一, 以下只证存在性.

$$\begin{aligned} f(2) - f(1) &= f'(c)(2-1) \quad (1 < c < 2) \\ &\leq f'(1)(2-1), \quad (f'(x) \text{ 递减}) \end{aligned}$$

即 $f(2) \leq f(1) + f'(1)(2-1) = 2 - 3 = -1 < 0$. 又 $f(1) = 2 > 0$, 由零点定理知, 方程 $f(x) = 0$ 在 $(1, +\infty)$ 内至少有一实根.



题型四 证明函数不等式

证明不等式常用的五种方法：

- (1) 单调性； (2) 最大最小值； (3) 拉格朗日中值定理；
(4) 泰勒公式； (5) 凹凸性.

【例 1】 设 $x \in (0, 1)$, 证明 $(1+x)\ln^2(1+x) < x^2$.

证明 令 $f(x) = x^2 - (1+x)\ln^2(1+x)$, 则 $f(0) = 0$, 且

$$f'(x) = 2x - \ln^2(1+x) - 2\ln(1+x), f'(0) = 0$$

$$f''(x) = 2 - \frac{2\ln(1+x)}{1+x} - \frac{2}{1+x}$$

$$= \frac{2}{1+x}[x - \ln(1+x)] > 0, x \in (0, 1)$$

则当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) > f'(0) = 0$, 从而 $f(x)$ 单调增, 于是 $f(x) > f(0) = 0$.
原命题得证.

【注】 本题证明中用到一个常用的基本不等式: 当 $x > 0$ 时, $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$.

【例 2】 求证: $\ln \frac{b}{a} > \frac{2(b-a)}{b+a} (0 < a < b)$.

证明 只要证 $(b+a)(\ln b - \ln a) > 2(b-a)$.

令 $f(x) = (x+a)(\ln x - \ln a) - 2(x-a), x \in [a, b]$.

因为 $f'(x) = (\ln x - \ln a) + \frac{x+a}{x} - 2, f''(x) = \frac{1}{x} - \frac{a}{x^2} = \frac{x-a}{x^2} > 0, x \in (a, b]$,

所以 $f'(x)$ 单调增, 又 $f'(a) = 0$, 则在 $(a, b]$ 上 $f'(x) > 0, f(x)$ 单调增, 而 $f(a) = 0$, 故 $f(b) > 0$, 即 $\ln \frac{b}{a} > \frac{2(b-a)}{b+a}$.

【例 3】 比较 e^π 与 π^e 的大小.

解 取对数, 等价于比较 $\pi \ln e$ 与 $e \ln \pi$ 的大小, 也等价于比较 $\frac{\ln e}{e}$ 与 $\frac{\ln \pi}{\pi}$ 的大小, 只要考查 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 在 $[e, \pi]$ 上的单调性.

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0, x \in (e, \pi]$$

则 $f(\pi) < f(e)$, 即 $e^\pi > \pi^e$.

【注】 类似的可以证明: 当 $x > 0$ 时, $(1+x)^{\frac{1}{x}} < e^{1+\frac{1}{x}}$.

【例 4】 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, 且 $f''(x) > 0$, 证明: $f(x) \geq x$.

证明 (方法一) 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ 知 $f(0) = 0, f'(0) = 1$, 由泰勒公式知



$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2!}x^2 = x + \frac{f''(\xi)}{2!}x^2 \geq x \quad (f''(x) > 0)$$

原式得证.

(方法二) 由方法一知 $f(0) = 0, f'(0) = 1$. 又 $f''(x) > 0$, 则 $f'(x)$ 单调增, 由拉格朗日中值定理知

$$f(x) = f(x) - f(0) = f'(c)x \quad (c \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

当 $x > 0$ 时, $0 < c < x$, 由于 $f'(x)$ 单调增, 则 $f(x) = f'(c)x > f'(0)x = x$; 当 $x < 0$ 时, $x < c < 0$, 则 $f'(c) < f'(0)$, 从而 $f(x) = f'(c)x > f'(0)x = x$.

原题得证.

(方法三) 只要证 $f(x) - x \geq 0$, 令 $F(x) = f(x) - x$, 只要证明 $F(x) \geq 0$, 即只要证 $F(x)$ 的最小值大于等于零.

由于 $F'(x) = f'(x) - 1$, 显然 $F'(0) = f'(0) - 1 = 0$.

又 $F''(x) = f''(x) > 0$, 则 $F'(x)$ 单调增, $x = 0$ 为 $F'(x)$ 唯一的零点, 即 $x = 0$ 为 $F(x)$ 唯一驻点, 又 $F''(x) = f''(x) > 0$, 则 $x = 0$ 为 $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上唯一极值点, 且在该点取极小值, 因此 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处取得它在 $(-\infty, +\infty)$ 上的最小值, 从而

$$F(x) \geq F(0) = f(0) - 0 = 0$$

原题得证.

(方法四) 由 $f''(x) > 0$ 可知, 曲线 $y = f(x)$ 是凹的, 则该曲线在其上任一点处的切线之上.

又由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ 可知, $f(0) = 0, f'(0) = 1$, 则曲线 $y = f(x)$ 在 $(0, 0)$ 点处的切线方程为 $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$, 即 $y = x$, 故

$$f(x) \geq x$$

【例 5】 试证 $(x+y)\ln \frac{x+y}{2} \leq x \ln x + y \ln y (x > 0, y > 0)$.

证明 只要证明 $\frac{x+y}{2} \ln \frac{x+y}{2} \leq \frac{x \ln x + y \ln y}{2} (x > 0, y > 0)$, 即只要证函数 $f(x) = x \ln x (x > 0)$ 的图形是凹的.

由于 $f'(x) = \ln x + 1, f''(x) = \frac{1}{x} > 0 (x > 0)$, 则函数 $f(x) = x \ln x (x > 0)$ 的图形是凹的, 原题得证.

题型五 微分中值定理有关的证明题

微分中值定理有关的证明题主要有以下三种:

(一) 证明存在一个点 $\xi \in (a, b)$, 使 $F[\xi, f(\xi), f'(\xi)] = 0$

此类问题的一般方法是将要证结论改写为 $F[\xi, f(\xi), f'(\xi)] = 0$, 然后构造辅助函数用罗尔定理. 而构造辅助函数的方法主要有两种:

1. 分析法(还原法)

根据对欲证的结论 $F[\xi, f(\xi), f'(\xi)] = 0$ 的分析, 确定辅助函数 $g(x)$, 使

$$g'(x) = F[x, f(x), f'(x)]$$



2. 微分方程法

欲证: $F[\xi, f(\xi), f'(\xi)] = 0$,

1) 求微分方程 $F(x, y, y') = 0$ 的通解 $H(x, y) = C$;

2) 设辅助函数: $g(x) = H(x, f(x))$.

【例 1】 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, $f(a) = b, f(b) = a, a$ 与 b 同号.

求证: 存在 $\xi \in (a, b)$ 使 $f'(\xi) = -\frac{f(\xi)}{\xi}$.

分析 本题证明的关键是构造辅助函数, 以下用两种方法构造

(1) 分析法(还原法)

欲证 $f'(\xi) = -\frac{f(\xi)}{\xi}$, 只要证 $\xi f'(\xi) + f(\xi) = 0$, 则应构造辅助函数 $g(x) = xf(x)$, 这里 $g'(x) = xf'(x) + f(x)$.

(2) 微分方程法

欲证 $f'(\xi) = -\frac{f(\xi)}{\xi}$, 解微分方程 $y' = -\frac{y}{x}$, 得其通解为 $xy = C$.

则应构造辅助函数 $g(x) = xf(x)$.

证明 令 $g(x) = xf(x)$, 则

$$g(a) = af(a) = ab, g(b) = bf(b) = ab$$

由罗尔定理知, 存在 $\xi \in (a, b)$ 使 $g'(\xi) = 0$, 即 $\xi f'(\xi) + f(\xi) = 0$.

原题得证.

【例 2】 设 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上连续, 在 $(1, 2)$ 内可导且 $f(1) = \frac{1}{2}, f(2) = 2$.

求证: $\xi \in (1, 2)$ 使 $f'(\xi) = \frac{2f(\xi)}{\xi}$.

分析 本题证明的关键是构造辅助函数, 以下用两种方法构造.

(1) 分析法(还原法)

欲证 $f'(\xi) = \frac{2f(\xi)}{\xi}$, 只要证 $\xi f'(\xi) - 2f(\xi) = 0$, 考虑

$$xf'(x) - 2f(x) = 0$$

$$\text{即} \quad \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{2}{x} = 0$$

$$\text{还原得} \quad [\ln f(x)]' - [\ln x^2]' = 0$$

$$\text{即} \quad \left[\ln \frac{f(x)}{x^2} \right]' = 0$$

因此, 辅助函数为 $F(x) = \frac{f(x)}{x^2}$.

(2) 微分方程法

欲证 $f'(\xi) = \frac{2f(\xi)}{\xi}$, 解微分方程 $y' = \frac{2y}{x}$, 得其通解为 $\frac{y}{x^2} = C$. 则应构造辅助函数

$$F(x) = \frac{f(x)}{x^2}$$



证明 令 $F(x) = \frac{f(x)}{x^2}$, 则

$$F'(x) = \frac{x^2 f'(x) - 2xf(x)}{x^4} = \frac{xf'(x) - 2f(x)}{x^3}$$

且 $F(1) = f(1) = \frac{1}{2}$, $F(2) = \frac{f(2)}{4} = \frac{1}{2}$. 由罗尔定理知存在 $\xi \in (1, 2)$, 使 $F'(\xi) = 0$,

即 $\frac{\xi^2 f'(\xi) - 2\xi f(\xi)}{\xi^4} = 0$, 从而有 $\xi f'(\xi) - 2f(\xi) = 0$.

原题得证.

【注】 从以上两个例子可归纳出一类常用的辅助函数

1) 欲证 $\xi f'(\xi) + nf(\xi) = 0$, 令 $F(x) = x^n f(x)$;

2) 欲证 $\xi f'(\xi) - nf(\xi) = 0$, 令 $F(x) = \frac{f(x)}{x^n}$, 这里 n 为正整数.

【例 3】 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b) = 0$.

求证: 存在 $\xi \in (a, b)$ 使 $f'(\xi) + \lambda f(\xi) = 0$.

分析 欲证 $f'(\xi) + \lambda f(\xi) = 0$, 解微分方程 $y' + \lambda y = 0$, 得其通解为 $e^{\lambda x} y = C$.

则应构造辅助函数 $F(x) = e^{\lambda x} f(x)$.

证明 令 $F(x) = e^{\lambda x} f(x)$, 则 $F'(x) = e^{\lambda x} [f'(x) + \lambda f(x)]$, 且 $F(a) = F(b) = 0$. 由罗尔定理知, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $F'(\xi) = 0$, 即

$$e^{\lambda \xi} [f'(\xi) + \lambda f(\xi)] = 0$$

但 $e^{\lambda \xi} \neq 0$, 则 $f'(\xi) + \lambda f(\xi) = 0$.

原题得证.

【注】 从本例可归纳出一类常用的辅助函数

1) 欲证 $f'(\xi) + \lambda f(\xi) = 0$, 令 $F(x) = e^{\lambda x} f(x)$;

特别地:

欲证 $f'(\xi) + f(\xi) = 0$, 令 $F(x) = e^x f(x)$;

欲证 $f'(\xi) - f(\xi) = 0$, 令 $F(x) = e^{-x} f(x)$;

2) 欲证 $\alpha f'(\xi) + \beta f(\xi) = 0$, 令 $F(x) = e^{\frac{\beta}{\alpha} x} f(x) (\alpha \neq 0)$;

3) 欲证 $f'(\xi) + g'(\xi) f(\xi) = 0$, 令 $F(x) = e^{g(x)} f(x)$;

4) 欲证 $f'(\xi) + g(\xi) f(\xi) = 0$, 令 $F(x) = e^{\int g(x) dx} f(x)$.

笔记:



【例 4】 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = f(1) = 0, f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

试证: (1) 存在 $\eta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 使 $f(\eta) = \eta$;

(2) 对任意实数 λ , 存在 $\xi \in (0, \eta)$, 使 $f'(\xi) - \lambda[f(\xi) - \xi] = 1$.

证明 (1) 令 $F(x) = f(x) - x$, 则

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0, F(1) = f(1) - 1 = -1 < 0$$

由零点定理知, 存在 $\eta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 使 $F(\eta) = 0$, 即 $f(\eta) = \eta$.

(2) 令 $\varphi(x) = e^{-\lambda x}[f(x) - x]$, 则 $\varphi'(x) = e^{-\lambda x}\{[f'(x) - 1] - \lambda[f(x) - x]\}$, 且 $\varphi(0) = 0, \varphi(\eta) = 0$. 由罗尔定理知, 存在 $\xi \in (0, \eta)$, 使 $\varphi'(\xi) = 0$, 从而有

$$[f'(\xi) - 1] - \lambda[f(\xi) - \xi] = 0$$

故 $f'(\xi) - \lambda[f(\xi) - \xi] = 1$.

【例 5】 设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(1) = 1$. 证明:

(1) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = 1$;

(2) 存在 $\eta \in (-1, 1)$, 使得 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$.

证明 (方法一) (1) 因为 $f(x)$ 是区间 $[-1, 1]$ 上的奇函数, 所以 $f(0) = 0$.

因为函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上可导, 根据拉格朗日中值定理, 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得

$$f(1) - f(0) = f'(\xi)$$

又因为 $f(1) = 1$, 所以 $f'(\xi) = 1$.

(2) 欲证 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$, 考虑 $f''(x) + f'(x) = 1$, 令 $f'(x) = y$, 则

$$y' + y = 1$$

解该线性方程得其通解为 $(y - 1)e^x = C$, 则应考虑辅助函数

$$F(x) = e^x[f'(x) - 1]$$

因为 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $f'(x)$ 是偶函数, 故 $f'(-\xi) = f'(\xi) = 1$. 又 $f(x)$ 二阶可导, 则 $F(x)$ 可导, 且 $F(-\xi) = F(\xi) = 0$.

根据罗尔定理, 存在 $\eta \in (-\xi, \xi) \subset (-1, 1)$, 使得 $F'(\eta) = 0$.

由 $F'(\eta) = [f''(\eta) + f'(\eta) - 1]e^\eta$ 且 $e^\eta \neq 0$, 得 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$.

(方法二) (1) 同方法一.

(2) 欲证 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$, 即 $f''(\eta) + f'(\eta) - 1 = 0$, 则可考虑辅助函数

$$F(x) = f'(x) + f(x) - x$$

因为 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $f'(x)$ 是偶函数, 则

$$F(-1) = f'(-1) + f(-1) + 1 = f'(1) - f(1) + 1 = f'(1)$$

$$F(1) = f'(1) - f(1) + 1 = f'(1)$$

根据罗尔定理, 存在 $\eta \in (-1, 1)$, 使得 $F'(\eta) = 0$. 即



$$f''(\eta) + f'(\eta) = 1$$

【例 6】 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, 且 $g''(x) \neq 0, f(a) = f(b) = g(a) = g(b) = 0$. 试证

(1) 在 (a, b) 内 $g(x) \neq 0$;

(2) 在 (a, b) 内至少有一点 ξ , 使 $\frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

证明 (1) 由于在 $[a, b]$ 上 $g''(x) \neq 0$, 则方程 $g(x) = 0$ 在 $[a, b]$ 内最多两个根, 又 $g(a) = g(b) = 0$, 则当 $x \in (a, b)$ 时, $g(x) \neq 0$.

(2) 只要证 $g(\xi)f''(\xi) - f(\xi)g''(\xi) = 0$.

为了构造辅助函数 $F(x)$, 要使其 $F'(x)$ 中含有 $g(x)f''(x)$, 则 $F(x)$ 中需含有 $g(x)f'(x)$, 同理要使 $F'(x)$ 中含有 $f(x)g''(x)$, 则 $F(x)$ 中需含有 $f(x)g'(x)$.

因此令 $F(x) = g(x)f'(x) - f(x)g'(x)$, 则 $F(a) = F(b) = 0$. 由罗尔定理知, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $F'(\xi) = 0$, 即 $g(\xi)f''(\xi) - f(\xi)g''(\xi) = 0$, 故原题得证.

【注】 类似的可以证明

(1) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $g'(x) \neq 0$, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $\frac{f(a) - f(\xi)}{g(\xi) - g(b)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

(2) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(\xi) \int_a^\xi g(t) dt = g(\xi) \int_\xi^b f(t) dt$$

【例 7】 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $\int_0^1 f(x) dx = 0$.

求证: 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使 $\int_0^\xi f(x) dx = -\xi f(\xi)$.

证明 只要证明 $\int_0^\xi f(x) dx + \xi f(\xi) = 0$.

令 $F(x) = x \int_0^x f(t) dt$, 则 $F(0) = F(1) = 0$, 由罗尔定理知存在 $\xi \in (0, 1)$, 使 $F'(\xi) = 0$, 即 $\int_0^\xi f(x) dx + \xi f(\xi) = 0$.

【例 8】 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $\int_0^1 f(x) dx = 0$.

求证: 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使 $\xi f'(\xi) + 2f(\xi) = 0$.

证明 由例 2 的注可知, 令 $F(x) = x^2 f(x)$, 则 $F(0) = 0$. 又 $\int_0^1 f(x) dx = 0$, 由积分中值定理知存在 $c \in (0, 1)$, 使 $\int_0^1 f(x) dx = f(c) = 0$, 从而 $F(c) = 0$.

由罗尔定理知存在 $\xi \in (0, c)$, 使 $F'(\xi) = 0$, 从而有 $\xi f'(\xi) + 2f(\xi) = 0$.

【例 9】 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, $f(0) = 0, \int_0^1 f(x) dx = 0$.

求证: 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使 $\int_0^\xi f(x) dx = \xi f(\xi)$.



证明 只要证 $\int_0^{\xi} f(x) dx - \xi f(\xi) = 0$.

$$\text{令 } F(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x}, & 0 < x \leq 1. \\ 0, & x = 0 \end{cases} \text{ 由于 } \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{1} = 0,$$

及 $F(0) = F(1) = 0$, 则 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上满足罗尔定理条件, 故存在 $\xi \in (0, 1)$, 使

$$F'(\xi) = 0, \text{ 即 } \frac{\xi f(\xi) - \int_0^{\xi} f(t) dt}{\xi^2} = 0$$

从而有 $\int_0^{\xi} f(x) dx - \xi f(\xi) = 0$.

(二) 证明存在两个中值点 $\xi, \eta \in (a, b)$, 使 $F[\xi, \eta, f(\xi), f(\eta), f'(\xi), f'(\eta)] = 0$

方法:

(1) 不要求 $\xi \neq \eta$:

在同一区间 $[a, b]$ 上用两次中值定理(拉格朗日、柯西中值定理).

(2) 要求 $\xi \neq \eta$:

将区间 $[a, b]$ 分为两个子区间, 在两个子区间上分别用拉格朗日中值定理.

【例 1】 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, (a, b) 内可导, 且 a, b 同号, 试证存在 $\xi, \eta \in (a, b)$, 使

$$f'(\xi) = \frac{a+b}{2\eta} f'(\eta).$$

证明 由拉格朗日中值定理知存在 $\xi \in (a, b)$, 使

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

由柯西中值定理知, 存在 $\eta \in (a, b)$ 使

$$\frac{f(b) - f(a)}{b^2 - a^2} = \frac{f'(\eta)}{2\eta}$$

从而有 $f'(\xi) = \frac{a+b}{2\eta} f'(\eta)$.

【例 2】 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f'(x) \neq 0$, 证明存在 $\xi, \eta \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \frac{e^b - e^a}{b - a} e^{-\eta}.$$

证明 只要证明 $f'(\xi) = \frac{e^b - e^a}{b - a} \frac{f'(\eta)}{e^{\eta}}$.

由拉格朗日中值定理知存在 $\xi \in (a, b)$, 使

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

由柯西中值定理知存在 $\eta \in (a, b)$, 使

$$\frac{f(b) - f(a)}{e^b - e^a} = \frac{f'(\eta)}{e^{\eta}}$$

从而有 $f'(\xi)(b - a) = \frac{f'(\eta)}{e^{\eta}}(e^b - e^a)$, 即



$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \frac{e^b - e^a}{b - a} e^{-\eta}$$

【例3】 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b) = 1$, 试证存在 $\xi, \eta \in (a, b)$ 使 $e^{\eta-\xi}[f(\eta) + f'(\eta)] = 1$.

证明 只要证明 $e^{\eta}[f(\eta) + f'(\eta)] = e^{\xi}$.

由拉格朗日中值定理得存在 $\xi \in (a, b)$, 使

$$\frac{e^b - e^a}{b - a} = e^{\xi}$$

令 $F(x) = e^x f(x)$, 由拉格朗日中值定理得, 存在 $\eta \in (a, b)$, 使

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = F'(\eta)$$

即 $\frac{e^b - e^a}{b - a} = e^{\eta}[f(\eta) + f'(\eta)]$, 从而有 $e^{\eta}[f(\eta) + f'(\eta)] = e^{\xi}$.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

【例4】 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$.

证明: (1) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(\xi) = 1 - \xi$;

(2) 存在两个不同的点 $\eta, \zeta \in (0, 1)$, 使得 $f'(\eta)f'(\zeta) = 1$.

证明 (1) 令 $F(x) = f(x) - 1 + x$, 则 $F(0) = -1 < 0, F(1) = 1 > 0$, 由连续函数零点定理知, 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使 $F(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) = 1 - \xi$.

(2) 在区间 $[0, \xi], [\xi, 1]$ 上分别对 $f(x)$ 用拉格朗日中值定理, 得

$$\frac{f(\xi) - f(0)}{\xi - 0} = f'(\eta), \quad \eta \in (0, \xi)$$

$$\frac{f(1) - f(\xi)}{1 - \xi} = f'(\zeta), \quad \zeta \in (\xi, 1)$$

即 $\frac{f(\xi)}{\xi} = f'(\eta), \frac{1 - f(\xi)}{1 - \xi} = f'(\zeta)$, 从而

$$f'(\eta)f'(\zeta) = \frac{f(\xi)}{\xi} \cdot \frac{1 - f(\xi)}{1 - \xi} = 1$$

【例5】 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$, 试证对任意给定的正数 a, b , 在 $(0, 1)$ 内一定存在互不相同的 ξ, η , 使

$$\frac{a}{f'(\xi)} + \frac{b}{f'(\eta)} = a + b$$

分析 本题要证存在两个中值点 ξ 和 η , 且 $\xi \neq \eta$. 这类问题通常要将原区间 $[a, b]$ 分为两个子区间 $[a, c]$ 和 $[c, b]$, 然后在这两个子区间上分别用拉格朗日中值定理. 这里的关键点和难点是分点 c 的选取, 通常采用“逆推法”.

设 $c \in (0, 1)$, 由拉格朗日中值定理知

$$\frac{f(c) - f(0)}{c - 0} = f'(\xi), \quad \xi \in (0, c)$$

$$\frac{f(1) - f(c)}{1 - c} = f'(\eta), \quad \eta \in (c, 1)$$

将以上两式代入要证的结论 $\frac{a}{f'(\xi)} + \frac{b}{f'(\eta)} = a + b$ 中得



$$a \cdot \frac{c}{f(c)} + b \cdot \frac{1-c}{1-f(c)} = a+b$$

即要证 $\frac{a}{a+b} \cdot \frac{c}{f(c)} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{1-c}{1-f(c)} = 1$.

由上式看出,若存在 $c \in (0,1)$,使 $f(c) = \frac{a}{a+b}$,则上式成立.

证明 由于 $f(0) = 0 < \frac{a}{a+b} < 1 = f(1)$,由介值定理知存在 $c \in (0,1)$,使

$$f(c) = \frac{a}{a+b}$$

在区间 $[0,c]$ 和 $[c,1]$ 上分别对 $f(x)$ 用拉格朗日中值定理得

$$\frac{f(c)-f(0)}{c-0} = f'(\xi), \quad \xi \in (0,c)$$

$$\frac{f(1)-f(c)}{1-c} = f'(\eta), \quad \eta \in (c,1)$$

从而有 $\frac{1}{f'(\xi)} = \frac{c}{f(c)} = \frac{c(a+b)}{a}$, $\frac{1}{f'(\eta)} = \frac{1-c}{1-f(c)} = \frac{(1-c)(a+b)}{b}$,故

$$\frac{a}{f'(\xi)} + \frac{b}{f'(\eta)} = a+b$$

(三) 证明存在一个中值点 $\xi \in (a,b)$,使 $F[\xi, f^{(n)}(\xi)] \geq 0 (n \geq 2)$

方法:

用带拉格朗日余项的泰勒公式,其中 x_0 点选题目中提供函数值和导数值信息多的点.

【例1】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导, $f'(a) = f'(b) = 0$.

求证:存在 $\xi \in (a,b)$,使 $|f''(\xi)| \geq 4 \frac{|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2}$.

证明 由泰勒公式知

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}(x-a)^2 \quad ①$$

$$f(x) = f(b) + f'(b)(x-b) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(x-b)^2 \quad ②$$

② 式减去 ① 式得

$$f(b) - f(a) = \frac{f''(\xi_1)}{2!}(x-a)^2 - \frac{f''(\xi_2)}{2!}(x-b)^2$$

在该式中令 $x = \frac{a+b}{2}$ 得

$$f(b) - f(a) = \frac{(b-a)^2}{8}(f''(\xi_1) - f''(\xi_2))$$

从而有

$$\begin{aligned} |f(b) - f(a)| &\leq \frac{(b-a)^2}{8} (|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|) \leq \frac{(b-a)^2}{4} \max(|f''(\xi_1)|, |f''(\xi_2)|) \\ &= \frac{(b-a)^2}{4} |f''(\xi)| \end{aligned}$$



故 $|f''(\xi)| \geq 4 \frac{|f(b) - f(a)|}{(b-a)^2}$.

【例 2】 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上三阶可导, $f(0) = 0, f(1) = 1, f'(\frac{1}{2}) = 0$.

求证: 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使 $|f'''(\xi)| \geq 24$.

证明 由泰勒公式得

$$f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{f''\left(\frac{1}{2}\right)}{2!}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}\left(x - \frac{1}{2}\right)^3$$

在上式中令 $x = 0$ 和 $x = 1$ 得

$$f(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{f''\left(\frac{1}{2}\right)}{2!} \frac{1}{4} - \frac{f'''(\xi_1)}{48} = 0 \quad ①$$

$$f(1) = f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{f''\left(\frac{1}{2}\right)}{2!} \frac{1}{4} + \frac{f'''(\xi_2)}{48} = 1 \quad ②$$

② 式减 ① 式得

$$48 = f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)$$

从而

$$48 \leq |f'''(\xi_1)| + |f'''(\xi_2)| \leq 2\max(|f'''(\xi_1)|, |f'''(\xi_2)|)$$

故存在 $\xi \in (0, 1)$, 使 $|f'''(\xi)| \geq 24$.

【例 3】 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有二阶连续导数, 且 $f(0) = f(1) = 0, \min_{0 \leq x \leq 1} f(x) = -1$, 证明: $\max_{0 \leq x \leq 1} f''(x) \geq 8$.

证明 本题只要证明存在 $\xi \in (0, 1)$, 使 $f''(\xi) \geq 8$.

设 $f(c) = \min_{0 \leq x \leq 1} f(x) = -1$, 则 $0 < c < 1$, 且 $f'(c) = 0$. 由泰勒公式知

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - c)^2$$

在上式中分别令 $x = 0$, 和 $x = 1$ 得

$$f''(\xi_1) = \frac{2}{c^2}, \quad \xi_1 \in (0, c)$$

$$f''(\xi_2) = \frac{2}{(1-c)^2}, \quad \xi_2 \in (c, 1)$$

若 $c \leq \frac{1}{2}$, 则 $f''(\xi_1) = \frac{2}{c^2} \geq \frac{2}{(\frac{1}{2})^2} = 8$.

若 $c > \frac{1}{2}$, 则 $f''(\xi_2) = \frac{2}{(1-c)^2} \geq \frac{2}{(\frac{1}{2})^2} = 8$.

故 $\max_{0 \leq x \leq 1} f''(x) \geq 8$.



第三章 一元函数积分学

考试内容	考试要求		
	数一	数二	数三
原函数与不定积分的概念 积分上限的函数	理解	理解	理解
牛顿—莱布尼茨公式以及定积分的换元积分法和分部积分法 不定积分的基本性质和基本积分公式 不定积分的换元积分法与分部积分法	掌握	掌握	掌握
利用定积分计算平面图形的面积、旋转体的体积和函数的平均值 反常积分	会计算	会计算	会计算
积分上限的函数的导数	会求	会求	会求
反常积分的概念	理解	理解	理解
定积分的概念	理解	理解	了解
定积分的性质及定积分中值定理	掌握	掌握	了解
用定积分表达和计算一些几何量与物理量(平面曲线的弧长、旋转体的侧面积、平行截面面积为已知的立体体积、功、引力、压力、质心、形心等)	掌握	掌握	
利用定积分求解简单的经济应用问题			会解
有理函数、三角函数有理式和简单无理函数的积分	会求	会求	
反常积分收敛的比较判别法	了解	了解	了解

第一节 不定积分

一、考试内容要点精讲

(一) 两个基本概念

1. 原函数

如果在区间 I 上 $F'(x) = f(x)$ 或 $dF(x) = f(x)dx$ 处处成立, 则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区



间 I 上的原函数.

【注】如果 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数, 那么 $F(x) + C$ 都是 $f(x)$ 的原函数, 且是 $f(x)$ 的所有原函数.

2. 不定积分

在区间 I 上, 函数 $f(x)$ 带有任意常数的原函数称为 $f(x)$ 在区间 I 上的不定积分, 记为

$$\int f(x) dx.$$

如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数, 那么 $F(x) + C$ 就是 $f(x)$ 的不定积分, 即

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

(二) 原函数的存在性

(1) 若 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 则 $f(x)$ 在区间 I 上必有原函数.

(2) 若 $f(x)$ 在区间 I 上有第一类间断点, 则 $f(x)$ 在区间 I 上没有原函数.

(三) 不定积分的性质

$$(1) \left(\int f(x) dx \right)' = f(x), \quad d \int f(x) dx = f(x) dx;$$

$$(2) \int f'(x) dx = f(x) + C, \quad \int df(x) = f(x) + C;$$

$$(3) \int kf(x) dx = k \int f(x) dx (k \text{ 为常数});$$

$$(4) \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

(四) 基本积分公式

$$(1) \int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1); \quad (2) \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C;$$

$$(3) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1); \quad (4) \int e^x dx = e^x + C;$$

$$(5) \int \sin x dx = -\cos x + C; \quad (6) \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$(7) \int \sec^2 x dx = \tan x + C; \quad (8) \int \csc^2 x dx = -\cot x + C;$$

$$(9) \int \sec x \tan x dx = \sec x + C; \quad (10) \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C;$$

$$(11) \int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + C; \quad (12) \int \csc x dx = -\ln |\csc x + \cot x| + C;$$

$$(13) \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C; \quad (14) \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C;$$

$$(15) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C; \quad (16) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C;$$



$$(17) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C.$$

(五) 三种主要积分法

1. 第一类换元法(凑微分法)

若 $\int f(u)du = F(u) + C$, 且 $\varphi(x)$ 可导, 则

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C$$

2. 第二类换元法

设函数 $x = \varphi(t)$ 可导, 且 $\varphi'(t) \neq 0$, 又设 $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(t) + C$, 则

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi^{-1}(x)) + C$$

三种常用的变量代换

(1) 被积函数中含有 $\sqrt{a^2 - x^2}$ 时, 令 $x = a \sin t$, 或 $x = a \cos t$;

(2) 被积函数中含有 $\sqrt{a^2 + x^2}$ 时, 令 $x = a \tan t$;

(3) 被积函数中含有 $\sqrt{x^2 - a^2}$ 时, 令 $x = a \sec t$.

3. 分部积分法

设 $u(x), v(x)$ 有连续一阶导数, 则

$$\int u dv = uv - \int v du$$

【注】(1) 分部积分法常用于被积函数为两类不同函数相乘的不定积分;

(2) 分部积分法选择 $u(x), v(x)$ 的原则是 $\int v du$ 比 $\int u dv$ 好积, 设 $p_n(x)$ 是 n 次多项式, 则

形如 $\int p_n(x)e^{ax}dx, \int p_n(x)\sin axdx, \int p_n(x)\cos axdx$ 的积分都是先把多项式以外的函数凑进微分号, 然后分部积分;

形如 $\int p_n(x)\ln xdx, \int p_n(x)\arctan xdx, \int p_n(x)\arcsin xdx$ 的积分都是先把多项式函数凑进微分号, 然后分部积分;

形如 $\int e^{ax}\sin \beta xdx, \int e^{ax}\cos \beta xdx$ 的积分可连续两次将指数函数凑进微分号分部积分还原, 求得原不定积分.

(六) 三类常见可积函数积分

1. 有理函数积分

$$\int R(x)dx$$

(1) 一般方法(部分分式法);

(2) 特殊方法(加项减项拆项或凑微分降幂).



2. 三角有理式积分

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

(1) 一般方法(万能代换)

$$\text{令 } \tan \frac{x}{2} = t,$$

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt$$

(2) 特殊方法(三角变形, 换元, 分部)

几种常用的换元法

- i) 若 $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, 则令 $u = \cos x$, 即凑 $d\cos x$;
- ii) 若 $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, 则令 $u = \sin x$, 即凑 $d\sin x$;
- iii) 若 $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, 则令 $u = \tan x$, 即凑 $d\tan x$.

3. 简单无理函数积分

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$$

令 $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$, 将其化为有理函数积分进行计算.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

二、常考题型的方法与技巧

题型一 计算不定积分

【例 1】 $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}.$

解 (方法一) $I = \int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}} = \arcsin \frac{x-2}{2} + C.$

(方法二) $I = \int \frac{2d(\sqrt{x})}{\sqrt{4-x}} = 2\arcsin \frac{\sqrt{x}}{2} + C.$

【例 2】 $I = \int \frac{dx}{\cos x \sqrt{\sin x}}.$

解 $I = \int \frac{dx}{\cos x \sqrt{\sin x}} = \int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x \sqrt{\sin x}} = \int \frac{d\sin x}{(1-\sin^2 x) \sqrt{\sin x}}$

$$= 2 \int \frac{d\sqrt{\sin x}}{1-\sin^2 x} \xrightarrow{\text{令 } \sqrt{\sin x} = t} 2 \int \frac{dt}{1-t^4} = 2 \int \frac{dt}{(1-t^2)(1+t^2)}$$

$$= \int \left(\frac{1}{1-t^2} + \frac{1}{1+t^2} \right) dt = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + \arctan t + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\sin x}} \right| + \arctan \sqrt{\sin x} + C.$$



【例 3】 $I = \int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}} dx.$

解 (方法一) 令 $x = \tan t$, 则 $dx = \sec^2 t dt$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\tan^5 t \cdot \sec^2 t dt}{\sec t} = \int \tan^4 t \cdot (\tan t \cdot \sec t) dt = \int \tan^4 t d(\sec t) \\ &= \int (\sec^2 t - 1)^2 d(\sec t) = \int (u^2 - 1)^2 du \quad (u = \sec t) \\ &= \frac{1}{5} u^5 - \frac{2}{3} u^3 + u + C \\ &= \frac{1}{15} (8 - 4x^2 + 3x^4) \sqrt{1+x^2} + C. \end{aligned}$$

(方法二) $I = \frac{1}{2} \int \frac{x^4 dx^2}{\sqrt{1+x^2}} = \int x^4 d(\sqrt{1+x^2})$

$$\begin{aligned} &= x^4 \sqrt{1+x^2} - 4 \int x^3 \sqrt{1+x^2} dx \\ &= x^4 \sqrt{1+x^2} - 2 \int [(x^2+1) - 1] \sqrt{1+x^2} d(1+x^2) \\ &= x^4 \sqrt{1+x^2} - \frac{4}{5} (1+x^2)^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C. \end{aligned}$$

【例 4】 $I = \int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x-1}} dx.$

解 $I = 2 \int x d \sqrt{e^x-1} = 2x \sqrt{e^x-1} - 2 \int \sqrt{e^x-1} dx,$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{e^x-1} dx &= \int \frac{2t^2}{1+t^2} dt \quad (\text{令 } \sqrt{e^x-1} = t) \\ &= 2t - 2 \arctan t + C, \end{aligned}$$

则 $I = 2x \sqrt{e^x-1} - 4 \sqrt{e^x-1} + 4 \arctan \sqrt{e^x-1} + C.$

【例 5】 $\int \frac{\ln x}{\sqrt{1+x}} dx.$

解 (方法一) 原式 $= 2 \int \ln x d \sqrt{1+x} = 2 \sqrt{1+x} \ln x - 2 \int \frac{\sqrt{1+x}}{x} dx,$

$$\int \frac{\sqrt{1+x}}{x} dx \xrightarrow{\sqrt{1+x}=t} 2 \int \frac{t^2}{t^2-1} dt = 2 \int dt + 2 \int \frac{dt}{t^2-1} = 2t + \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C$$

原式 $= 2 \sqrt{1+x} \ln x - 4 \sqrt{1+x} - 2 \ln \left| \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1} \right| + C.$

(方法二) 令 $\sqrt{1+x} = t$, 则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{\ln(t^2-1)}{t} 2t dt = 2 \int \ln(t^2-1) dt \\ &= 2t \ln(t^2-1) - 2 \int \frac{2t^2}{t^2-1} dt \\ &= 2 \sqrt{1+x} \ln x - 4 \sqrt{1+x} - 2 \ln \left| \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1} \right| + C. \end{aligned}$$



【例 6】 $\int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}} dx.$

解 (方法一) 原式 $= -\frac{1}{2} \int \arctan e^x de^{-2x}$

$$= -\frac{1}{2} e^{-2x} \arctan e^x + \frac{1}{2} \int \frac{e^{-x}}{1+e^{2x}} dx$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-2x} \arctan e^x + \frac{1}{2} \int \frac{de^x}{e^{2x}(1+e^{2x})}$$

$$= -\frac{1}{2} [e^{-2x} \arctan e^x + e^{-x} + \arctan e^x] + C.$$

(方法二) 令 $e^x = t$, 则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{\arctan t}{t^3} dt = -\frac{1}{2} \int \arctan t d\left(\frac{1}{t^2}\right) \\ &= -\frac{\arctan t}{2t^2} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2(1+t^2)} dt \\ &= -\frac{\arctan t}{2t^2} - \frac{1}{2t} - \frac{1}{2} \arctan t + C \\ &= -\frac{1}{2} [e^{-2x} \arctan e^x + e^{-x} + \arctan e^x] + C. \end{aligned}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

【例 7】 $I = \int \frac{1}{x+x^9} dx.$

解 (方法一) $I = \int \frac{dx}{x(1+x^8)} = \int \frac{x^7 dx}{x^8(1+x^8)} = \frac{1}{8} \int \frac{du}{u(1+u)} \quad (\text{令 } x^8 = u)$

$$= \frac{1}{8} [\ln u - \ln(1+u)] + C$$

$$= \frac{1}{8} \ln \frac{x^8}{1+x^8} + C.$$

(方法二) $I = \int \frac{(1+x^8) - x^8 dx}{x(1+x^8)} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x^7}{1+x^8} \right) dx$

$$= \ln |x| - \frac{1}{8} \ln(1+x^8) + C.$$

(方法三) $I = \int \frac{dx}{x^9(1+\frac{1}{x^8})} = -\frac{1}{8} \int \frac{dx^{-8}}{1+x^{-8}} = -\frac{1}{8} \ln |1+x^{-8}| + C.$

【例 8】 $I = \int \frac{1+x^4}{1+x^6} dx.$

解 $I = \int \frac{1+x^4}{1+x^6} dx = \int \frac{1+x^4-x^2+x^2}{1+x^6} dx$

$$= \int \frac{1-x^2+x^4}{1+x^6} dx + \int \frac{x^2}{1+x^6} dx$$

$$= \int \frac{1-x^2+x^4}{(1+x^2)(1-x^2+x^4)} dx + \frac{1}{3} \int \frac{dx^3}{1+x^6}$$

$$= \int \frac{dx}{1+x^2} + \frac{1}{3} \int \frac{dx^3}{1+(x^3)^2}$$



$$= \arctan x + \frac{1}{3} \arctan x^3 + C.$$

【例 9】 $I = \int \frac{dx}{1 + \sin x}.$

【解】(方法一) $I = \int \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \tan x - \frac{1}{\cos x} + C.$

(方法二) $I = \int \frac{dx}{1 + \cos(\frac{\pi}{2} - x)} = \int \frac{dx}{2\cos^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})} = \tan(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}) + C.$

(方法三) 令 $\tan \frac{x}{2} = t$, 则 $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, 从而

$$I = \int \frac{2}{1+t^2} \cdot \frac{dt}{1 + \frac{2t}{1+t^2}} = 2 \int \frac{dt}{(1+t)^2} = \frac{-2}{1+t} + C = \frac{-2}{1 + \tan \frac{x}{2}} + C.$$

【例 10】 $\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}.$

【解】 令 $\tan \frac{x}{2} = t$, 则

$$\text{原式} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2} dt}{1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1+t} = \ln |1+t| + C = \ln \left| 1 + \tan \frac{x}{2} \right| + C.$$

【例 11】 $I = \int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^4 x}.$

【解】(方法一) 本题满足 $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, 所以应凑 $d\cos x$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin x dx}{\sin^2 x \cdot \cos^4 x} = - \int \frac{d\cos x}{(1 - \cos^2 x) \cos^4 x} \quad (\text{令 } \cos x = u) \\ &= - \int \frac{du}{(1 - u^2) u^4} = - \int \frac{(1 - u^4) + u^4}{(1 - u^2) u^4} du \\ &= - \int \left(\frac{1}{u^4} + \frac{1}{u^2} \right) du - \int \frac{du}{1 - u^2} \\ &= \frac{1}{3u^3} + \frac{1}{u} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| + C \\ &= \frac{1}{3\cos^3 x} + \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\cos x}{1-\cos x} \right| + C. \end{aligned}$$

(方法二) $I = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos^4 x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos^4 x} dx + \int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3\cos^3 x} + \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos^2 x} dx \\ &= \frac{1}{3\cos^3 x} + \int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin x} \\ &= \frac{1}{3\cos^3 x} + \frac{1}{\cos x} - \ln |\csc x + \cot x| + C. \end{aligned}$$



【例 12】 $I = \int \frac{1}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} dx.$

解 1) 若 $a \neq 0, b = 0$, 则 $I = \int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x} = -\frac{1}{a^2} \cot x + C.$

2) 若 $a = 0, b \neq 0$, 则 $I = \int \frac{1}{b^2 \cos^2 x} dx = \frac{1}{b^2} \tan x + C.$

3) 若 $a \neq 0, b \neq 0$, 此时满足 $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, 所以应凑 $d \tan x$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{\cos^2 x (b^2 + a^2 \tan^2 x)} = \int \frac{du}{b^2 + a^2 u^2} \quad (\text{令 } \tan x = u) \\ &= \frac{1}{ab} \arctan \frac{au}{b} + C = \frac{1}{ab} \arctan \frac{a \tan x}{b} + C \end{aligned}$$

【例 13】 $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx.$

解 令 $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = t$, 则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= -4 \int \frac{t^2}{(t^2+1)(t^2-1)} dt = -2 \int \frac{(t^2+1) + (t^2-1)}{(t^2+1)(t^2-1)} dt \\ &= \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| - 2 \arctan t + C \\ &= \ln |x + \sqrt{x^2-1}| - 2 \arctan \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + C. \end{aligned}$$

题型二 不定积分杂例

【例 1】 若 $\int x f(x) dx = \arcsin x + C$, 求 $I = \int \frac{1}{f(x)} dx.$

解 由 $\int x f(x) dx = \arcsin x + C$ 知

$$x f(x) = (\arcsin x + C)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{则 } I = \int \frac{1}{f(x)} dx = \int x \sqrt{1-x^2} dx = -\frac{1}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

【例 2】 若 $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 为 $f(x)$ 的一个原函数, 求 $I = \int x f'(x) dx.$

$$\begin{aligned} \text{解 } I &= \int x f'(x) dx = x f(x) - \int f(x) dx \\ &= x [\ln(x + \sqrt{1+x^2})]' - \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C \\ &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C. \end{aligned}$$



【例 3】 设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数, 且当 $x \geq 0$ 时, $F(x)f(x) = \frac{xe^x}{2(1+x)^2}$, 已知 $F(0) = 1, F(x) > 0$. 求 $f(x)$.

解 (方法一) 由 $F(x)f(x) = \frac{1}{2}[F^2(x)]' = \frac{xe^x}{2(1+x)^2}$, 得

$$\begin{aligned} F^2(x) &= \int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx = \int \frac{(x+1)-1}{(1+x)^2} e^x dx \\ &= \int \frac{e^x}{1+x} dx - \int \frac{e^x}{(1+x)^2} dx \\ &= \int \frac{e^x}{1+x} dx - \left(-\frac{e^x}{1+x} + \int \frac{e^x}{1+x} dx \right) \\ &= \frac{e^x}{1+x} + C \end{aligned}$$

由 $F(0) = 1$, 得 $C = 0$, 从而 $F^2(x) = \frac{e^x}{1+x}$ 即 $F(x) = \sqrt{\frac{e^x}{1+x}}$, 于是

$$f(x) = F'(x) = \left(\sqrt{\frac{e^x}{1+x}} \right)' = \frac{xe^x}{2(1+x)^2} \sqrt{\frac{1+x}{e^x}}$$

(方法二) $F^2(x) = \int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx = -\int (xe^x) d \frac{1}{1+x}$

$$\begin{aligned} &= -\frac{xe^x}{1+x} + \int \frac{e^x(1+x)}{1+x} dx \\ &= -\frac{xe^x}{1+x} + e^x + C = \frac{e^x}{1+x} + C \end{aligned}$$

由 $F(0) = 1$ 得 $F(x) = \sqrt{\frac{e^x}{1+x}}$, 从而

$$f(x) = \frac{1}{F(x)} \frac{xe^x}{2(1+x)^2} = \frac{xe^x}{2(1+x)^2} \sqrt{\frac{1+x}{e^x}}$$

【例 4】 设 $f'(e^x) = \sin x$, 求 $f(x)$.

解 (方法一) 令 $e^x = t$, 则 $f'(t) = \sin \ln t$, 从而

$$\begin{aligned} f(t) &= \int \sin \ln t dt = t \sin \ln t - \int t \cos \ln t \cdot \frac{1}{t} dt \\ &= t \sin \ln t - t \cos \ln t - \int t \sin \ln t \cdot \frac{1}{t} dt \end{aligned}$$

则 $f(t) = \frac{t}{2}(\sin \ln t - \cos \ln t) + C$.

(方法二) 等式 $f'(e^x) = \sin x$ 两端对 e^x 积分得

$$f(e^x) = \int \sin x de^x = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int \sin x de^x$$

则 $f(e^x) = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$, 从而

$$f(x) = \frac{x}{2}(\sin \ln x - \cos \ln x) + C$$



【例 5】求不定积分 $\int e^{-|x|} dx$.

解 (方法一) $e^{-|x|} = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ e^x, & x < 0 \end{cases}, \int e^{-|x|} dx = \begin{cases} -e^{-x} + C_1, & x \geq 0 \\ e^x + C_2, & x < 0 \end{cases}$

$e^{-|x|}$ 连续, 原函数 $F(x)$ 必连续, 从而 $F(x)$ 在 $x=0$ 连续. 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-e^{-x} + C_1) = -1 + C_1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x + C_2) = 1 + C_2$$

故有 $-1 + C_1 = 1 + C_2$, 令 $C_1 = C$, 则 $C_2 = -2 + C$. 因此

$$\int e^{-|x|} dx = \begin{cases} -e^{-x} + C, & x \geq 0 \\ e^x - 2 + C, & x < 0 \end{cases}$$

(方法二) 由于 $e^{-|x|}$ 连续, 则 $F(x) = \int_0^x e^{-|t|} dt$ 是其一原函数, 又

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x e^{-|t|} dt = \begin{cases} \int_0^x e^t dt, & x < 0 \\ \int_0^x e^{-t} dt, & x \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} e^x - 1, & x < 0 \\ 1 - e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

则 $\int e^{-|x|} dx = F(x) + C$.

【注】类似的可以求不定积分

$$\int \max\{1, x^2\} dx = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + C - \frac{2}{3}, & x \leq -1 \\ x + C, & -1 < x < 1. \\ \frac{1}{3}x^3 + C + \frac{2}{3}, & x \geq 1 \end{cases}$$

第二节 定积分

一、考试内容要点精讲

(一) 定积分的概念

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有定义, 在区间 $[a, b]$ 内任意插入 $n-1$ 个分点 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$.

将区间 $[a, b]$ 分成 n 个小区间 $[x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \cdots, n$, 记 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ 表示第 i 个小区间的长度.



在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 ξ_i , 作和式 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$, 记

$$\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$$

若 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ 存在, 且此极限值不依赖于区间 $[a, b]$ 的分法, 也不依赖于点 ξ_i 的取

法, 则称此极限值为 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的**定积分**, 记为 $\int_a^b f(x) dx$, 即

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

【注】(1) 定积分表示一个数值, 它取决于积分区间 $[a, b]$ 与被积函数 $f(x)$, 与积分变量无关, 因此有

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$$

(2) 若 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 则积分 $\int_0^1 f(x) dx$ 存在. 将 $[0, 1]$ 区间 n 等分, 此时

$\Delta x_i = \frac{1}{n}$, 取 $\xi_i = \frac{i}{n}$, 由定积分的定义得

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)$$

等式右端的极限可通过等式左端的积分来计算.

(二) 定积分的几何意义

(1) 设 $\int_a^b f(x) dx$ 存在, 若在 $[a, b]$ 上 $f(x) \geq 0$, 则 $\int_a^b f(x) dx$ 的值等于以曲线 $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形的面积.

(2) 若在 $[a, b]$ 上 $f(x) \leq 0$, 则 $\int_a^b f(x) dx$ 的值等于以曲线 $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形面积的负值.

(3) 若在 $[a, b]$ 上 $f(x)$ 的值有正也有负, 则 $\int_a^b f(x) dx$ 在几何上表示 $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ 及 x 轴所围成的 x 轴上方图形的面积减去下方图形的面积所得之差.

(三) 可积性

1. 必要条件

若 $\int_a^b f(x) dx$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.

2. 充分条件

(1) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $\int_a^b f(x) dx$ 必定存在.

(2) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 且只有有限个间断点, 则 $\int_a^b f(x) dx$ 必定存在.

(3) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上只有有限个第一类间断点, 则 $\int_a^b f(x) dx$ 必定存在.



(四) 定积分的计算

定积分的计算常用方法有以下五种:

1. 牛顿 - 莱布尼兹公式

如果函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的一个原函数, 则

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

2. 换元积分法

设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 函数 $x = \varphi(t)$ 满足以下条件:

(1) $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$;

(2) $\varphi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ (或 $[\beta, \alpha]$) 上具有连续导数, 且其值域 $R_\varphi = [a, b]$, 则

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

3. 分部积分法

设函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续一阶导数, 则

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

4. 利用奇偶性和周期性

(1) 设 $f(x)$ 为 $[-a, a]$ 上的连续函数 ($a > 0$), 则

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 0, & f(x) \text{ 为奇函数} \\ 2 \int_0^a f(x) dx, & f(x) \text{ 为偶函数} \end{cases}$$

(2) 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数, 则对任给数 a , 总有

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

5. 利用公式

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为偶数} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{2}{3}, & n \text{ 为大于 1 的奇数} \end{cases}$$

$$(2) \int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx \quad (\text{其中 } f(x) \text{ 连续}).$$

(五) 变上限积分: $\int_a^x f(t) dt$

定理 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $\int_a^x f(t) dt$ 在 $[a, b]$ 上可导且

$$\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x)$$

变上限求导的三个类型:

$$(1) \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt \right)' = f(\psi(x)) \psi'(x) - f(\varphi(x)) \varphi'(x);$$



$$(2) \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, t) dt \right)' = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt + f(x, \psi(x)) \psi'(x) - f(x, \varphi(x)) \varphi'(x);$$

$$(3) \left(\int_a^b f(x, t) dt \right)' = \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt.$$

【例 1】 设 f 连续, 试求下列函数的导数

$$(1) \int_{e^x}^{x^2} f(t) dt;$$

$$(2) \int_0^x (t-x) f(t) dt;$$

$$(3) \int_0^x \sin(x-t)^2 dt;$$

$$(4) \int_1^2 f(x+t) dt.$$

解 (1) $\left(\int_{e^x}^{x^2} f(t) dt \right)' = 2xf(x^2) - e^x f(e^x).$

$$(2) \int_0^x (t-x) f(t) dt = \int_0^x t f(t) dt - x \int_0^x f(t) dt,$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^x (t-x) f(t) dt = xf(x) - x f(x) - \int_0^x f(t) dt = - \int_0^x f(t) dt.$$

$$(3) \int_0^x \sin(x-t)^2 dt \xrightarrow{x-t=u} \int_0^x \sin u^2 du,$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^x \sin(x-t)^2 dt = \frac{d}{dx} \int_0^x \sin u^2 du = \sin x^2.$$

$$(4) \int_1^2 f(x+t) dt \xrightarrow{x+t=u} \int_{x+1}^{x+2} f(u) du,$$

$$\frac{d}{dx} \int_1^2 f(x+t) dt = f(x+2) - f(x+1).$$

(六) 定积分的性质

1. 不等式

$$(1) \text{ 若 } f(x) \leq g(x), x \in [a, b], \text{ 则 } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

(2) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$, 其中 m, M 分别为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值与最大值.

$$(3) \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

2. 积分中值定理

$$(1) \text{ 若 } f(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上连续, 则 } \int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a), a < \xi < b.$$

【注】注意这里的 ξ 是在开区间里, 这给此定理的应用带来方便, 如下面的例 2.

(2) 若 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $g(x)$ 不变号, 则

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx, a \leq \xi \leq b$$

通常称(1)为积分中值定理, 称(2)为广义积分中值定理. 显然, (1)是(2)的特例, 在(2)中取 $g(x) = 1$ 便可得到(1).



【例 2】 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(b)$. 求证: 在 (a, b) 内至少存在一点 c , 使 $f'(c) = 0$.

证明 由积分中值定理得

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a), a < \xi < b$$

代入 $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(b)$ 得, $f(\xi) = f(b)$, 由罗尔定理得至少存在一点 $c \in (\xi, b) \subset (a, b)$ 使 $f'(c) = 0$.

二、常考题型的方法与技巧

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

题型一 定积分的概念、性质及几何意义

【例 1】 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1^2}{n^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{2^2}{n^2}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 + \frac{n^2}{n^2}\right) \right]^{\frac{1}{n}}$.

解 令 $y_n = \left[\left(1 + \frac{1^2}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2^2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n^2}{n^2}\right) \right]^{\frac{1}{n}}$, 则

$$\ln y_n = \frac{1}{n} \left[\ln \left(1 + \frac{1^2}{n^2}\right) + \ln \left(1 + \frac{2^2}{n^2}\right) + \cdots + \ln \left(1 + \frac{n^2}{n^2}\right) \right]$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln y_n &= \int_0^1 \ln(1+x^2) dx = x \ln(1+x^2) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2} dx \\ &= \ln 2 - 2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

$$\text{原式} = e^{\ln 2 - 2(1 - \frac{\pi}{4})} = 2e^{\frac{\pi}{2} - 2}.$$

【例 2】 设 $f(x)$ 连续, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+2} t \sin\left(\frac{3}{t}\right) f(t) dt =$ _____.

解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+2} t \sin\left(\frac{3}{t}\right) f(t) dt$

(利用积分中值定理)

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2\xi \sin\left(\frac{3}{\xi}\right) f(\xi)$$

$$(x < \xi < x+2)$$

$$= 6.$$

【注】 类似的可求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$.

(0)

【例 3】 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n \sqrt{1+x^2} dx$.

解 (方法一) 由于

$$0 \leq \int_0^1 x^n \sqrt{1+x^2} dx < \sqrt{2} \int_0^1 x^n dx = \frac{\sqrt{2}}{n+1}$$



而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}}{n+1} = 0$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n \sqrt{1+x^2} dx = 0$.

(方法二) 由广义积分中值定理得

$$\int_0^1 x^n \sqrt{1+x^2} dx = \sqrt{1+\xi_n^2} \int_0^1 x^n dx$$

由于 $\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ 为无穷小量, $\sqrt{1+(\xi_n)^2}$ 介于 1 与 $\sqrt{2}$ 之间为有界量,

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n \sqrt{1+x^2} dx = 0$$

【注】有人用积分中值定理得, $\int_0^1 x^n \sqrt{1+x^2} dx = \xi^n \sqrt{1+\xi^2}$, 由于 $0 < \xi < 1$, 所以有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n \sqrt{1+x^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi^n \sqrt{1+\xi^2} = 0$$

这是一种“经典错误”. 原因是积分中值定理中的点 ξ 依赖于积分区间和被积函数, 在本题中, 随着 n 的不同, 被积函数也不同, 从而 ξ 在 $(0, 1)$ 中的位置也不同, 因此应记为 ξ_n , 即由积分中值定理得到的应该是

$$\int_0^1 x^n \sqrt{1+x^2} dx = (\xi_n)^n \sqrt{1+\xi_n^2}$$

虽然 $0 < \xi_n < 1$, 但当 $n \rightarrow \infty$ 时, $(\xi_n)^n$ 有可能不趋于零 (如 $\xi_n = \frac{n}{n+1}$), 因而不能推出

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n \sqrt{1+x^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n^n \sqrt{1+\xi_n^2} = 0$$

【例 4】如图, 连续函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-3, -2]$, $[2, 3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周, 在区间 $[-2, 0]$, $[0, 2]$ 的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周. 设 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, 则下列结论正确的是

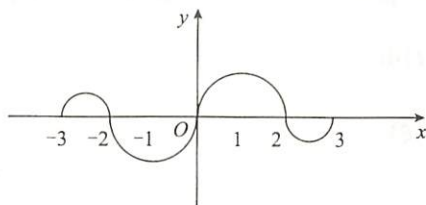


图 3-1

(A) $F(3) = -\frac{3}{4}F(-2)$.

(B) $F(3) = \frac{5}{4}F(2)$.

(C) $F(-3) = \frac{3}{4}F(2)$.

(D) $F(-3) = -\frac{5}{4}F(-2)$.

【解】由图可知 $f(x)$ 是奇函数, 则 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 是偶函数, 则

$$F(-2) = F(2) = \frac{\pi}{2}$$

(几何意义)

$$F(-3) = F(3) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{3}{8}\pi \quad (\text{几何意义})$$

故(C)正确.

题型二 定积分计算

【例 1】 $I = \int_{-1}^1 \frac{2x^2 + \sin x}{1 + \sqrt{1-x^2}} dx.$

解 $I = 4 \int_0^1 \frac{x^2}{1 + \sqrt{1-x^2}} dx = 4 \int_0^1 [1 - \sqrt{1-x^2}] dx$
 $= 4 - 4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = 4 - \pi.$

【注】 由定积分的几何意义知

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{\pi}{4} a^2; \int_0^a \sqrt{2ax - x^2} dx = \frac{\pi}{4} a^2; \int_0^{2a} \sqrt{2ax - x^2} dx = \frac{\pi}{2} a^2 (a > 0).$$

【例 2】 $I = \int_0^{\pi\pi} \sqrt{1 - \sin 2x} dx.$

解 (方法一) 原式 $= n \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \sin 2x} dx$ (周期性)

$$= n \int_0^{\pi} \sqrt{(\cos x - \sin x)^2} dx$$

$$= n \int_0^{\pi} |\cos x - \sin x| dx$$

$$= n \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx + n \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\sin x - \cos x) dx = 2\sqrt{2}n.$$

(方法二) 原式 $= n \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sqrt{1 - \sin 2x} dx = n \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sqrt{(\cos x - \sin x)^2} dx$
 $= n \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x) dx = 2\sqrt{2}n.$

【例 3】 $I = \int_0^{\pi} x \sin^n x dx (n \geqslant 1).$

解 $I = \int_0^{\pi} x \sin^n x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \sin^n x dx$ (利用 $\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$)

$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ (在区间 $[0, \pi]$ 上 $\sin x$ 关于 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称)

$$= \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \pi, & n \text{ 为偶数} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} \cdot \pi, & n \text{ 为大于 1 的奇数} \\ \pi, & n = 1 \end{cases}$$



【注】 特别的 $\int_0^{\pi} x \sin x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \sin x dx = \pi$ 比用分部积分方便.

【例 4】 设 n 为正整数, 证明:

$$\int_0^{2\pi} \cos^n x dx = \int_0^{2\pi} \sin^n x dx = \begin{cases} 0, & n \text{ 为奇数} \\ 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

【证明】 $\int_0^{2\pi} \cos^n x dx = \int_0^{2\pi} \sin^n \left(x + \frac{\pi}{2}\right) dx \xrightarrow{x + \frac{\pi}{2} = t} \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi + \frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$
 $= \int_0^{2\pi} \sin^n x dx \quad (\sin^n x \text{ 以 } 2\pi \text{ 为周期})$

当 n 为奇数时, $\int_0^{2\pi} \sin^n x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^n x dx = 0.$

当 n 为偶数时, $\int_0^{2\pi} \sin^n x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^n x dx = 2 \int_0^{\pi} \sin^n x dx$
 $= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx.$

【注】 本题所证结论是一个常用结论, 如 $\int_0^{2\pi} \cos^2 x dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \pi.$

【例 5】 $I = \int_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx.$

【解】 令 $\arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} = t$, 则 $x = \tan^2 t$, 从而

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} t d \tan^2 t = t \tan^2 t \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 t dt = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$

【例 6】 设 $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t} dt$, 计算 $\int_0^{\pi} f(x) dx.$

【解】 (方法一) $\int_0^{\pi} f(x) dx = x f(x) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{\pi - x} dx$
 $= \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\pi - t} dt - \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{\pi - x} dx$
 $= \int_0^{\pi} \sin x dx = 2.$

(方法二) $\int_0^{\pi} f(x) dx = \int_0^{\pi} f(x) d(x - \pi)$
 $= (x - \pi) f(x) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{(x - \pi) \sin x}{\pi - x} dx$
 $= \int_0^{\pi} \sin x dx = 2.$

(方法三) $\int_0^{\pi} f(x) dx = \int_0^{\pi} dx \int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t} dt$ (累次积分交换次序)



$$= \int_0^{\pi} dt \int_t^{\pi} \frac{\sin t}{\pi - t} dx = \int_0^{\pi} \sin x dx = 2.$$

【例 7】 $I = \int_0^2 f(x-1)dx$, 其中 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x}, & x \geq 0 \\ \frac{1}{1+e^x}, & x < 0 \end{cases}$.

解 令 $x-1=t$, 则

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 f(t)dt = \int_{-1}^0 \frac{dt}{1+e^t} + \int_0^1 \frac{dt}{1+t} \\ &= \int_{-1}^0 \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}} dt + \ln(1+t) \Big|_0^1 \\ &= -\ln(1+e^{-t}) \Big|_{-1}^0 + \ln 2 = \ln(1+e) \end{aligned}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

【例 8】 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$.

解 (方法一) 令 $\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{A(\cos x - \sin x) + B(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} dx$, 则

$$\begin{cases} 1 = -A + B \\ 0 = A + B \end{cases}, \text{解得 } A = -\frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x - \cos x) + (\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} dx \\ &= \frac{1}{2} (-\ln(\sin x + \cos x) + x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

(方法二) 令 $x = \frac{\pi}{2} - t$, 则

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

【注】 积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^p x}{\sin^p x + \cos^p x} dx$ 和 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \tan^p x} dx (p > 0)$ 都可用方法二的方法求解.

【例 9】 $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{1+e^x} \sin^4 x dx$.

解 $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{1+e^x} \sin^4 x dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}} \sin^4 t dt \quad (x = -t)$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+e^t} \sin^4 t dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{1+e^x} \sin^4 x dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+e^x} \sin^4 x dx \right] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{16}.
 \end{aligned}$$

【注】 本题和上一题的方法二都是利用变量代换计算定积分, 这种变量代换的特点是区间不变, 一般的 $\int_a^b f(x) dx \xrightarrow{x=a+b-t} \int_a^b f(a+b-t) dt$. 这种方法通常用在被积函数原函数不易求出的定积分的计算中.

【例 10】 已知 $f(x)$ 连续, $\int_0^x t f(x-t) dt = 1 - \cos x$, 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ 的值.

解 令 $x-t=u$ 得

$$\begin{aligned}
 \int_0^x t f(x-t) dt &= \int_0^x (x-u) f(u) du = x \int_0^x f(u) du - \int_0^x u f(u) du \\
 \frac{d}{dx} \int_0^x t f(x-t) dt &= \int_0^x f(u) du + x f(x) - x f(x) = \int_0^x f(u) du
 \end{aligned}$$

从而有 $\int_0^x f(u) du = \sin x$. 令 $x = \frac{\pi}{2}$ 得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u) du = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

【例 11】 设 $f'(x) = \arcsin(x-1)^2$, $f(0) = 0$, 求 $\int_0^1 f(x) dx$.

解 (方法一) $\int_0^1 f(x) dx = x f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 x \arcsin(x-1)^2 dx$

$$\begin{aligned}
 &= f(1) - \int_0^1 x \arcsin(x-1)^2 dx \\
 &= \int_0^1 f'(x) dx - \int_0^1 x \arcsin(x-1)^2 dx \\
 &= \int_0^1 (1-x) \arcsin(x-1)^2 dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \arcsin u du \quad (\text{令 } (x-1)^2 = u) \\
 &= \frac{1}{2} u \arcsin u \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} du = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

(方法二) $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f(x) d(x-1)$

$$\begin{aligned}
 &= (x-1) f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 (x-1) \arcsin(x-1)^2 dx \\
 &= \int_0^1 (1-x) \arcsin(x-1)^2 dx.
 \end{aligned}$$

以下同方法一.



【注】 类似的:已知 $y'(x) = \arctan(x-1)^2$, 且 $y(0) = 0$, 求 $\int_0^1 y(x) dx$. $\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \ln 2\right)$.

【例 12】 若 $f(x) = \frac{x}{1+\cos^2 x} - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x dx$, 求 $f(x)$.

解 等式 $f(x) = \frac{x}{1+\cos^2 x} - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x dx$ 两端同乘 $\sin x$ 并从 $-\pi$ 到 π 积分得

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx = 2 \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx \\ &= \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx = -\pi \arctan \cos x \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}\end{aligned}$$

$$\text{则 } f(x) = \frac{x}{1+\cos^2 x} - \frac{\pi^2}{2}.$$

题型三 变上限积分函数及其应用

与变上限积分有关的题目主要考查变上限积分函数的连续性、可导性及奇偶性, 其中变上限求导是重点. 其常用的结论有

1. 连续性

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则 $\int_a^x f(t) dt$ 在 $[a, b]$ 上连续.

2. 可导性

有关 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ 的可导性的结论

如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上除点 $x = x_0 \in (a, b)$ 外均连续, 则在点 $x = x_0$ 处

$$f(x) \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

1) 连续 $\longrightarrow$ 可导, 且 $F'(x_0) = f(x_0)$

2) 可去 $\longrightarrow$ 可导, 且 $F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

3) 跳跃 $\longrightarrow$ 连续但不可导, 且 $F'_-(x_0) = f(x_0^-)$, $F'_+(x_0) = f(x_0^+)$

笔记:



3. 奇偶性

1) 若 $f(x)$ 为奇函数, 则 $\int_0^x f(t) dt$ 为偶函数.

2) 若 $f(x)$ 为偶函数, 则 $\int_0^x f(t) dt$ 为奇函数.

【例 1】 设 $f(x)$ 是奇函数, 除 $x=0$ 外处处连续, $x=0$ 是第一类间断点, 则 $\int_0^x f(t) dt$ 是

(A) 连续的奇函数.

(B) 在 $x=0$ 间断的奇函数.

(C) 连续的偶函数.

(D) 在 $x=0$ 间断的偶函数.

解 由于 $f(x)$ 是奇函数, 则 $\int_0^x f(t) dt$ 是偶函数. 由题设知 $f(x)$ 可积, 则 $\int_0^x f(t) dt$ 连续, 故选 (C).

【例 2】 设 $g(x) = \int_0^x f(u) du$, 其中 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x^2 + 1), & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{3}(x-1), & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$, 则 $g(x)$ 在区间

$(0, 2)$ 内

(A) 无界.

(B) 递减.

(C) 不连续.

(D) 连续.

解 由于 $x=1$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点 (第一类), 则 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上可积, 从而 $g(x) = \int_0^x f(u) du$ 在 $(0, 2)$ 内连续. 故应选 (D).

【例 3】 设 $f(x)$ 是连续函数, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数, 则

(A) $f(x)$ 是奇函数 $\Rightarrow F(x)$ 必是偶函数.

(B) $f(x)$ 是偶函数 $\Rightarrow F(x)$ 必是奇函数.

(C) $f(x)$ 是周期函数 $\Rightarrow F(x)$ 必是周期函数.

(D) $f(x)$ 是单调增函数 $\Rightarrow F(x)$ 必是单调增函数.

解 由 $f(x)$ 连续且为奇函数可知, $G(x) = \int_0^x f(u) du$ 为偶函数, 而 $F(x) = G(x) + C$, 则 $F(x)$ 为偶函数. 故应选 (A).

【例 4】 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数, “ $M \Leftrightarrow N$ ”表示“ M 的充分必要条件是 N ”, 则必有

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数.

(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数.

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数.

(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数.

解 由上题可知 (A) 正确.

【例 5】 设函数 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x < \pi \\ 2, & \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, 则

(A) $x = \pi$ 是函数 $F(x)$ 的跳跃间断点. (B) $x = \pi$ 是函数 $F(x)$ 的可去间断点.

(C) $F(x)$ 在 $x = \pi$ 处连续但不可导. (D) $F(x)$ 在 $x = \pi$ 处可导.



解 (方法一)

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \begin{cases} \int_0^x \sin t dt, & 0 \leq x < \pi \\ \int_0^{\pi} \sin t dt + \int_{\pi}^x 2 dt, & \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 - \cos x, & 0 \leq x < \pi \\ 2 + 2x - 2\pi, & \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

因为 $\lim_{x \rightarrow \pi^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} F(x) = F(\pi) = 2$, 所以, $F(x)$ 在 $x = \pi$ 处连续.

$$\text{而 } F'_-(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{F(x) - F(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{1 - \cos x - 2}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sin x}{1} = 0$$

$$F'_+(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{F(x) - F(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{2 + 2x - 2\pi - 2}{x - \pi} = 2$$

由此可知 $F'_-(\pi) \neq F'_+(\pi)$, 即 $F(x)$ 在 $x = \pi$ 处不可导.

故应选(C).

(方法二) 由于 $x = \pi$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点, 则 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 在 $x = \pi$ 处连续但不可导, 故应选(C).

【例 6】 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f(0) \neq 0$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t)f(t) dt}{x \int_0^x f(x-t) dt}$.

解 (方法一) $\int_0^x f(x-t) dt = \int_0^x f(u) du$, (令 $x-t=u$)

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt}{x \int_0^x f(t) dt}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt + xf(x) - xf(x)}{\int_0^x f(t) dt + xf(x)}$$

(洛必达法则)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{\int_0^x f(t) dt + xf(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(c)}{xf(c) + xf(x)}$$

(积分中值定理, c 在 0 与 x 之间)

$$= \frac{f(0)}{f(0) + f(0)} = \frac{1}{2}$$

(方法二) 同方法一原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt}{x \int_0^x f(t) dt}$.

由 $f(0) \neq 0$ 得, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\int_0^x f(t) dt \sim \int_0^x f(0) dt = f(0)x$,

$$\int_0^x t f(t) dt \sim \int_0^x f(0) t dt = \frac{f(0)}{2} x^2,$$



$$\text{则原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt}{x \int_0^x f(t) dt} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(0)x^2 - \frac{f(0)}{2}x^2}{f(0)x^2} = \frac{1}{2}.$$

(方法三) 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\xi) \int_0^x (x-t) dt}{x^2 f(x-c)}$ (这里分子用了广义积分中值定理, 分母用了积分中值定理, 其中 ξ, c 都介于 0 与 x 之间.)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t) dt}{x^2} \quad (\text{这里 } \lim_{x \rightarrow 0} f(\xi) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x-c) = f(0) \neq 0)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

【注】(1) 方法二中用到一个关于变上限积分的等价代换的结论:

若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, 则

$$\int_0^x f(t) dt \sim \int_0^x g(t) dt$$

(2) 本题中所用的三种解法是处理变上限积分有关极限问题常用的三种方法:

(i) 洛必达法则;

(ii) 等价无穷小代换;

(iii) 积分中值定理.

类似的可以求解下列题目

1. 设 $f(x)$ 连续, 且 $f(1) = 1$, 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^{\frac{1}{x}} f(xt) dt}{x^3 - 1}$. ($-\frac{1}{3}$)

2. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{x-te} dt}{\sqrt{x^3}}$. ($\frac{2}{3}$)

3. 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f(0) \neq 0$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x f(x-t) dt}{\int_0^x t f(x-t) dt}$. (2)

【例 7】 设 $F(x) = \int_x^{x+2\pi} e^{\sin t} \cdot \sin t dt$, 则 $F(x)$

(A) 为正常数.

(B) 为负常数.

(C) 为 0.

(D) 不是常数.

解 由 $F'(x) = e^{\sin(x+2\pi)} \sin(x+2\pi) - e^{\sin x} \sin x = 0$

知 $F(x) = C$.

也可由 $e^{\sin t} \sin t$ 以 2π 为周期得

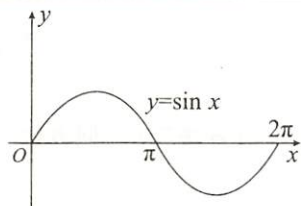


图 3-2

$$F(x) = \int_x^{x+2\pi} e^{\sin t} \sin t dt = \int_0^{2\pi} e^{\sin t} \sin t dt = C.$$

$$\begin{aligned} \text{又 } F(0) &= \int_0^{2\pi} e^{\sin t} \sin t dt = - \int_0^{2\pi} e^{\sin t} d\cos t \\ &= -e^{\sin t} \cos t \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} e^{\sin t} \cos^2 t dt \\ &= \int_0^{2\pi} e^{\sin t} \cos^2 t dt > 0, \end{aligned}$$

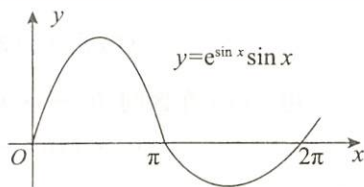


图 3-3

故 $F(x)$ 为正常数, 应选(A).

【注】 说明积分 $\int_0^{2\pi} e^{\sin t} \sin t dt > 0$ 最简单的方法是几何的方法(如上图).

类似的可求解

设 $I_k = \int_0^{k\pi} e^{x^2} \sin x dx (k=1,2,3)$, 则有

$$(A) I_1 < I_2 < I_3.$$

$$(B) I_3 < I_2 < I_1.$$

$$(C) I_2 < I_3 < I_1.$$

$$(D) I_2 < I_1 < I_3.$$

(D)

【例 8】 试证: $F(x) = \int_0^x (t-t^2) \sin^{2n} t dt$ 在 $x \geq 0$ 上最大值不超过 $\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$.

证明 (方法一) 令 $F'(x) = (x-x^2) \sin^{2n} x = 0$, 得 $x=1, x=k\pi, k=1,2,\dots$.

由于在 $x=k\pi$ 邻近两侧 $F'(x)$ 不变号, 则 $x=k\pi$ 不是 $F(x)$ 的极值点.

当 $0 < x < 1$ 时, $F'(x) > 0$, 当 $x > 1$ 时, $F'(x) < 0$, 则 $F(x)$ 在 $x=1$ 处取极大值, 又因为 $x=1$ 为 $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上唯一的极值点, 则该极大值为最大值.

$$F(1) = \int_0^1 (t-t^2) \sin^{2n} t dt \leq \int_0^1 (t-t^2) t^{2n} dt = \frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$$

原题得证.

(方法二) $F'(x) = x(1-x) \sin^{2n} x$, 则

当 $0 < x < 1$ 时, $F'(x) > 0$, $F(x)$ 单调增;

当 $x > 1$ 时, $F'(x) \leq 0$, $F(x)$ 单调不增. 则 $F(1)$ 为 $F(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上的最大值.

以下同方法一.

【例 9】 设 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上可导, $f(0) = 0$, 且其反函数为 $g(x)$. 若

$$\int_0^{f(x)} g(t) dt = x^2 e^x$$

求 $f(x)$.

解 等式 $\int_0^{f(x)} g(t) dt = x^2 e^x$ 两端对 x 求导得

$$g[f(x)] f'(x) = 2xe^x + x^2 e^x$$

而 $g[f(x)] = x$, 故

$$xf'(x) = 2xe^x + x^2 e^x$$

$$f'(x) = 2e^x + xe^x \quad (x > 0)$$



$$f(x) = \int (2e^x + xe^x) dx = (x+1)e^x + C \quad (x > 0)$$

由 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上可导知

$$0 = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [(x+1)e^x + C] = 1 + C$$

即有 $C = -1$, 从而

$$f(x) = (x+1)e^x - 1$$

【例 10】 设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内连续, $f(1) = \frac{5}{2}$, 且对所有 $x, t \in (0, +\infty)$ 满足条件 $\int_1^x f(u) du = t \int_1^x f(u) du + x \int_1^t f(u) du$, 求 $f(x)$.

解 等式 $\int_1^x f(u) du = t \int_1^x f(u) du + x \int_1^t f(u) du$ 两端对 t 求导得

$$xf(xt) = \int_1^x f(u) du + xf(t)$$

令 $t = 1$ 得

$$xf(x) = \int_1^x f(u) du + \frac{5}{2}x$$

上式两端对 x 求导得

$$f(x) + xf'(x) = f(x) + \frac{5}{2}$$

即

$$f'(x) = \frac{5}{2} \frac{1}{x}$$

从而

$$f(x) = \frac{5}{2} \ln x + C$$

又 $f(1) = \frac{5}{2}$, 代入得 $C = \frac{5}{2}$, 从而

$$f(x) = \frac{5}{2} (\ln x + 1)$$

【例 11】 设 $f(t)$ 连续, $f(t) > 0$, $f(-t) = f(t)$. 令

$$F(x) = \int_{-a}^a |x-t| f(t) dt, \quad -a \leq x \leq a$$

(1) 试证曲线 $y = F(x)$ 在 $[-a, a]$ 上是凹的;

(2) 当 x 为何值时, $F(x)$ 取得最小值?

(3) 若 $F(x)$ 的最小值可表示为 $f(a) - a^2 - 1$, 试求 $f(t)$.

解 (1) 由于

$$F(x) = \int_{-a}^a |x-t| f(t) dt = \int_{-a}^x (x-t) f(t) dt + \int_x^a (t-x) f(t) dt$$

$$= x \int_{-a}^x f(t) dt - \int_{-a}^x t f(t) dt + \int_x^a t f(t) dt - x \int_x^a f(t) dt,$$

$$F'(x) = \int_{-a}^x f(t) dt + xf(x) - xf(x) - xf(x) + xf(x) - \int_x^a f(t) dt$$

$$= \int_{-a}^x f(t) dt - \int_x^a f(t) dt,$$

$$F''(x) = f(x) + f(x) = 2f(x) > 0,$$



故曲线 $y = F(x)$ 在 $[-a, a]$ 上是凹的.

(2) 令 $F'(x) = \int_{-a}^x f(t)dt - \int_x^a f(t)dt = 0$, 得 $F'(0) = 0$ ($f(x)$ 为偶函数).

又 $F''(x) > 0$, 则 $F'(x)$ 单调增, 从而 $x = 0$ 为 $F(x)$ 在 $[-a, a]$ 上唯一的驻点.
又 $F''(0) > 0$, 则 $F(x)$ 在 $x = 0$ 取极小值, 由唯一性知, $F(x)$ 在 $x = 0$ 取最小值.

(3) $F(x)$ 在 $[-a, a]$ 上最小值为

$$F(0) = \int_{-a}^a |t| f(t)dt = 2 \int_0^a t f(t)dt$$

从而有

$$2 \int_0^a t f(t)dt = f(a) - a^2 - 1$$

上式两端对 a 求导得, $2af(a) = f'(a) - 2a$, 解此一阶线性微分方程得 $f(a) = Ce^{a^2} - 1$. 又 $f(0) = 1$, 则 $C = 2$, 从而

$$f(t) = 2e^{t^2} - 1$$

题型四 积分不等式

证明积分不等式常用的方法:

1) 变量代换; 2) 积分中值定理; 3) 变上限积分;

4) 柯西积分不等式 $(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx$.

【例 1】 设 $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{x} dx$, $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\tan x} dx$, 则

(A) $I_1 > I_2 > 1$.

(B) $1 > I_1 > I_2$.

(C) $I_2 > I_1 > 1$.

(D) $1 > I_2 > I_1$.

解 (方法一) 由于 $\sin x < x < \tan x$, ($0 < x < \frac{\pi}{2}$), 则 $\frac{x}{\tan x} < \frac{\tan x}{x}$, 即 $I_2 < I_1$, 从

而(C)和(D)均不正确.

又

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\tan x} dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = \frac{\pi}{4} < 1$$

则(A)不正确, 故应选(B).

(方法二) 由于 $\sin x < x < \tan x$, ($0 < x < \frac{\pi}{2}$), 则

$$\frac{x}{\tan x} < \frac{\tan x}{x} < \frac{\tan x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}$$

从而有

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\tan x} dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{x} dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} dx$$



$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} dx = \ln(\sec x + \tan x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln(1 + \sqrt{2}) < \ln e = 1$$

故应选(B).

【例 2】 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 单调减. 求证:

$$\int_0^a f(x) dx \geq a \int_0^1 f(x) dx \quad (0 < a < 1)$$

证明 (方法一) 只要证 $\int_0^a f(x) dx \geq a \int_0^a f(x) dx + a \int_a^1 f(x) dx$, 即

$$(1-a) \int_0^a f(x) dx \geq a \int_a^1 f(x) dx$$

由积分中值定理知

$$(1-a) \int_0^a f(x) dx = a(1-a)f(c_1), \quad 0 < c_1 < a$$

$$a \int_a^1 f(x) dx = a(1-a)f(c_2), \quad a < c_2 < 1$$

由于 $f(x)$ 单调减, 则 $f(c_1) > f(c_2)$, 从而

$$(1-a) \int_0^a f(x) dx \geq a \int_a^1 f(x) dx$$

原题得证.

(方法二) $\int_0^a f(x) dx = a \int_0^1 f(at) dt$ (令 $x = at$)
 $= a \int_0^1 f(ax) dx.$

由于 $f(x)$ 单调减, 而 $ax < x$, 则 $f(ax) \geq f(x)$, 从而有

$$a \int_0^1 f(ax) dx \geq a \int_0^1 f(x) dx$$

$$\text{即 } \int_0^a f(x) dx \geq a \int_0^1 f(x) dx.$$

(方法三) 令 $F(a) = \int_0^a f(x) dx - a \int_0^1 f(x) dx$, ($0 \leq a \leq 1$), 则

$$F'(a) = f(a) - \int_0^1 f(x) dx = f(a) - f(c), \quad 0 < c < 1$$

由于 $f(x)$ 单调减, 则当 $0 < a < c$ 时, $F'(a) > 0$, $F(a)$ 单调增; 当 $c < a < 1$ 时, $F'(a) < 0$, $F(a)$ 单调减. 则 $F(a)$ 在 $[0, 1]$ 上的最小值必在区间的端点取到. 又 $F(0) = F(1) = 0$, 则

$$F(a) \geq 0 \quad (0 < a < 1)$$

原题得证.

【例 3】 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可导, 且 $f(0) = 0, 0 < f'(x) < 1$. 求证:

$$\left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2 > \int_0^1 f^3(x) dx$$

证明 令 $F(x) = \left(\int_0^x f(t) dt \right)^2 - \int_0^x f^3(t) dt$, 只要证 $F(1) > 0$.

由 $f(0) = 0, 0 < f'(x) < 1$ 知, $f(x) > 0, x \in (0, 1]$. 又



$$F'(x) = 2f(x) \int_0^x f(t) dt - f^3(x) = f(x) \left[2 \int_0^x f(t) dt - f^2(x) \right]$$

令 $\varphi(x) = 2 \int_0^x f(t) dt - f^2(x)$, 则

$$\varphi'(x) = 2f(x) - 2f(x)f'(x) = 2f(x)(1 - f'(x)) > 0$$

从而 $\varphi(x)$ 单调增. 又 $\varphi(0) = 0$, 则

$$\varphi(x) > 0, x \in (0, 1]$$

从而 $F'(x) > 0, x \in (0, 1]$, 则 $F(x)$ 单调增, 从而 $F(1) > F(0) = 0$, 原题得证.

【例 4】 设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x)$ 单调增加, $0 \leq g(x) \leq 1$.

证明: (1) $0 \leq \int_a^x g(t) dt \leq (x-a), x \in [a, b]$;

$$(2) \int_a^{a+\int_a^b g(t) dt} f(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx.$$

证明 (1) 由 $0 \leq g(x) \leq 1$ 得

$$0 \leq \int_a^x g(t) dt \leq \int_a^x 1 dt = (x-a), x \in [a, b]$$

(2) 令 $F(u) = \int_a^u f(x) g(x) dx - \int_a^{a+\int_a^u g(t) dt} f(x) dx$, 只要证明 $F(b) \geq 0$. 显然 $F(a) = 0$, 只要证明 $F(u)$ 单调增.

$$\begin{aligned} F'(u) &= f(u)g(u) - f\left(a + \int_a^u g(t) dt\right)g(u) \\ &= g(u) \left[f(u) - f\left(a + \int_a^u g(t) dt\right) \right] \end{aligned}$$

由(1)的结论 $0 \leq \int_a^x g(t) dt \leq (x-a)$ 知, $a \leq a + \int_a^x g(t) dt \leq x$, 即

$$a \leq a + \int_a^u g(t) dt \leq u$$

又 $f(x)$ 单调增加, 则 $f(u) \geq f\left(a + \int_a^u g(t) dt\right)$, 因此, $F'(u) \geq 0$, 从而 $F(b) \geq 0$, 即

$$\int_a^{a+\int_a^b g(t) dt} f(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx$$

【例 5】 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续导数, $f(a) = 0$, 求证:

$$\max_{a \leq x \leq b} |f'(x)| \geq \frac{2}{(b-a)^2} \int_a^b |f(x)| dx$$

证明 (方法一) 由于 $f(x) = \int_a^x f'(t) dt$, 故

$$|f(x)| = \left| \int_a^x f'(t) dt \right| \leq \int_a^x |f'(t)| dt \leq (x-a) \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)|$$

$$\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b (x-a) dx \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)| = \frac{1}{2}(b-a)^2 \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)|$$

从而 $\max_{a \leq x \leq b} |f'(x)| \geq \frac{2}{(b-a)^2} \int_a^b |f(x)| dx$.

(方法二) 由拉格朗日中值定理知 $f(x) = f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a)$, 则当 $a \leq$



$x \leq b$ 时,

$$|f(x)| = |f'(\xi)| (x-a) \leq \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)| (x-a)$$

上式两端从 a 到 b 积分得

$$\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b (x-a) dx \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)| = \frac{1}{2}(b-a)^2 \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)|$$

$$\text{故 } \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)| \geq \frac{2}{(b-a)^2} \int_a^b |f(x)| dx.$$

【注】 类似的可以证明

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上具有一阶连续导数, 且 $f(0) = f(1) = 0$. 证明

$$\left| \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \frac{1}{4} \max_{0 \leq x \leq 1} \{ |f'(x)| \}$$

【例 6】 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有连续导数, 且 $f(0) = 0$, 求证:

$$\int_0^1 f^2(x) dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 f'^2(x) dx$$

证明

由于 $f(x) = \int_0^x f'(t) dt$, 故

$$f^2(x) = \left(\int_0^x f'(t) dt \right)^2 \leq \int_0^x 1^2 dt \cdot \int_0^x f'^2(t) dt \quad (\text{柯西积分不等式})$$

$$= x \int_0^x f'^2(t) dt \leq x \int_0^1 f'^2(t) dt$$

$$\int_0^1 f^2(x) dx \leq \int_0^1 x dx \cdot \int_0^1 f'^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^1 f'^2(t) dt.$$

【注】 本题若再加一个条件 $f(1) = 0$, 便可证明

$$\int_0^1 f^2(x) dx \leq \frac{1}{4} \int_0^1 f'^2(x) dx \quad \text{及} \quad \int_0^1 f^2(x) dx \leq \frac{1}{8} \int_0^1 f'^2(x) dx$$

第三节 反常积分

一、考试内容要点精讲

(一) 无穷区间上的反常积分

定义 1 设 $f(x)$ 为 $[a, +\infty)$ 上的连续函数, 如果极限 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx$ 存在, 则称此极限

为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a, +\infty)$ 上的反常积分, 记作 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, 即

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx$$



这时也称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **收敛**. 如果上述极限不存在, 则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **发散**.

定义 2 设 $f(x)$ 为 $(-\infty, b]$ 上的连续函数, 则可类似的定义函数 $f(x)$ 在 **无穷区间** $(-\infty, b]$ 上的反常积分

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x)dx$$

定义 3 设 $f(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数, 如果反常积分 $\int_{-\infty}^0 f(x)dx$ 和 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 都收敛, 则称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ **收敛**, 且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx$$

如果 $\int_{-\infty}^0 f(x)dx$ 与 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 之一发散, 则称 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ **发散**.

定理 1 (比较判别法) 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 且 $0 \leq f(x) \leq g(x)$, 则

- (1) 当 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛时, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛;
- (2) 当 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散时, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散.

定理 2 (比较法的极限形式) 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上非负连续, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$ (λ 有限或无穷), 则

- (1) 当 $\lambda \neq 0$ 时, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 同敛散;
- (2) 当 $\lambda = 0$ 时, 若 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛;
- (3) 当 $\lambda = +\infty$ 时, 若 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也发散.

常用结论: $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx \begin{cases} p > 1, & \text{收敛} \\ p \leq 1, & \text{发散} \end{cases} \quad (a > 0).$

(二) 无界函数的反常积分

如果函数 $f(x)$ 在点 a 的任一邻域内都无界, 那么点 a 称为函数 $f(x)$ 的**瑕点**(也称为无界点). 无界函数的反常积分也称为**瑕积分**.

定义 1 设函数 $f(x)$ 在 $(a, b]$ 上连续, 点 a 为函数 $f(x)$ 的瑕点. 如果极限

$$\lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x)dx$$

存在, 则称此极限为函数 $f(x)$ 在**区间** $[a, b]$ 上的反常积分, 记作 $\int_a^b f(x)dx$, 即

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x)dx$$

这时也称反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ **收敛**. 如果上述极限不存在, 则称反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ **发散**.



定义 2 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b)$ 上连续, 点 b 为函数 $f(x)$ 的瑕点, 则可类似的定义函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的反常积分

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$$

定义 3 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上除点 $c (a < c < b)$ 外连续, 点 c 为函数 $f(x)$ 的瑕点. 如果反常积分 $\int_a^c f(x) dx$ 和 $\int_c^b f(x) dx$ 都收敛, 则称反常积分 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛, 且

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

如果 $\int_a^c f(x) dx$ 与 $\int_c^b f(x) dx$ 之一发散, 则称 $\int_a^b f(x) dx$ 发散.

定理 1 (比较判别法) 设 $f(x), g(x)$ 在 $(a, b]$ 上连续, 且 $0 \leq f(x) \leq g(x), x = a$ 为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的瑕点. 则

(1) 当 $\int_a^b g(x) dx$ 收敛时, $\int_a^b f(x) dx$ 收敛;

(2) 当 $\int_a^b f(x) dx$ 发散时, $\int_a^b g(x) dx$ 发散.

定理 2 (比较法的极限形式) 设 $f(x), g(x)$ 在 $(a, b]$ 上非负连续, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$ (有限或无穷), 则

(1) 当 $\lambda \neq 0$ 时, $\int_a^b f(x) dx$ 与 $\int_a^b g(x) dx$ 同敛散;

(2) 当 $\lambda = 0$ 时, 若 $\int_a^b g(x) dx$ 收敛, 则 $\int_a^b f(x) dx$ 也收敛;

(3) 当 $\lambda = +\infty$ 时, 若 $\int_a^b g(x) dx$ 发散, 则 $\int_a^b f(x) dx$ 也发散.

常用结论: $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx \begin{cases} p < 1, & \text{收敛} \\ p \geq 1, & \text{发散} \end{cases}$

$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^p} dx \begin{cases} p < 1, & \text{收敛} \\ p \geq 1, & \text{发散} \end{cases}$

二、常考题型的方法与技巧

题型一 反常积分的概念与敛散性

【例 1】 下列广义积分发散的是

(A) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sin x}$.

(B) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

(C) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

(D) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

解 (方法一) 排除法

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_{-1}^1 = \pi, \text{故收敛};$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \text{ 肯定收敛, 因为 } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 (\text{概率积分});$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x} \Big|_2^{+\infty} = \frac{1}{\ln 2}, \text{故收敛},$$

故应选(A).

(方法二) 直接法

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sin x} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sin x} + \int_0^1 \frac{dx}{\sin x}$$

由于 $x \rightarrow 0^+$ 时, $\sin x \sim x$, 则 $\int_0^1 \frac{dx}{\sin x}$ 与 $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ 同敛散. 而 $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ 发散, 则 $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sin x} dx$ 发散, 故选(A).

【例2】若反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a (1+x)^b} dx$ 收敛, 则

(A) $a < 1, b > 1$.

(B) $a > 1, b > 1$.

(C) $a < 1, a+b > 1$.

(D) $a > 1, a+b > 1$.

解 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a (1+x)^b} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^a (1+x)^b} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a (1+x)^b} dx.$

由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^a (1+x)^b} = 1 \neq 0$, 则反常积分 $\int_0^1 \frac{1}{x^a (1+x)^b} dx$ 与 $\int_0^1 \frac{1}{x^a} dx$ 同敛散, 而 $\int_0^1 \frac{1}{x^a} dx$

当且仅当 $a < 1$ 时收敛, 则 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a (1+x)^b} dx$ 当且仅当 $a < 1$ 时收敛.

由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^a (1+x)^b} = 1 \neq 0$, 则反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a (1+x)^b} dx$ 与 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{a+b}} dx$ 同敛散, 而

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{a+b}} dx$ 当且仅当 $a+b > 1$ 时收敛, 则 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a (1+x)^b} dx$ 当且仅当 $a+b > 1$ 时收敛.

综上可知, 若反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a (1+x)^b} dx$ 收敛, 则 $a < 1$, 且 $a+b > 1$, 故选(C).

【例3】设 m, n 均是正整数, 则反常积分 $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ 的收敛性

(A) 仅与 m 的取值有关.

(B) 仅与 n 的取值有关.

(C) 与 m, n 的取值都有关.

(D) 与 m, n 的取值都无关.

解 $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$

由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} = 1$, 且反常积分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{\frac{2}{n}}}{\sqrt[n]{x}} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^{\frac{1}{n}-\frac{2}{n}}}$ 收敛 (m, n 为正整数,



$\frac{1}{n} - \frac{2}{m} < 1$), 则反常积分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[n]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[m]{x}} dx$ 收敛.

由于 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{\sqrt[n]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[m]{x}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x} \ln^{\frac{2}{m}}(1-x) = 0$, 且反常积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$ 收敛,

则反常积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt[n]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[m]{x}} dx$ 收敛. 故反常积分 $\int_0^1 \frac{\sqrt[n]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[m]{x}} dx$ 的收敛性与 m, n 的取值都无关, 选(D).

【例 4】 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^{a-1}}, & 1 < x < e \\ \frac{1}{x \ln^{a+1} x}, & x \geq e \end{cases}$. 若反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 则

(A) $a < -2$. (B) $a > 2$. (C) $-2 < a < 0$. (D) $0 < a < 2$.

解 $\int_1^{+\infty} f(x) dx = \int_1^e \frac{dx}{(x-1)^{a-1}} + \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^{a+1} x}$.

由 $\int_1^e \frac{dx}{(x-1)^{a-1}}$ 收敛知 $a-1 < 1$, 即 $a < 2$. 又

$$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^{a+1} x} = \int_e^{+\infty} \frac{d \ln x}{\ln^{a+1} x} \stackrel{\text{令 } t = \ln x}{=} \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{a+1}}$$

由该积分收敛知 $a+1 > 1$, 即 $a > 0$. 故 $0 < a < 2$, 应选(D).

题型二 反常积分计算

【例 1】 计算 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx$.

解 原式 $= - \int_1^{+\infty} \arctan x d \frac{1}{x} = - \frac{\arctan x}{x} \Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)}$
 $= \frac{\pi}{4} + \ln \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$.

【例 2】 计算 $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^4 \sqrt{x^2-2x}}$.

解 原式 $= \int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^4 \sqrt{(x-1)^2-1}}$
 $= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec t \tan t dt}{\sec^4 t \tan t}$ (令 $(x-1) = \sec t$)
 $= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t dt = \frac{2}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{8}$.



【例 3】 计算 $\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx$.

$$\begin{aligned} \textcircled{\text{解}} \text{ 原式} &= \int_0^{+\infty} \frac{xe^x}{(1+e^x)^2} dx = - \int_0^{+\infty} x d \frac{1}{1+e^x} = - \frac{x}{1+e^x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+e^x} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = - \ln(1+e^{-x}) \Big|_0^{+\infty} = \ln 2. \end{aligned}$$

【例 4】 求证: $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$, 并求其值.

③ 令 $x = \frac{1}{t}$, 得

$$\text{左端} = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \int_{+\infty}^0 \frac{\frac{1}{t^2}}{1+\frac{1}{t^4}} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4} dt = \text{右端}$$

$$\text{原式} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan \frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan \frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}} \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

第四节 定积分应用

一、考试内容要点精讲

用定积分可以计算一些几何量与物理量(平面图形的面积、平面曲线的弧长、旋转体的体积及侧面积、平行截面面积为已知的立体体积、变力做功、压力、引力和函数平均值等), 解决这些问题经常采用的就是所谓的“元素法”.

(一) 几何应用

1. 平面图形的面积

计算平面图形的面积时, 利用二重积分比利用一元定积分的元素法方便. 设有平面域 D , 则该平面域 D 的面积为

$$S = \iint_D 1 d\sigma$$

1) 若平面域 D 由曲线 $y = f(x)$, $y = g(x)$ ($f(x) \geq g(x)$), $x = a$, $x = b$ ($a < b$) 所围成(如图 3-4), 则

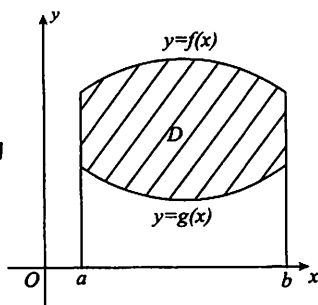


图 3-4



$$S = \iint_D 1 d\sigma = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{f(x)} 1 dy = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

2) 若平面域 D 由曲线 $r = r(\theta)$, $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ ($\alpha < \beta$) 所围成(如图 3-5), 则其面积为

$$S = \iint_D 1 d\sigma = \int_a^\beta d\theta \int_0^{r(\theta)} r dr = \frac{1}{2} \int_a^\beta r^2(\theta) d\theta$$

【注】平面域 D 的面积直接用二重积分 $S = \iint_D 1 d\sigma$ 计算, 然

后根据积分域 D 选择计算二重积分的方法(直角坐标、极坐标、奇偶性、对称性).

2. 空间体的体积

1) 旋转体的体积

旋转体的体积的一般问题是平面域 D 绕直线 $L: ax + by + c = 0$ (该直线不穿过区域 D , 如图 3-6) 旋转所得旋转体体积, 记该体积为 V . 该问题利用二重积分比利用一元定积分的元素法方便. 在区域 D 中取一小区域 $(d\sigma)$, 其面积记为 $d\sigma$, (x, y) 为区域 $(d\sigma)$ 中的任一点, 则该小区域绕直线 L 旋转所得环状体的体积近似值为

$$dv = 2\pi r(x, y) d\sigma$$

其中 $r(x, y)$ 为点 (x, y) 到直线 L 的距离, 即 $r(x, y) = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. 则

$$V = 2\pi \iint_D r(x, y) d\sigma$$

特别地, 若区域 D 由曲线 $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$) 和直线 $x = a$, $x = b$ ($0 \leq a < b$) 及 x 轴所围成(如图 3-7), 则

(1) 区域 D 绕 x 轴旋转($r(x, y) = y$)一周所得旋转体的体积为

$$V_x = 2\pi \iint_D y d\sigma = 2\pi \int_a^b dx \int_0^{f(x)} y dy = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

(2) 区域 D 绕 y 轴旋转($r(x, y) = x$)一周所得旋转体的体积为

$$V_y = 2\pi \iint_D x d\sigma = 2\pi \int_a^b dx \int_0^{f(x)} x dy = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

【注】平面域 D 绕直线 $L: ax + by + c = 0$ (该直线不穿过区域 D) 旋转所得旋转体体积直接用二重积分 $V = 2\pi \iint_D r(x, y) d\sigma$ 计算, 然后选择计算二重积分的方法(直角坐标、极坐标、奇偶性、对称性). 用这个方法比用一元的元素法简单得多.

2) 已知横截面面积的体积

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

3. 曲线弧长(数学三不要求)

1) 设曲线段 C 由直角坐标方程 $y = y(x)$ ($a \leq x \leq b$) 给出, 其中 $y(x)$ 在 $[a, b]$ 上有一阶连续导数, 则该曲线段的弧长为

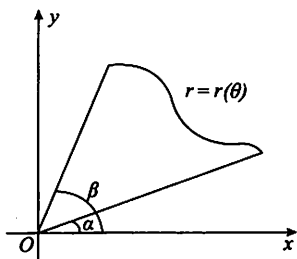


图 3-5

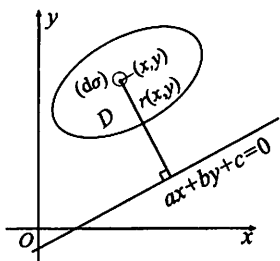


图 3-6

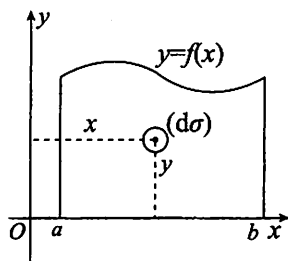


图 3-7

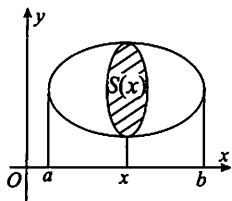


图 3-8

$$s = \int_a^b \sqrt{1+y'^2} dx$$

2) 设曲线段 C 由参数方程 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} (\alpha \leq t \leq \beta)$ 给出, 其中 $x(t), y(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上有一阶连续导数, 则该曲线段的弧长为

$$s = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$$

3) 设曲线段 C 由极坐标方程 $r = r(\theta) (\alpha \leq \theta \leq \beta)$ 给出, 其中 $r(\theta)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上有一阶连续导数, 则该曲线段的弧长为

$$s = \int_a^b \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta$$

4. 旋转体侧面积(数学三不要求)

曲线 $y = f(x) (f(x) \geq 0)$ 和直线 $x = a, x = b (0 \leq a < b)$ 及 x 轴所围成区域绕 x 轴旋转所得旋转体的侧面积为

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1+f'^2(x)} dx$$

(二) 物理应用(数学三不要求)

物理应用主要有以下三个问题

1. 变力沿直线所做的功;
2. 液体的压力;
3. 引力.

二、常考题型的方法与技巧

题型一 几何应用

【例 1】 设 $f(x) = \int_{-1}^x (1 - |t|) dt (x \geq -1)$, 求曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴所围图形的面积.

解

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} \int_{-1}^x (1+t) dt, & -1 \leq x \leq 0 \\ \int_{-1}^0 (1+t) dt + \int_0^x (1-t) dt, & x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}(1+x)^2, & -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{2}(1+2x-x^2), & x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

令 $1+2x-x^2 = 0$, 得 $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$, 从而

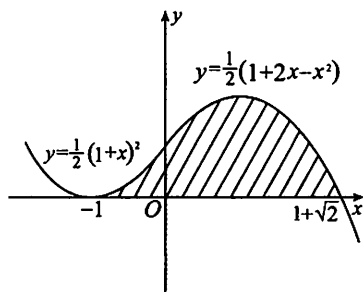


图 3-9



$$S = \int_{-1}^0 \frac{1}{2}(1+x)^2 dx + \int_0^{1+\sqrt{2}} \frac{1}{2}(1+2x-x^2) dx = 1 + \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

【例 2】 设平面图形 A 由 $x^2 + y^2 \leq 2x$ 与 $y \geq x$ 所确定, 求图形 A 绕 $x=2$ 旋转一周所得旋转体的体积.

④ (方法一) 利用一元函数的微元法, 对 x 积分

$$dv = 2\pi(2-x)(\sqrt{2x-x^2}-x)dx,$$

$$V = 2\pi \int_0^1 (2-x)(\sqrt{2x-x^2}-x)dx$$

$$= 2\pi \left[\int_0^1 (1-x)\sqrt{2x-x^2} dx + \int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx - \int_0^1 (2-x)x dx \right]$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{3}(2x-x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 + \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} \right] = \frac{\pi^2}{2} - \frac{2\pi}{3},$$

其中 $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx = \frac{\pi}{4}$ 为 $\frac{1}{4}$ 单位圆面积.

(方法二) 利用一元函数的微元法, 对 y 积分

$$dv = \pi[(2-(1-\sqrt{1-y^2}))^2 - (2-y)^2]dy,$$

$$V = \pi \int_0^1 [(2-(1-\sqrt{1-y^2}))^2 - (2-y)^2] dy - \pi \int_0^1 (2-y)^2 dy$$

$$= \pi \int_0^1 (2-y^2+2\sqrt{1-y^2}) dy - \frac{7}{3}\pi$$

$$= \frac{5}{3}\pi + \frac{1}{2}\pi^2 - \frac{7}{3}\pi = \frac{\pi^2}{2} - \frac{2\pi}{3},$$

其中 $\int_0^1 \sqrt{1-y^2} dy = \frac{\pi}{4}$ 为 $\frac{1}{4}$ 单位圆面积.

(方法三) 利用二重积分

$$V_{x=2} = 2\pi \iint_D r(x,y) d\sigma = 2\pi \iint_D (2-x) d\sigma$$

$$= 2\pi \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2x-x^2}} (2-x) dy$$

$$= 2\pi \int_0^1 (2-x)(\sqrt{2x-x^2}-x) dx,$$

以下同方法一.

【例 3】 过点 $(1,0)$ 作曲线 $y=x^2$ 的切线, 该切线与曲线 $y=x^2$ 及 x 轴围成平面图形 D.

(1) 求 D 的面积 A;

(2) 求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积 V;

(3) 求 D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积 V;

(4) 求 D 绕直线 $y=4$ 旋转一周所得旋转体的体积 V.

④ (1) 设过点 $(1,0)$ 的曲线 $y=x^2$ 的切线方程为

$y=k(x-1)$, 其切点为 (x_0, y_0) , 则

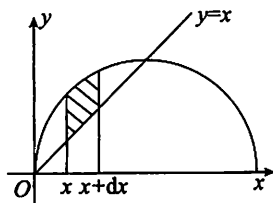


图 3-10

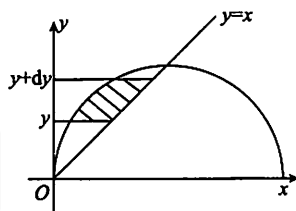


图 3-11

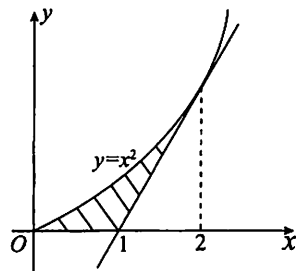


图 3-12

$$\begin{cases} x_0^2 = k(x_0 - 1) \\ 2x_0 = k \end{cases}$$

由上式解得 $x_0 = 2, k = 4$, 切线方程为 $y = 4(x - 1)$, 从而

$$A = \iint_D 1 d\sigma = \int_0^4 dy \int_{\sqrt{y}}^{\frac{y}{4}+1} dx = \frac{2}{3}$$

$$(2) V_x = 2\pi \iint_D r(x, y) d\sigma = 2\pi \iint_D y d\sigma = 2\pi \int_0^4 dy \int_{\sqrt{y}}^{\frac{y}{4}+1} y dx = \frac{16}{15}\pi.$$

$$(3) V_y = 2\pi \iint_D r(x, y) d\sigma = 2\pi \iint_D x d\sigma = 2\pi \int_0^4 dy \int_{\sqrt{y}}^{\frac{y}{4}+1} x dx = \frac{4}{3}\pi.$$

$$(4) V_{y=4} = 2\pi \iint_D r(x, y) d\sigma = 2\pi \iint_D (4 - y) d\sigma = 2\pi \int_0^4 dy \int_{\sqrt{y}}^{\frac{y}{4}+1} (4 - y) dx = \frac{64}{15}\pi.$$

【例 4】 设对数螺线 $r = e^\theta (0 \leq \theta \leq \pi)$ 及射线 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi$ 围成平面图形 D .

(1) 求 D 的面积 A ;

(2) 求 D 绕极轴旋转一周所得旋转体的体积 V .

④ (1) $S = \iint_D 1 d\sigma = \int_0^\pi d\theta \int_0^{e^\theta} r dr = \frac{1}{4}(e^{2\pi} - 1).$

$$(2) V = 2\pi \iint_D r(x, y) d\sigma = 2\pi \iint_D y d\sigma = 2\pi \int_0^\pi d\theta \int_0^{e^\theta} r \sin \theta dr$$

$$= \frac{2\pi}{3} \int_0^\pi e^{3\theta} \sin \theta d\theta = \frac{\pi}{15}(e^{3\pi} + 1).$$

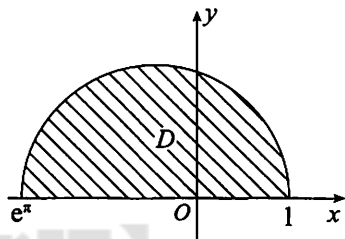


图 3-13

【例 5】 设星形线 $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$. 求:

(1) 它所围的面积;

(2) 它的周长;

(3) 它绕 x 轴旋转而成旋转体的体积和侧面积.

④ (1) 面积

$$A = 4 \int_0^a y dx = 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 a \sin^3 t (-3a \sin t \cdot \cos^2 t) dt$$

$$= 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 (\sin^4 t - \sin^6 t) dt = \frac{3\pi a^2}{8}.$$

$$(2) \text{弧长: } L = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a \sin t \cdot \cos t dt = 6a.$$

$$(3) \text{体积: } V_x = 2 \int_0^a \pi y^2 dx = 6\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t (1 - \sin^2 t) dt = \frac{32}{105} \pi a^3.$$

$$\text{旋转体侧面积: } S = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi y \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = 12\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos t dt = \frac{12}{5} \pi a^2.$$

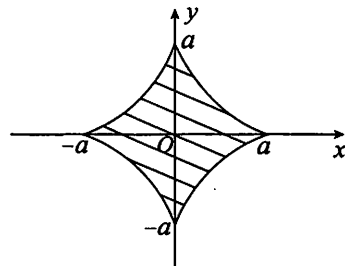


图 3-14



题型二 物理应用

【例 1】 某闸门的形状与大小如下图所示, 闸门的上部为矩形 $ABCD$, 其中 $DE = EC = 1\text{m}$, 下部由二次抛物线与线段 AB 所围成. 当水面与闸门的上端相平时, 欲使闸门矩形部分承受的水压力与闸门下部承受的水压力之比为 $5:4$, 闸门矩形部分的高 h 应为多少 m (米)?

【解】 由题设可知抛物线的方程为 $y = x^2$. 闸门矩形部分承受的水压力

$$P_1 = 2 \int_1^{h+1} \rho g (h+1-y) dy = 2\rho g \left[(h+1)y - \frac{y^2}{2} \right] \Big|_1^{h+1} = \rho g h^2,$$

其中 ρ 为水的密度, g 为重力加速度.

闸门下部承受的水压力

$$\begin{aligned} P_2 &= 2 \int_0^1 \rho g (h+1-y) \sqrt{y} dy = 2\rho g \left[\frac{2}{3}(h+1)y^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} \right] \Big|_0^1 \\ &= 4\rho g \left(\frac{1}{3}h + \frac{2}{15} \right). \end{aligned}$$

由题意知 $\frac{P_1}{P_2} = \frac{5}{4}$, 即 $\frac{h^2}{4\left(\frac{1}{3}h + \frac{2}{15}\right)} = \frac{5}{4}$. 解之得

$h = 2, h = -\frac{1}{3}$ (舍去), 故 $h = 2$, 即闸门矩形部分的高应为 2m .

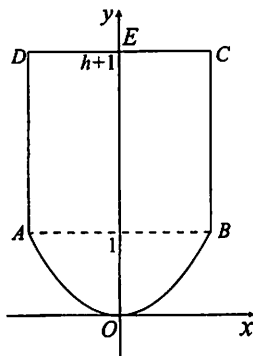


图 3-15

【例 2】 一容器的内侧是由曲线 $y = x^2$ 绕 y 轴旋转而成的曲面, 其容积为 $72\pi\text{m}^3$, 其中盛满水, 若将容器中的水从容器的顶部抽出 $64\pi\text{m}^3$, 至少需做多少功? (长度单位: m , 重力加速度为 $g\text{m/s}^2$, 水的密度为 10^3kg/m^3)

【解】 设容器深度为 h , 首先建立当容器中的水深为 h 时, 容器中水的体积 V 和其深度 h 之间的关系, 其体积微元为 $dv = \pi x^2 dy = \pi y dy$, 从而

$$V = \pi \int_0^h y dy = \frac{\pi}{2} h^2$$

当 $V = 72\pi$ 时, $72\pi = \frac{\pi}{2} h^2, h = 12$.

当 $V = 72\pi - 64\pi = 8\pi$ 时, $8\pi = \frac{\pi}{2} h^2, h = 4$.

功的微元为 $dW = 10^3 g (12-y) \pi y dy$, 从而

$$W = 10^3 \pi g \int_4^{12} y(12-y) dy = \frac{640 \times 10^3}{3} \pi g (\text{J})$$

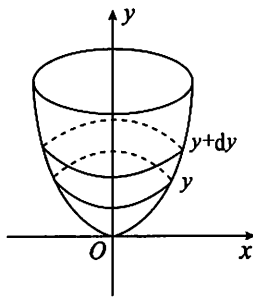


图 3-16

第五节 导数在经济学中的应用 (数学一、二不要求)

一、考试内容要点精讲

1. 经济学中常见的函数

1) 需求函数: $x = \varphi(p)$, 其中 x 为某产品的需求量, p 为价格.

需求函数的反函数 $p = \varphi^{-1}(x)$ 称为价格函数, 也常称为需求函数.

2) 供给函数: $x = \psi(p)$, 其中 x 为某产品的供给量, p 为价格.

3) 成本函数: 成本 $C = C(x)$ 是生产产品的总投入, 它由固定成本 C_1 (常量) 和可变成本 $C_2(x)$ 两部分组成, 其中 x 表示产量. 即

$$C = C(x) = C_1 + C_2(x)$$

称 $\frac{C}{x}$ 为平均成本, 记为 $\bar{C}$ 或 AC , 即

$$AC = \bar{C} = \frac{C}{x} = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2(x)}{x}$$

4) 收益(入)函数: 收益 $R = R(x)$ 是产品售出后所得的收入, 是销售量 x 与销售单价 p 之积. 即收益函数为

$$R = R(x) = px$$

5) 利润函数: 利润 $L = L(x)$ 是收益扣除成本后的余额, 由总收益减去总成本组成. 即利润函数为

$$L = L(x) = R(x) - C(x) \quad (x: \text{销售量})$$

2. 边际函数与边际分析

1) 边际函数的有关概念: 设 $y = f(x)$ 可导, 则在经济学中称 $f'(x)$ 为边际函数, $f'(x_0)$ 称为 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的边际值.

2) 经济学中常用的边际分析:

① 边际成本: 设成本函数为 $C = C(q)$ (q 是产量), 则边际成本函数 MC 为 $MC = C'(q)$;

② 边际收益: 设收益函数为 $R = R(q)$ (q 是产量), 则边际收益函数 MR 为 $MR = R'(q)$;

③ 边际利润: 设利润函数为 $L = L(q)$ (q 是销售量), 则边际利润函数 ML 为 $ML = L'(q)$.

3) 弹性函数与弹性分析

① 弹性函数的有关概念: 设 $y = f(x)$ 可导, 则称 $\frac{\Delta y/y}{\Delta x/x}$ 为函数 $f(x)$ 当 x 从 x 变到 $x + \Delta x$ 时的相对弹性, 称

$$\eta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y/y}{\Delta x/x} = f'(x) \frac{x}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)} x$$

为函数 $f(x)$ 的弹性函数, 记为 $\frac{Ey}{Ex}$, 即 $\eta = \frac{Ey}{Ex} = f'(x) \frac{x}{f(x)}$.

它在经济学上解释为函数 $f(x)$ 在 x 处的相对变化率.



② 经济学中常用的弹性分析:

a) 需求的价格弹性: 设需求函数 $Q = \varphi(p)$ (p 为价格), 则需求对价格的弹性为

$$\eta_d = \frac{p}{\varphi(p)} \varphi'(p)$$

由于 $\varphi(p)$ 是单调减少函数, 故 $\varphi'(p) < 0$, 从而 $\eta_d < 0$. 其经济学中的解释为: 当价格为 p 时, 若提价(或降价)1%, 则需求量将减少(或增加) $|\eta_d|$ %.

需要注意的是, 很多试题中规定需求对价格的弹性 $\eta_d > 0$, 此时应该有公式

$$\eta_d = -\frac{p}{\varphi(p)} \varphi'(p)$$

b) 供给的价格弹性: 设供给函数 $Q = \psi(p)$ (p 为价格), 则供给对价格的弹性为

$$\eta_s = \frac{p}{\psi(p)} \psi'(p)$$

由于供给函数 $\psi(p)$ 单调增加, 故 $\psi'(p) > 0$, 从而 $\eta_s > 0$. 其经济学中的解释为: 当价格为 p 时, 若提价(或降价)1%, 则供给量将增加(或减少) η_s %.

二、常考题型的方法与技巧

【例1】 设商品的需求函数为 $Q = 100 - 5p$, 其中 Q, p 分别表示需求量和价格, 如果商品需求弹性的绝对值大于1, 则商品价格的取值范围是_____.

【解】 分析先按定义写出弹性函数, 令 $|\eta| > 1$, 反求出 p 的范围.

由于 $Q' = -5$, 所以

$$\eta = \frac{Q'}{Q} p = \frac{-5p}{100 - 5p}$$

令 $|\eta| > 1$, 解得 $p > 10$. 又由 $Q \geq 0$, 即 $100 - 5p \geq 0$, 得 $p \leq 20$, 所以 p 的取值范围为 $(10, 20]$.

【注】 填 $(10, +\infty)$ 是错误的, 原因是 Q 是需求函数, 应有 $Q \geq 0$.

【例2】 一商家销售某种商品的价格满足关系 $p = 7 - 0.2x$ (万元/吨), x 为销售量(单位: 吨), 商品的成本函数是 $C = 3x + 1$ (万元).

(1) 若每销一吨商品, 政府要征税 t (万元), 求该商家获最大利润时的销售量;

(2) t 为何值时, 政府税收总额最大?

【解】 (1) 依题意, 商品销售总收入为 $R = px = (7 - 0.2x)x$, 总税收额为 $T = tx$, 利润函数为

$$\pi = R - C - T = -0.2x^2 + (4 - t)x - 1$$

$$\frac{d\pi}{dx} = -0.4x + 4 - t$$

令 $\frac{d\pi}{dx} = 0$, 得驻点 $x = \frac{5}{2}(4 - t)$. 又 $\frac{d^2\pi}{dx^2} = -0.4 < 0$, 故当 $x = \frac{5}{2}(4 - t)$ 时, 利润 π 为

最大值, 即使利润最大的销售量为 $\frac{5}{2}(4 - t)$.



(2) 将 $x = \frac{5}{2}(4-t)$ 代入 $T = tx$, 得

$$T = t \cdot \frac{5}{2}(4-t) = 10t - \frac{5}{2}t^2$$

令 $\frac{dT}{dt} = 0$, 得 $t = 2$. 又 $\frac{d^2T}{dt^2} = -5 < 0$, 故 $t = 2$ 是 T 的极大值点, 亦即最大值点. 所以,

当税率为 2 时, 政府税收总额最大.

【例 3】 设某商品的需求函数为 $Q = Q(p)$, 收益函数为 $R = pQ$, 其中 p 为商品价格, Q 为需求量(产品的产量), $Q(p)$ 是单调减函数. 如果当价格为 p_0 , 对应产量为 Q_0 时, 边际收益

$$\left. \frac{dR}{dQ} \right|_{Q=Q_0} = a > 0, \text{ 收益对价格的边际效应 } \left. \frac{dR}{dp} \right|_{p=p_0} = c < 0, \text{ 需求对价格的弹性为 } E_p = b > 1,$$

求 p_0 和 Q_0 .

解 依定义, 需求函数 $Q = Q(p)$ 对价格的弹性为 $E_p = -\frac{p dQ}{Q dp}$, 所以

$$\frac{dR}{dQ} = p + Q \frac{dp}{dQ} = p - p \left(-\frac{Q dp}{p dQ} \right) = p \left(1 - \frac{1}{E_p} \right)$$

由题设知

$$\left. \frac{dR}{dQ} \right|_{Q=Q_0} = p_0 \left(1 - \frac{1}{b} \right) = a$$

所以有 $p_0 = \frac{ab}{b-1}$.

$$\text{又 } \frac{dR}{dp} = Q + p \frac{dQ}{dp} = Q - Q \left(-\frac{p}{Q} \frac{dQ}{dp} \right) = Q(1 - E_p), \text{ 由题设知}$$

$$\left. \frac{dR}{dp} \right|_{p=p_0} = Q_0(1 - b) = c$$

所以有 $Q_0 = \frac{c}{1-b}$.

【例 4】 设某商品需求量 Q 是价格 p 的单调减少函数: $Q = Q(p)$, 其需求弹性 $\eta = \frac{2p^2}{192 - p^2} > 0$.

(1) 设 R 为总收益函数, 证明 $\frac{dR}{dp} = Q(1 - \eta)$;

(2) 求 $p = 6$ 时总收益对价格的弹性, 并说明其经济意义.

解 (1) 由于 $R = R(p) = pQ(p)$, 所以

$$\frac{dR}{dp} = Q + p \frac{dQ}{dp} = Q - Q \left(-\frac{p}{Q} \frac{dQ}{dp} \right) = Q(1 - \eta)$$

$$(2) \quad \frac{ER}{Ep} = \frac{p}{R} \frac{dR}{dp} = \frac{p}{pQ} Q(1 - \eta) = 1 - \eta = 1 - \frac{2p^2}{192 - p^2} = \frac{192 - 3p^2}{192 - p^2}$$

所以 $\left. \frac{ER}{Ep} \right|_{p=6} = \frac{7}{13} \approx 0.54$.

其经济意义是: 当价格为 6(单位) 时, 若价格上涨 1%, 则总收益将增加 0.54%.



【例 5】 设某商品的需求函数为 $Q = 100 - 5p$, 其中价格 $p \in (0, 20)$, Q 为需求量.

(1) 求需求量对价格的弹性 E_d ($E_d > 0$);

(2) 推导 $\frac{dR}{dp} = Q(1 - E_d)$ (其中 R 为收益), 并用弹性 E_d 说明价格在何范围内变化时, 降低价格反而使收益增加.

① 解 (1) $E_d = \left| \frac{p}{Q} Q' \right| = \frac{p}{20 - p}$.

(2) 由 $R = pQ$, 得

$$\frac{dR}{dp} = Q + p \frac{dQ}{dp} = Q(1 + \frac{p}{Q} Q') = Q(1 - E_d)$$

令 $\frac{dR}{dp} = 0$, 即有 $E_d = \frac{p}{20 - p} = 1$, 得 $p = 10$. 当 $10 < p < 20$ 时, $E_d > 1$, 于是 $\frac{dR}{dp} < 0$, 故当 $10 < p < 20$ 时, 降低价格反而使收益增加.

笔记:

微信公众账号【顶尖考研】
(ID: djky66)



微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

第四章 常微分方程

考试内容	考试要求		
	数一	数二	数三
微分方程及其阶、解、通解、初始条件和特解等概念	了解	了解	了解
变量可分离的微分方程及一阶线性微分方程的解法	掌握	掌握	掌握
齐次微分方程 自由项为多项式、指数函数、正弦函数、余弦函数以及它们的和与积的二阶常系数非齐次线性微分方程	会解	会解	会解(齐次微分方程,自由项为多项式、指数函数、正弦函数、余弦函数的二阶常系数非齐次线性微分方程)
伯努利方程和全微分方程 用简单的变量代换解某些微分方程 欧拉方程	会解		
降阶法解下列形式的微分方程 $y^{(n)} = f(x)$, $y'' = f(x, y')$ 和 $y'' = f(y, y')$	会用	会用	
线性微分方程解的性质及解的结构	理解	理解	理解
二阶常系数齐次线性微分方程的解法	掌握	掌握	掌握
某些高于二阶的常系数齐次线性微分方程	会解	会解	会解
差分与差分方程及其通解与特解等概念 一阶常系数线性差分方程的求解方法			了解
微分方程解决一些简单的应用问题	会用	会用	会用(微分方程解决一些简单的经济应用问题)



一、考试内容要点精讲

(一) 常微分方程的基本概念

1. 微分方程

含有未知函数的导数或微分的方程称为微分方程, 简称方程.

2. 微分方程的阶

微分方程中所出现的未知函数最高阶导数的阶数, 称为微分方程的阶.

3. 微分方程的解

满足微分方程的函数, 称为该方程的解.

4. 微分方程的通解

如果微分方程的解中含有任意常数, 且任意常数的个数与微分方程的阶数相同, 则称之为微分方程的通解.

5. 微分方程的特解

微分方程的不含任意常数的解, 称之为特解.

6. 初始条件

确定特解的一组常数称为初始条件.

7. 积分曲线

方程的一个解在平面上对应一条曲线, 称为该微分方程的积分曲线.

(二) 一阶微分方程

1. 可分离变量的方程

能表示为 $g(y)dy = f(x)dx$ 的方程, 称为可分离变量的方程.

求解的方法是两端积分

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$

2. 齐次方程

能化为 $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ 的微分方程称为齐次微分方程.

求解齐次微分方程的一般方法为: 令 $u = \frac{y}{x}$, 则 $y' = u + xu'$, 从而将原方程化为 $xu' = \varphi(u) - u$, 此方程为可分离变量的方程.

3. 线性方程

形如 $y' + p(x)y = Q(x)$ 的方程称为一阶线性微分方程.

求解一阶线性微分方程的一般方法为常数变易法, 或直接利用以下通解公式

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left[\int Q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right]$$

4. 伯努利方程 (仅数学一要求)

形如 $y' + p(x)y = Q(x)y^n$ 的方程 ($n \neq 0, 1$), 称为伯努利方程.

求解伯努利方程的一般方法为: 令 $u = y^{1-n}$, 将原方程化为一阶线性微分方程.



5. 全微分方程(仅数学一要求)

如果方程 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ 的左端是某个函数 $u(x, y)$ 的全微分:

$$du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

则称该方程为全微分方程

此方程的通解为 $u(x, y) = C$.

求 $u(x, y)$ 有以下三种方法

1) 偏积分; 2) 凑微分; 3) 线积分.

当 $P(x, y), Q(x, y)$ 在单连通域 G 内具有一阶连续偏导数时, 方程

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

是全微分方程的充要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

【注】 如果给定的一阶微分方程不属于上述五种标准形式, 首先考虑将 x, y 对调, 即认定 x 为 y 的函数, 再判定新方程的类型; 或者利用简单的变量代换将其化为上述五种类型之一而求解.

(三) 可降阶的高阶方程(数学三不要求)

1. $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程

2. $y'' = f(x, y')$ 型的方程

只需令 $y' = p, y'' = p'$, 可将原方程化为一阶微分方程.

3. $y'' = f(y, y')$ 型的方程

只需令 $y' = p, y'' = p \frac{dp}{dy}$, 可将原方程化为一阶微分方程.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

(四) 高阶线性微分方程

1. 线性微分方程的解的结构

这里只讨论二阶线性微分方程, 其结论可以推广到更高阶的方程. 二阶线性微分方程的一般形式为

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

这里的 $p(x), q(x), f(x)$ 均为连续函数. 当方程右端的 $f(x) \equiv 0$ 时, 称为二阶线性齐次方程. 否则称为二阶线性非齐次方程.

$$\text{齐次方程} \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (1)$$

$$\text{非齐次方程} \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (2)$$

定理 1 如果 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是齐次方程(1)的两个线性无关的特解, 那么

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

就是方程(1)的通解.

【注】 方程(1)的两个解线性无关的充要条件是它们之比不为常数.

定理 2 如果 y^* 是非齐次方程(2)的一个特解, $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是齐次方程(1)的两个线性无关的特解, 则

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y^*(x)$$



是非齐次微分方程(2)的通解.

定理 3 如果 $y_1^*(x), y_2^*(x)$ 是非齐次方程(2)的两个特解, 则 $y(x) = y_2^*(x) - y_1^*(x)$ 是齐次微分方程(1)的解.

定理 4 如果 $y_1^*(x), y_2^*(x)$ 分别是方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)$$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$$

的特解, 则 $y_1^*(x) + y_2^*(x)$ 是方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$$

的一个特解.

2. 常系数齐次线性微分方程

二阶常系数线性齐次微分方程的一般形式为

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (3)$$

其特征方程为 $r^2 + pr + q = 0$, 设 r_1, r_2 为该方程的两个根.

1) 若 $r_1 \neq r_2$ 为两个不相等的实特征根, 则方程(3)的通解为

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

2) 若 $r_1 = r_2$ 为二重实特征根, 则方程(3)的通解为

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$$

3) 若 $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta$ 为一对共轭复根, 则方程(3)的通解为

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

3. 常系数非齐次线性微分方程

二阶常系数线性非齐次微分方程的一般形式为

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (4)$$

1) 若 $f(x) = P_m(x)e^{kx}$, 其中 $P_m(x)$ 为 x 的 m 次多项式, 则方程(4)的特解可设为

$$y^* = x^k Q_m(x) e^{kx}$$

其中 $Q_m(x)$ 是与 $P_m(x)$ 同次的多项式, k 是特征方程含根 λ 的重复次数. 即当 λ 不是方程(3)的特征根时, $k = 0$; 当 λ 是方程(3)的单特征根时, $k = 1$; 当 λ 是方程(3)的重特征根时, $k = 2$.

2) 若 $f(x) = e^{\alpha x} [P_l(x) \cos \beta x + P_n(x) \sin \beta x]$, 其中 $P_l(x), P_n(x)$ 分别为 x 的 l 次, n 次多项式, 则方程(4)的特解可设为

$$y^* = x^k e^{\alpha x} [R_m^{(1)}(x) \cos \beta x + R_m^{(2)}(x) \sin \beta x]$$

其中 $R_m^{(1)}(x), R_m^{(2)}(x)$ 是两个 m 次多项式, $m = \max\{l, n\}$.

当 $\alpha + i\beta$ 不为方程(3)的特征根时, 取 $k = 0$;

当 $\alpha + i\beta$ 为方程(3)的单特征根时, 取 $k = 1$.

4. 欧拉方程 (仅数学一要求)

形如 $x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} x y' + p_n y = f(x)$ (其中 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 为常数) 的方程称为欧拉方程.

令 $x = e^t$ 或 $t = \ln x$, 可将上述欧拉方程化为线性常系数方程, 一般地有

$$x^k y^{(k)} = D(D-1)\cdots(D-k+1)y$$

其中 D 代表对 t 求导数的运算.



(五) 差分方程(仅数学三要求)

1) 一阶常系数线性齐次差分方程

$$y_{t+1} + ay_t = 0 \quad (1)$$

通解为 $y_t(t) = C \cdot (-a)^t$.

2) 一阶常系数线性非齐次差分方程

$$y_{t+1} + ay_t = f(t) \quad (2)$$

通解为 $y_t = y_c(t) + y_t^*$, 其中 y_t^* 是非齐次差分方程(2)的特解.

$$\textcircled{1} f(t) = P_m(t)$$

i) 若 $a \neq -1$, 令 $y_t^* = Q_m(t)$;

ii) 若 $a = -1$, 令 $y_t^* = tQ_m(t)$.

$$\textcircled{2} f(t) = d^t \cdot P_m(t), (d \neq 0)$$

i) 若 $a + d \neq 0$, 令 $y_t^* = d^t \cdot Q_m(t)$;

ii) 若 $a + d = 0$, 令 $y_t^* = td^t \cdot Q_m(t)$.

【例1】 差分方程 $2y_{t+1} + 10y_t - 5t = 0$ 的通解为_____.

解 原方程的一般形式为 $y_{t+1} + 5y_t = \frac{5}{2}t$, 其对应的齐次差分方程为

$$y_{t+1} + 5y_t = 0$$

其通解为 $y_c(t) = C(-5)^t$ (C 为任意常数).

因为 $f(t) = \frac{5}{2}t$ 是 t 的一次多项式, 且 $a = 5 \neq -1$, 故设原方程的特解为

$$y_t^* = At + B$$

代入原方程, 得

$$A(t+1) + B + 5(At + B) = \frac{5}{2}t$$

即

$$6At + A + 6B = \frac{5}{2}t$$

比较系数知 $A = \frac{5}{12}, B = -\frac{5}{72}$, 故 $y_t^* = \frac{5}{12}(t - \frac{1}{6})$, 从而原差分方程的通解为

$$y_t = y_c(t) + y_t^* = C(-5)^t + \frac{5}{12}(t - \frac{1}{6})$$

【例2】 差分方程 $y_{t+1} - y_t = t \cdot 2^t$ 的通解为_____.

解 原方程对应的齐次差分方程为

$$y_{t+1} - y_t = 0$$

其通解为 $y_c(t) = C(1)^t = C$ (C 为任意常数).

因为 $f(t) = t \cdot 2^t$, 且 $a + d = -1 + 2 = 1 \neq 0$, 故设原方程的特解为

$$y_t^* = 2^t(At + B)$$

代入原方程, 得

$$2^{t+1}[A(t+1) + B] - 2^t(At + B) = t2^t$$

即

$$At + 2A + B = t$$



比较系数知 $A = 1, B = -2$, 故 $y_i^* = 2'(t-2)$, 从而原差分方程的通解为

$$y_t = y_c(t) + y_i^* = C + 2'(t-2)$$

二、常考题型的方法与技巧

题型一 微分方程求解

【例 1】 求解下列一阶微分方程

(1) $y' + xy^2 - y^2 = 1 - x$.

(2) $xy' + y = 2\sqrt{x}\sqrt{y}$.

(3) $y' = \frac{1}{xy + y^3}$.

(4) $y' = \cos(x + y)$.

(5) 求方程 $y' \sec^2 y + \frac{x}{1+x^2} \tan y = x$ 满足条件 $y|_{x=0} = 0$ 的特解.

(6) $(x - \sin y)dy + \tan y dx = 0$.

解 (1) $y' = (1 + y^2)(1 - x)$

$$\frac{dy}{1 + y^2} = (1 - x)dx$$

$$\arctan y = x - \frac{1}{2}x^2 + C$$

(2) $y' + \frac{y}{x} = 2\sqrt{\frac{y}{x}}$, 令 $u = \frac{y}{x}, y = xu$, 则

$$u + x \frac{du}{dx} + u = 2\sqrt{u}$$

$$\frac{du}{2(\sqrt{u} - u)} = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{d\sqrt{u}}{1 - \sqrt{u}} = \frac{dx}{x}$$

$$x - \sqrt{xy} = C$$

(3) $\frac{dx}{dy} = xy + y^3$

$$\frac{dx}{dy} - yx = y^3$$

(线性)

$$x = e^{\int y dy} \left[\int y^3 e^{-\int y dy} dy + C \right] = e^{\frac{1}{2}y^2} \left[\int y^3 e^{-\frac{y^2}{2}} dy + C \right]$$

$$= e^{\frac{y^2}{2}} \left[\int (-y^2) de^{-\frac{y^2}{2}} + C \right] = C e^{\frac{1}{2}y^2} - y^2 - 2$$

(4) 令 $x + y = u$, 则

$$1 + y' = \frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} = 1 + \cos u$$

$$\tan \frac{u}{2} = x + C$$



$$\tan \frac{(x+y)}{2} = x + C$$

(5) 令 $\tan y = u$, 则

$$\frac{du}{dx} + \frac{x}{1+x^2}u = x \quad (\text{线性})$$

$$u = e^{-\int \frac{x}{1+x^2} dx} \left[\int x e^{\int \frac{x}{1+x^2} dx} dx + C \right] = \frac{1}{3}(1+x^2) + \frac{C}{\sqrt{1+x^2}}$$

由 $y|_{x=0} = 0$ 知, $C = -\frac{1}{3}$, 从而

$$\tan y = \frac{1}{3}(1+x^2 - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}})$$

(6)

$$x - \sin y + \tan y \frac{dx}{dy} = 0$$

$$\frac{dx}{dy} + x \cot y = \cos y$$

由线性方程通解公式得 $x = e^{-\int \cot y dy} \left[\int e^{\int \cot y dy} \cos y dy + C \right] = \frac{1}{\sin y} \left(\frac{1}{2} \sin^2 y + C \right)$.

【例 2】 求解下列各题(可降阶).

(1) 求方程 $(x+1)y'' + y' = \ln(x+1)$ 的通解;

(2) 求方程 $\begin{cases} 2yy'' = y'^2 + y^2, \\ y(0) = 1, y'(0) = -1 \end{cases}$ 的特解.

⑧ (1)(方法一) 可降阶方程 令 $y' = p$, 则 $y'' = p'$, 从而

$$(x+1)p' + p = \ln(1+x)$$

$$p' + \frac{1}{x+1}p = \frac{\ln(1+x)}{x+1} \quad (\text{线性})$$

$$y = (x+1+C_1)\ln(1+x) - 2x + C_2$$

(方法二)

$$[(x+1)y']' = \ln(1+x)$$

$$(x+1)y' = \int \ln(1+x) dx = \int \ln(1+x) d(x+1)$$

$$= (x+1)\ln(1+x) - x + C_1$$

$$y = (x+1+C_1)\ln(1+x) - 2x + C_2$$

(2) 令 $y' = p, y'' = \frac{dp}{dy}p$, 则

$$2yp \frac{dp}{dy} = p^2 + y^2$$

$$2 \frac{p}{y} \frac{dp}{dy} = \left(\frac{p}{y}\right)^2 + 1$$

令 $\frac{p}{y} = u, p = yu, \frac{dp}{dy} = u + y \frac{du}{dy}$, 则

$$2u(u + y \frac{du}{dy}) = u^2 + 1$$

$$2yu \frac{du}{dy} = 1 - u^2$$



显然 $u = 1, u = -1$ 均为原方程解(可代入上式验证), 但由 $y(0) = 1, y'(0) = -1$ 知,

$$u = -1, \text{ 即 } \frac{p}{y} = -1$$

从而 $y = Ce^{-x}$, 由 $y(0) = 1$ 知, $C = 1, y = e^{-x}$.

【例 3】 求解下列各题(高阶线性方程).

(1) 方程 $y'' - y = e^x + 1$ 的特解形式可设为

- (A) $ae^x + b$. (B) $axe^x + b$.
(C) $ae^x + bx$. (D) $axe^x + bx$.

(2) 方程 $y''' - y'' = 3x^2$ 的特解形式可设为

- (A) $ax^2 + bx + c$. (B) $x^2(ax^2 + b)$.
(C) $x^2(ax^2 + bx + c)$. (D) $x(ax^2 + bx + c)$.

(3) 方程 $y'' + y = x^2 + 1 + \sin x$ 的特解形式可设为

- (A) $ax^2 + bx + c + A\sin x$. (B) $ax^2 + bx + c + B\cos x$.
(C) $ax^2 + bx + c + A\sin x + B\cos x$. (D) $ax^2 + bx + c + x(A\sin x + B\cos x)$.

(4) 设线性无关的函数 y_1, y_2, y_3 都是方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的解, C_1, C_2 为任意常数, 则该非齐次方程通解是

- (A) $C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3$.
(B) $C_1y_1 + C_2y_2 - (C_1 + C_2)y_3$.
(C) $C_1y_1 + C_2y_2 + (1 - C_1 - C_2)y_3$.
(D) $C_1y_1 + C_2y_2 - (1 - C_1 - C_2)y_3$.

(5) 已知 $y_1 = xe^x + e^{2x}, y_2 = xe^x - e^{-x}, y_3 = xe^x + e^{2x} + e^{-x}$ 为某二阶线性常系数非齐次方程的特解, 求此方程.

(6) 若 $y = e^{2x} + (x+1)e^x$ 是方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的解, 求 a, b, c 及该方程通解.

(7) 已知 $y_1 = 3, y_2 = 3 + x^2, y_3 = 3 + e^x$ 是某二阶线性非齐次方程的三个特解, 求该微分方程及通解.

(8) 求方程 $y'' + a^2y = \sin x$ 的通解, 其中常数 $a > 0$.

解 (1) 选(B).

(2) 选(C).

(3) 选(D).

(4) 选(C).

$$C_1y_1 + C_2y_2 + (1 - C_1 - C_2)y_3 = C_1(y_1 - y_3) + C_2(y_2 - y_3) + y_3$$

其中 $y_1 - y_3$ 与 $y_2 - y_3$ 是齐次方程两个线性无关的特解, 故应选(C).

(5) $y_3 - y_1 = e^{-x}$ 为齐次的解.

$y_2 + e^{-x} = xe^x$ 为非齐次的解.

$y_1 - xe^x = e^{2x}$ 为齐次的解.

则齐次方程特征方程为 $(r+1)(r-2) = 0$, 即 $r^2 - r - 2 = 0$, 从而齐次方程为

$$y'' - y' - 2y = 0$$

设所求的二阶线性非齐次方程为

$$y'' - y' - 2y = f(x)$$

将 $y = xe^x$ 代入该方程得 $f(x) = e^x(1 - 2x)$.



故所求方程为 $y'' - y' - 2y = e^x(1 - 2x)$.

(6)(方法一) 将 $y = e^{2x} + (x+1)e^x$ 代入原方程比较系数,得

$$a = -3, b = 2, c = -1$$

(方法二) 由于 $y = e^{2x} + (1+x)e^x = e^{2x} + e^x + xe^x$ 为原方程的解,则 $y_1 = e^{2x}$ 必为齐次的解.(由方程非齐次项知非齐次解中只会出现 e^x 而不会出现 e^{2x}).

xe^x 与 e^x 中, $y_2 = e^x$ 为齐次的解(若 xe^x 是齐次解, $r = 1$ 为特征方程二重根,但 $r = 2$ 已是一个根).则齐次方程的特征方程为 $(r-1)(r-2) = 0$,即 $r^2 - 3r + 2 = 0$,齐次方程为 $y'' - 3y' + 2y = 0$,于是 $a = -3, b = 2$.

将 $y = xe^x$ 代入方程 $y'' - 3y' + 2y = ce^x$ 得 $c = -1$,则所求方程的通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + xe^x$$

(7) $y_2 - y_1 = x^2, y_3 - y_1 = e^x$ 为齐次方程的两个线性无关的特解,则所求方程通解为

$$y = C_1 x^2 + C_2 e^x + 3$$

① 式求导得 $y' = 2C_1 x + C_2 e^x$,

再求导得 $y'' = 2C_1 + C_2 e^x$,

③ 式 - ② 式得 $y'' - y' = 2C_1(1 - x)$,

① 式 - ② 式得 $y - y' = C_1(x^2 - 2x) + 3$,

联立 ⑤ 式和 ④ 式消去 C_1 得

$$(2x - x^2)y'' + (x^2 - 2)y' + 2(1 - x)y = 6(1 - x)$$

(8) 齐次方程特征方程为 $r^2 + a^2 = 0$,特征根为 $r = \pm ai$.

若 $a \neq 1$,则非齐次特定特解为 $y^* = A \cos x + B \sin x$,代入原方程得 $A = 0, B = \frac{1}{a^2 - 1}$,

则原方程通解为

$$y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax + \frac{1}{a^2 - 1} \sin x$$

若 $a = 1$,则非齐次方程待定特解为

$$y^* = x(A \cos x + B \sin x)$$

代入原方程得 $A = -\frac{1}{2}, B = 0$,则原方程通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x$$

题型二 综合题

【例 1】求连续函数 $f(x)$,使它满足 $x \int_0^1 f(tx) dt = f(x) + x$.

④ 令 $tx = u$,则 $\int_0^1 f(tx) dt = \frac{\int_0^x f(u) du}{x}$,从而

$$\int_0^x f(u) du = f(x) + x$$

$$f(x) = f'(x) + 1$$



$$f'(x) - f(x) = -1$$

$$f(x) = 1 + Ce^x$$

由题设可知 $f(0) = 0$, 则 $C = -1$. 故 $f(x) = 1 - e^x$.

【例 2】 设 $f(x) = \sin x - \int_0^x (x-t)f(t)dt$, 其中 $f(x)$ 为连续函数. 求 $f(x)$.

$$\textcircled{\text{解}} \quad f(x) = \sin x - x \int_0^x f(t)dt + \int_0^x tf(t)dt \quad \textcircled{1}$$

$$f'(x) = \cos x - \int_0^x f(t)dt \quad \textcircled{2}$$

$$f''(x) = -\sin x - f(x)$$

$$\text{即} \quad f''(x) + f(x) = -\sin x \quad \textcircled{3}$$

由 ① 式知 $f(0) = 0$, 由 ② 式知 $f'(0) = 1$.

非齐次方程 ③ 对应的齐次方程特征方程为

$$r^2 + 1 = 0, \quad r = \pm i$$

设方程 ③ 的待定特解为 $f = x(a\cos x + b\sin x)$, 代入 ③ 式得 $a = \frac{1}{2}, b = 0$. 则方程 ③ 的通解为

$$f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}x \cos x$$

由 $f(0) = 0$ 和 $f'(0) = 1$ 可得 $C_1 = 0, C_2 = \frac{1}{2}$, 则

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin x + \frac{x}{2} \cos x$$

【例 3】 设 $f(x)$ 可导, 且满足 $x = \int_0^x f(t)dt + \int_0^x tf(t-x)dt$, 求 $f(x)$.

④ 在积分 $\int_0^x tf(t-x)dt$ 中, 令 $t-x = u$, 则有

$$x = \int_0^x f(t)dt - \int_0^{-x} uf(u)du - x \int_0^{-x} f(u)du$$

等式两端对 x 求导, 整理得

$$f(x) = 1 + \int_0^{-x} f(u)du$$

两端再对 x 求导得

$$f'(x) = -f(-x) \quad \textcircled{1}$$

上式两端对 x 求导得

$$f''(x) = f'(-x) \quad \textcircled{2}$$

又由 ① 式得 $f'(-x) = -f(x)$, 代入 ② 式得

$$f''(x) + f(x) = 0$$

解之得 $f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

注意到 $f(0) = 1, f'(0) = -1$ 得 $f(x) = \cos x - \sin x$.

【例 4】 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, $f'(0) = 2$, 对任意的 x, y , 有 $f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x)$, 求 $f(x)$.



$$\begin{aligned}
 \textcircled{\text{解}} \quad f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^x f(\Delta x) + e^{\Delta x} f(x) - f(x)}{\Delta x} \\
 &= e^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} + f(x) \\
 &= e^x f'(0) + f(x) \quad (f(0) = 0) \\
 &= 2e^x + f(x),
 \end{aligned}$$

解得 $f(x) = 2xe^x$.

【例 5】 设函数 $y = y(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $y' \neq 0$, $x = x(y)$ 是 $y = y(x)$ 的反函数.

(1) 试将 $x = x(y)$ 所满足的微分方程 $\frac{d^2 x}{dy^2} + (y + \sin x) \left(\frac{dx}{dy}\right)^3 = 0$ 变换为 $y = y(x)$ 满足的微分方程;

(2) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0) = 0, y'(0) = \frac{3}{2}$ 的解.

$$\begin{aligned}
 \textcircled{\text{解}} \quad (1) \quad \frac{dx}{dy} &= \frac{1}{y'} \\
 \frac{d^2 x}{dy^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{y'} \right) \frac{dx}{dy} = -\frac{y''}{y'^2} \frac{1}{y'} = -\frac{y''}{y'^3}
 \end{aligned}$$

将以上两式代入原方程得 $y'' - y = \sin x$.

(2) 特征方程为 $r^2 - 1 = 0, r = \pm 1$, 非齐次待定特解为

$$y^* = A \cos x + B \sin x$$

代入 $y'' - y = \sin x$ 得, $A = 0, B = -\frac{1}{2}$. 则非齐次方程通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} \sin x$$

由 $y(0) = 0, y'(0) = \frac{3}{2}$ 可得 $C_1 = 1, C_2 = -1$, 则所求特解为

$$y = e^x - e^{-x} - \frac{1}{2} \sin x$$

【例 6】 设函数 $y(x)$ 满足方程 $y'' + 2y' + ky = 0$, 其中 $0 < k < 1$.

(1) 证明: 反常积分 $\int_0^{+\infty} y(x) dx$ 收敛;

(2) 若 $y(0) = 1, y'(0) = 1$, 求 $\int_0^{+\infty} y(x) dx$ 的值.

③ (1) 该方程的特征方程为 $r^2 + 2r + k = 0$, 解得

$$r_1 = -1 + \sqrt{1-k}, r_2 = -1 - \sqrt{1-k}$$

因为 $0 < k < 1$, 所以 $r_1 < 0, r_2 < 0$, 从而 $\int_0^{+\infty} e^{r_1 x} dx$ 与 $\int_0^{+\infty} e^{r_2 x} dx$ 收敛.

由于 $r_1 \neq r_2$, 所以 $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$, 其中 C_1 和 C_2 为任意常数.

由此可知, 反常积分 $\int_0^{+\infty} y(x) dx$ 收敛.



(2) 由(1)知, $r_1 < 0, r_2 < 0$, 所以

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}] = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} y'(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [C_1 r_1 e^{r_1 x} + r_2 C_2 e^{r_2 x}] = 0\end{aligned}$$

又 $y(0) = 1, y'(0) = 1$, 所以

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} y(x) dx &= \int_0^{+\infty} \left[-\frac{1}{k} (y''(x) + 2y'(x)) \right] dx \\ &= -\frac{1}{k} (y'(x) + 2y(x)) \Big|_0^{+\infty} = \frac{3}{k}\end{aligned}$$

【注】 类似的: 若函数 $f(x)$ 满足 $f''(x) + af'(x) + f(x) = 0 (a > 0)$, 且 $f(0) = m$, $f'(0) = n$, 则 $\int_0^{+\infty} f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$. $[am + n]$

题型三 应用题

【例 1】 设连续曲线 $y = f(x)$ 为连接 $A(1, 0)$ 与 $B(0, 1)$ 的弧段且位于弦 AB 的上方(如图 4-1), $P(x, y)$ 为其上任意一点, 弦 BP 与该曲线围成的面积为 x^3 , 试求该曲线方程.

【解】 由题设可知 $x^3 = \int_0^x f(t) dt - \frac{x}{2} [1 + f(x)]$,

等式两端对 x 求导得 $f'(x) - \frac{1}{x} f(x) = -6x - \frac{1}{x}$,

由一阶线性微分方程通解公式得

$$f(x) = Cx - 6x^2 + 1$$

由题设可知 $f(1) = 0$, 则 $C = 5, f(x) = 5x - 6x^2 + 1$.

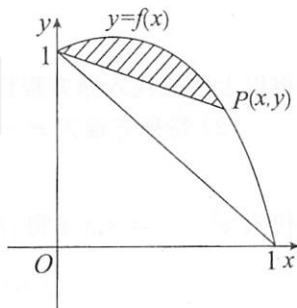


图 4-1

【例 2】 设对任意 $x > 0$, 曲线 $y = f(x)$ 上点 $(x, f(x))$ 处的切线在 y 轴上的截距等于 $\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$, 求 $f(x)$.

【解】 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x, f(x))$ 处的切线方程为

$$Y - f(x) = f'(x)(X - x)$$

令 $X = 0$ 得 $Y = f(x) - xf'(x)$, 于是

$$f(x) - xf'(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$$

即

$$xf(x) - x^2 f'(x) = \int_0^x f(t) dt$$

$$f(x) + xf'(x) - 2xf'(x) - x^2 f''(x) = f(x)$$

$$xf''(x) + f'(x) = 0$$

$$(xf'(x))' = 0, xf'(x) = C_1, f'(x) = \frac{C_1}{x}$$



$$f(x) = C_1 \ln x + C_2$$

【例 3】 设 $y(x) (x \geq 0)$ 二阶可导, 且 $y'(x) > 0, y(0) = 1$. 过 $y = y(x)$ 上任意点 $P(x, y)$ 作该曲线的切线及 x 轴的垂线, 上述两直线与 x 轴所围三角形面积记为 S_1 , 区间 $[0, x]$ 上以 $y = y(x)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 S_2 , 且 $2S_1 - S_2 = 1$, 求 $y(x)$.

④ 设切线方程为 $Y - y = y'(X - x)$, 则它与 x 轴交点为 $(x - \frac{y}{y'}, 0)$, 从而

$$S_1 = \frac{1}{2}y \left[x - (x - \frac{y}{y'}) \right] = \frac{y^2}{2y'}, S_2 = \int_0^x y(t) dt$$

$$\text{由 } 2S_1 - S_2 = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{y'} - \int_0^x y(t) dt = 1 \Rightarrow yy'' = (y')^2.$$

令 $p = y'$, 得 $yp \frac{dp}{dy} = p^2$, 于是 $\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$, 得 $p = C_1 y$, 即 $\frac{dy}{dx} = C_1 y$, 故 $y = e^{C_1 x + C_2}$.

由 $y(0) = 1$, 并注意到 $y'(0) = 1$, 得 $C_1 = 1, C_2 = 0$, 故 $y = e^x$ 为所求曲线方程.

解方程 $yy'' = (y')^2$ 还有一种灵活的方法, 由此方程可知

$$\frac{yy'' - (y')^2}{y^2} = 0$$

即

$$\left(\frac{y'}{y}\right)' = 0$$

则

$$\frac{y'}{y} = C_1$$

由 $y(0) = 1, y'(0) = 1$ 可得, $C_1 = 1$. 从而有 $\frac{y'}{y} = 1$, 由此得

$$y = C_2 e^x$$

由 $y(0) = 1$ 可得, $C_2 = 1$, 则 $y = e^x$.

【例 4】 (数学三不要求) 已知高温物体置于低温介质中, 任一时刻该物体温度对时间的变化率与该时刻物体和介质的温差成正比, 现将一初始温度为 120°C 的物体在 20°C 的恒温介质中冷却, 30min 后该物体降至 30°C , 若要将该物体的温度继续降至 21°C , 还需冷却多长时间?

④ 设该物体在 t 时刻温度为 $T(t) (^\circ\text{C})$, 由题意得

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 20)$$

其中 k 为比例系数, $k > 0$. 解得 $T = Ce^{-kt} + 20$.

将初始条件 $T(0) = 120$ 代入上式, 解得 $C = 100$. 故 $T = 100e^{-kt} + 20$.

将 $t = 30, T = 30$ 代入上式得 $k = \frac{\ln 10}{30}$, 所以 $T = 100e^{-\frac{\ln 10}{30}t} + 20$.

令 $T = 21$, 得 $t = 60$. 因此要降到 21°C , 还需 $60 - 30 = 30(\text{min})$.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



第五章 多元函数微分学

考试内容	考试要求		
	数一	数二	数三
二元函数的极限与连续的概念 二元函数极值存在的充分条件	了解	了解	了解
多元函数极值存在的必要条件	掌握	掌握	掌握
多元复合函数一阶、二阶偏导数 全微分多元隐函数的偏导数 二元函数的极值 简单多元函数的最大值和最小值,并会解决简单的应用问题	会求	会求	会求
拉格朗日乘数法求条件极值	会用	会用	会用
有界闭区域上二元连续函数的性质	了解(有界闭区域上连续函数的性质)	了解	了解
多元函数的概念 二元函数的几何意义 多元函数偏导数和全微分的概念 多元函数极值和条件极值的概念	理解	了解	了解
全微分存在的必要条件和充分条件 全微分形式的不变性	了解		
隐函数存在定理	了解	了解	了解
二元函数的二阶泰勒公式	了解		



第一节 重极限、连续、偏导数、全微分 (概念、理论)

一、考试内容要点精讲

(一) 重极限

定义 设函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上有定义, 点 $P_0(x_0, y_0) \in D$ 为 D 的聚点, 如果 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $P(x, y) \in D$, 且 $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$ 时, 都有

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon$$

成立, 则称常数 A 为函数 $f(x, y)$ 当 $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ 时的极限, 记为

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)}} f(x,y) = A \text{ 或 } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x,y) = A \text{ 或 } \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A$$

【注】(1) 这里的极限是要求点 (x, y) 在 D 内以任意方式趋近于点 (x_0, y_0) 时, 函数 $f(x, y)$ 都趋近于同一确定的常数 A , 否则该极限就不存在.

(2) 一元函数极限中的下述性质对多元函数仍成立

- ① 局部有界性; ② 保号性;
- ③ 有理运算; ④ 极限与无穷小的关系;
- ⑤ 夹逼性.

【例 1】求下列极限.

$$(1) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, \quad (2) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|}, \quad (3) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy^2 \sin(xy)}{x^2 + y^4}.$$

解 (1) 由于 $0 \leq \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq |y|$, 而 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} |y| = 0$, 由夹逼原理知 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$.

(2) 由于 $0 \leq \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|} = \frac{x^2}{|x| + |y|} + \frac{y^2}{|x| + |y|} \leq \frac{x^2}{|x|} + \frac{y^2}{|y|} = |x| + |y|$,

而 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (|x| + |y|) = 0$, 由夹逼原理知 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|} = 0$.

(3) (方法一) 由于 $0 \leq \left| \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \right| \leq \frac{1}{2}$, 即为有界量, 而 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin xy = 0$, 即为无穷小量,

则原式 $= 0$.

(方法二) 由于 $0 \leq \left| \frac{xy^2 \sin xy}{x^2 + y^4} \right| \leq \frac{1}{2} |\sin xy|$, 而 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1}{2} |\sin xy| = 0$, 由夹逼原理知

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy^2 \sin xy}{x^2 + y^4} = 0$$

(方法三) 由于 $0 \leq \left| \frac{xy^2 \sin xy}{x^2 + y^4} \right| = \left| \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \right| |\sin xy| \leq \left| \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \right| |xy| \leq |y^3|$



由夹逼原理知 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy^2 \sin xy}{x^2 + y^4} = 0$.

【注】 求重极限常用方法

1. 利用极限性质(四则运算法则, 夹逼原理);
2. 消去分母中极限为零的因子(有理化, 等价无穷小代换);
3. 利用无穷小量与有界变量之积为无穷小量.

【例 2】 证明下列重极限不存在

$$(1) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2};$$

$$(2) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}.$$

①② (1) 取直线 $y = kx$, 让点 (x, y) 沿直线 $y = kx$ 趋于 $(0, 0)$ 点, 此时有

$$\lim_{\substack{y=kx \\ x \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^2}{x^2 + k^2 x^2} = \frac{k}{1 + k^2}$$

则重极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ 不存在.

【注】 本题中的方法是证明重极限不存在的常用方法.

(2) 取直线 $y = kx$, 则

$$\lim_{\substack{y=kx \\ x \rightarrow 0}} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k^2 x^3}{x^2 + k^4 x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k^2 x}{1 + k^4 x^2} = 0$$

这说明沿任何一条过原点的直线 $y = kx$ (不包括 y 轴) 趋于 $(0, 0)$ 点时, 极限存在且都为零, 并且若沿 y 轴趋于 $(0, 0)$ 点极限也为零, 事实上

$$\lim_{\substack{x=0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = 0$$

这能否说明重极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$ 存在且为零呢? 不能! 事实上若沿过原点的抛物线 $x = y^2$ 趋于 $(0, 0)$ 点时, 就有

$$\lim_{\substack{x=y^2 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^4}{y^4 + y^4} = \frac{1}{2}$$

故极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$ 不存在.

【注】 证明重极限不存在常用方法: 沿两种不同路径极限不同(通常可取过点 (x_0, y_0) 的直线).

(二) 连续

定义 若 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$, 则称 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续.



性质

- (1) 连续函数的和、差、积、商(分母不为零)及复合仍连续;
 (2) 基本初等函数在其定义域内连续;初等函数在其定义域内连续;
 (3) 有界闭区域上连续函数的性质

- ① 有界性:若 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续,则 $f(x, y)$ 在 D 上有界.
 ② 最值性:若 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续,则 $f(x, y)$ 在 D 上必有最大值和最小值.
 ③ 介值性:若 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续,则 $f(x, y)$ 在 D 上可取到介于最小值与最大值之间的任何值.

【例 3】判断函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ a, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 的连续性.

解 因为 $0 \leq \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq |y|$, 则

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

若 $a = 0$, 则 $f(x, y)$ 处处连续;若 $a \neq 0$, 则 $f(x, y)$ 除点 $(0, 0)$ 外处处连续.

(三) 偏导数

1. 定义

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \frac{d}{dx} f(x, y_0) \Big|_{x=x_0}$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \frac{d}{dy} f(x_0, y) \Big|_{y=y_0}$$

【注】 $f'_x(x_0, y_0)$ 就是一元函数 $f(x, y_0)$ 在 x_0 处的导数; $f'_y(x_0, y_0)$ 就是一元函数 $f(x_0, y)$ 在 y_0 处的导数.

【例 4】设 $f(x, y) = x + 2y + (y - 1)\arcsin \frac{x}{1 + xy}$, 求 $f'_x(0, 1)$ 和 $f'_y(0, 1)$.

解 $f'_x(0, 1) = \frac{d}{dx} f(x, 1) \Big|_{x=0} = \frac{d}{dx} (x + 2) \Big|_{x=0} = 1,$

$$f'_y(0, 1) = \frac{d}{dy} f(0, y) \Big|_{y=1} = \frac{d}{dy} (2y) \Big|_{y=1} = 2.$$

2. 几何意义

$f'_x(x_0, y_0)$ 表示曲线 $z = f(x, y_0)$ 在点 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 处的切线对 x 轴的斜率;

$f'_y(x_0, y_0)$ 表示曲线 $z = f(x_0, y)$ 在点 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 处的切线对 y 轴的斜率.

3. 高阶偏导数

设 $z = f(x, y)$, 则

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right).$$



定理 如果函数 $z = f(x, y)$ 的两个二阶混合偏导数 $f''_{xy}(x, y)$ 及 $f''_{yx}(x, y)$ 在区域 D 内连续, 则在区域 D 内恒有

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$$

(四) 全微分

1. 定义

若 $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$, 则称函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 可微, $A\Delta x + B\Delta y$ 称为函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的全微分, 记为

$$dz = A\Delta x + B\Delta y$$

【注】以下四条等价

$$(1) \Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho);$$

$$(2) \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{[f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] - [A\Delta x + B\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0;$$

$$(3) \Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + o(\rho);$$

$$(4) \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{[f(x, y) - f(x_0, y_0)] - [A(x - x_0) + B(y - y_0)]}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0.$$

它们是函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微的等价形式, 由它们都可得到 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微, 且 $f'_x(x_0, y_0) = A, f'_y(x_0, y_0) = B$.

2. 可微性判定

(1) 必要条件: $f'_x(x_0, y_0)$ 与 $f'_y(x_0, y_0)$ 都存在;

(2) 充分条件: $f'_x(x, y)$ 和 $f'_y(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 连续;

(3) 用定义判定:

① $f'_x(x_0, y_0)$ 与 $f'_y(x_0, y_0)$ 是否都存在?

② $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{[f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] - [f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$ 是否为零?

3. 计算

若 $f(x, y)$ 可微, 则 $dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$.

(五) 连续、可导、可微的关系

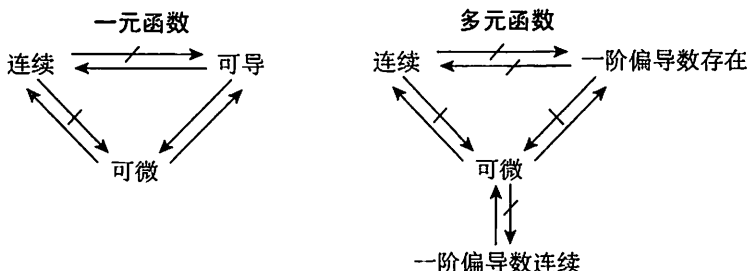


图 5-1

笔记:

微信公众号:顶尖考研
(ID: djky66)

二、常考题型的方法与技巧

题型一 讨论连续性、可导性、可微性

【例 1】 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, 则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点

- (A) 不连续. (B) 连续但偏导数不存在.
(C) 偏导数存在但不可微. (D) 可微.

【解】 由于 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0 = f(0, 0)$, 则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 连续, 故 (A) 不正确.

由偏导数定义知

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta y} = 0$$

但

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{[f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0)] - [f'_x(0, 0)\Delta x + f'_y(0, 0)\Delta y]}{\rho} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta y(\Delta x)^2}{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]^{\frac{3}{2}}} = 0$$

不存在, 因为 $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0^+ \\ \Delta y = k\Delta x}} \frac{\Delta y(\Delta x)^2}{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]^{\frac{3}{2}}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{k(\Delta x)^3}{[(\Delta x)^2 + k^2(\Delta x)^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{k}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}}$ 与 k 有关,

故 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点不可微, 应选 (C).

【例 2】 考虑二元函数下面四条性质

- ① $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续. ② $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处两个偏导数连续.
③ $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微. ④ $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处两个偏导数都存在.

则



(A) ③ $\Rightarrow$ ① $\Rightarrow$ ④.

(B) ③ $\Rightarrow$ ② $\Rightarrow$ ①.

(C) ③ $\Rightarrow$ ④ $\Rightarrow$ ①.

(D) ② $\Rightarrow$ ③ $\Rightarrow$ ①.

解 选(D).

【例 3】 二元函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微的一个充分条件是

(A) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} [f(x, y) - f(0, 0)] = 0.$

(B) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0$, 且 $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0.$

(C) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$

(D) $\lim_{x \rightarrow 0} [f'_x(x, 0) - f'_x(0, 0)] = 0$, 且 $\lim_{y \rightarrow 0} [f'_y(0, y) - f'_y(0, 0)] = 0.$

解 (方法一) 排除法

因为连续和偏导数存在都不是可微的充分条件, 则(A)(B) 都不正确; (D) 也不正确, 例

如函数 $f(x, y) = \begin{cases} 0, & xy \neq 0 \\ 1, & xy = 0 \end{cases}$, $f(x, 0) = 1, f(0, y) = 1$, 则 $f'_x(x, 0) = 0, f'_y(0, y) = 0$, 从而

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f'_x(x, 0) - f'_x(0, 0)] = 0, \lim_{y \rightarrow 0} [f'_y(0, y) - f'_y(0, 0)] = 0$$

但 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点不可微, 因为 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点不连续. 故应选(C).

(方法二) 直接法

由 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$ 知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{|x|} = 0$$

则 $f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{|x|} \cdot \frac{|x|}{x} = 0$. 同理 $f'_y(0, 0) = 0$.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - [f'_x(0, 0)x + f'_y(0, 0)y]}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点处可微, 故应选(C).

(方法三) 直接法

由 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$ 知

$$\Delta z = f(x, y) - f(0, 0) = o(\rho)$$

即

$$\Delta z = f(x, y) - f(0, 0) = Ax + By + o(\rho),$$

这里 $A = B = 0$, 由微分的定义知 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点可微.

【注】 本题(D) 选项中的 $\lim_{x \rightarrow 0} [f'_x(x, 0) - f'_x(0, 0)] = 0$, 即 $\lim_{x \rightarrow 0} f'_x(x, 0) = f'_x(0, 0)$.

由此不能得出一阶偏导数 $f'_x(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点连续, 即得不出 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f'_x(x, y) = f'_x(0, 0)$.

【例 4】 如果函数 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处连续, 那么下列命题正确的是

- (A) 若极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|}$ 存在, 则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微.
 (B) 若极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 存在, 则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微.
 (C) 若 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微, 则极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|}$ 存在.
 (D) 若 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微, 则极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 存在.

解 (方法一) 直接法

由极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 存在及函数 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处连续得 $f(0, 0) = 0$, 且

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2} = 0$$

即

$$\Delta z = f(x, y) - f(0, 0) = o(\rho)$$

则由微分定义知 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微, 故应选 (B).

(方法二) 排除法

令 $f(x, y) = |x| + |y|$, 显然 $f'_x(0, 0)$ 及 $f'_y(0, 0)$ 都不存在, 则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处不可微, (A) 不正确.

令 $f(x, y) = 1$, 显然 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微, 但 (C) 和 (D) 选项中的极限都不存在, 则 (C) 和 (D) 都不正确, 故应选 (B).

【例 5】 设连续函数 $z = f(x, y)$ 满足 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{f(x, y) - 2x + y - 2}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} = 0$, 则 $dz|_{(0,1)} =$

解 由 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{f(x, y) - 2x + y - 2}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} = 0$ 得 $f(0, 1) = 1$, 且

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{[f(x, y) - f(0, 1)] - [2x - (y-1)]}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} = 0$$

即

$$\Delta z = f(x, y) - f(0, 1) = 2x - (y-1) + o(\rho)$$

则 $dz|_{(0,1)} = 2dx - dy$.

笔记:



【例 6】 设 $f(x, y) = |x - y| \varphi(x, y)$, 其中 $\varphi(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的邻域内连续, 问

(1) $\varphi(x, y)$ 应满足什么条件才能使 $f'_x(0, 0)$ 和 $f'_y(0, 0)$ 都存在?

(2) 在上述条件下 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点是否可微?

解 (1) 由于

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x| \varphi(\Delta x, 0)}{\Delta x} = \begin{cases} \varphi(0, 0), & \text{当 } \Delta x \rightarrow 0^+ \\ -\varphi(0, 0), & \text{当 } \Delta x \rightarrow 0^- \end{cases}$$

由此可知, 当 $\varphi(0, 0) = 0$ 时, $f'_x(0, 0)$ 和 $f'_y(0, 0)$ 都存在, 且为零.

(2) 当 $\varphi(0, 0) = 0$ 时,

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{[f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0)] - [f'_x(0, 0)\Delta x + f'_y(0, 0)\Delta y]}{\rho} \\ = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{|\Delta x - \Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \varphi(\Delta x, \Delta y) = 0. \end{aligned}$$

这是由于 $\frac{|\Delta x - \Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \leq \frac{|\Delta x|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} + \frac{|\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \leq 2$, 即为有界变量, 而 $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \varphi(\Delta x, \Delta y) = \varphi(0, 0) = 0$ 为无穷小量.

故 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点处可微.

【例 7】 设 $f'_x(x_0, y_0)$ 存在, $f'_y(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续, 证明 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微.

分析 由微分定义知, 只要证明

$$\Delta z = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + o(\rho)$$

证明 $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$

$$= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) + f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),$$

由拉格朗日中值定理得

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) = f'_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta y$$

由 $f'_x(x_0, y_0)$ 存在可知

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + \alpha_2\Delta x$$

则

$$\Delta z = f'_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta y + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + \alpha_2\Delta x$$

又由 $f'_y(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续可知

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f'_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \theta\Delta y) = f'_y(x_0, y_0)$$

即有

$$f'_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \theta\Delta y) = f'_y(x_0, y_0) + \alpha_1$$

从而有

$$\Delta z = f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha_1\Delta y + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + \alpha_2\Delta x$$

$$\text{又 } \left| \frac{\alpha_1\Delta y + \alpha_2\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \right| \leq \frac{|\alpha_1||\Delta y| + |\alpha_2||\Delta x|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \leq |\alpha_1| + |\alpha_2| \rightarrow 0$$



即 $\alpha_1 \Delta y + \alpha_2 \Delta x = o(\rho)$, 故 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微.

第二节 偏导数与全微分的计算

一、考试内容要点精讲

1. 复合函数求导法

设 $u = u(x, y), v = v(x, y)$ 可导, $z = f(u, v)$ 在相应点有连续一阶偏导数, 则

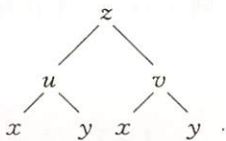
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$$

2. 全微分形式不变性

设 $z = f(u, v), u = u(x, y), v = v(x, y)$ 都有连续一阶偏导数. 则

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy, dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv$$



3. 隐函数求导法

1) 由一个方程所确定的隐函数

设 $F(x, y, z)$ 有连续一阶偏导数, $F'_z \neq 0, z = z(x, y)$ 由 $F(x, y, z) = 0$ 所确定.

方法:

(1) 公式: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z};$

(2) 等式两边求导 $F'_x + F'_z \frac{\partial z}{\partial x} = 0, F'_y + F'_z \frac{\partial z}{\partial y} = 0;$

(3) 利用微分形式不变性: $F'_x dx + F'_y dy + F'_z dz = 0.$

2) 由方程组所确定的隐函数(仅数学一要求)

设 $u = u(x, y), v = v(x, y)$ 由 $\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$ 所确定.

方法:

(1) 等式两边求导 $\begin{cases} F'_x + F'_u \frac{\partial u}{\partial x} + F'_v \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ G'_x + G'_u \frac{\partial u}{\partial x} + G'_v \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases};$

(2) 利用微分形式不变性 $\begin{cases} F'_x dx + F'_y dy + F'_u du + F'_v dv = 0 \\ G'_x dx + G'_y dy + G'_u du + G'_v dv = 0 \end{cases}.$



二、常考题型的方法与技巧

题型一 求一点处的偏导数与全微分

【例 1】 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{|x|}}{x^2 + y^2} \sin(x^2 + y^2), & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

求 $f'_x(0, 0)$ 和 $f'_y(0, 0)$.

【解】 由于 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{|\Delta x|}}{(\Delta x)^2} \sin(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|\Delta x|}}{\Delta x} = \infty$,

则 $f'_x(0, 0)$ 不存在. 而

$$f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta y} = 0$$

【注】 求分段函数在分界点处的偏导数一般都是用定义.

【例 2】 设 $f(x, y) = \frac{2x + 3y}{1 + xy \sqrt{x^2 + y^2}}$, 求 $f'_x(0, 0)$ 和 $f'_y(0, 0)$.

【解】 $f'_x(0, 0) = \left. \frac{d}{dx} f(x, 0) \right|_{x=0} = \left. \frac{d}{dx} (2x) \right|_{x=0} = 2$
 $f'_y(0, 0) = \left. \frac{d}{dy} f(0, y) \right|_{y=0} = \left. \frac{d}{dy} (3y) \right|_{y=0} = 3$

【注】 求具体点处的偏导数可用先代后求的方法往往比较简单.

【例 3】 设 $z = \ln(1 + xy^2)$, 则 $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{(0,1)} =$ _____.

【解】 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^2}{1 + xy^2}$, $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{(0,1)} = \left. \frac{d}{dy} \left(\frac{\partial z(0, y)}{\partial x} \right) \right|_{y=1} = \left. \frac{d}{dy} (y^2) \right|_{y=1} = 2$.

【注】 求具体点处的高阶偏导数也可用先代后求的方法.

【例 4】 设 $f(x, y, z) = \sqrt{\frac{x}{y}}$, 则 $df(1, 1, 1) =$ _____.

【解】 $f'_x(1, 1, 1) = \left. \frac{d}{dx} f(x, 1, 1) \right|_{x=1} = \left. \frac{d}{dx} (x) \right|_{x=1} = 1$
 $f'_y(1, 1, 1) = \left. \frac{d}{dy} f(1, y, 1) \right|_{y=1} = \left. \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{y} \right) \right|_{y=1} = -\left. \frac{1}{y^2} \right|_{y=1} = -1$
 $f'_z(1, 1, 1) = \left. \frac{d}{dz} f(1, 1, z) \right|_{z=1} = \left. \frac{d}{dz} (1) \right|_{z=1} = 0$

故 $df(1, 1, 1) = dx - dy$.

题型二 求已给出具体表达式函数的偏导数与全微分

【例 1】 设 $z = (x^2 + y^2)e^{-\arctan \frac{y}{x}}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ 及 dz .

解
$$\frac{\partial z}{\partial x} = (2x + y)e^{-\arctan \frac{y}{x}}, \frac{\partial z}{\partial y} = (2y - x)e^{-\arctan \frac{y}{x}}$$
$$dz = (2x + y)e^{-\arctan \frac{y}{x}} dx + (2y - x)e^{-\arctan \frac{y}{x}} dy$$

【例 2】 设 $z = (1 + x^2 + y^2)^{xy}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 (方法一) 由原题设可知 $z = e^{xy \ln(1+x^2+y^2)}$, 两端对 x, y 分别求偏导.

(方法二) 由原题设知 $\ln z = xy \ln(1 + x^2 + y^2)$, 两端对 x, y 分别求偏导.

(方法三) 令 $u = 1 + x^2 + y^2, v = xy$, 则函数可看作 $z = u^v$, 由复合函数求导法可知

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = vu^{v-1} 2x + u^v \ln u \cdot y \\ &= (1 + x^2 + y^2)^{xy} \left[\frac{2x^2 y}{1 + x^2 + y^2} + y \ln(1 + x^2 + y^2) \right] \end{aligned}$$

同理可得 $\frac{\partial z}{\partial y} = (1 + x^2 + y^2)^{xy} \left[x \ln(1 + x^2 + y^2) + \frac{2xy^2}{1 + x^2 + y^2} \right]$.

【注】 方法三也可用于一元幂指函数, 如 $y = (1 + x^2)^{\sin x}$, 可令 $u = 1 + x^2, v = \sin x$.

【例 3】 若函数 $z = f(x, y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$, 且 $f(x, 1) = x + 2$, 又 $f'_y(x, 1) = x + 1$, 则

$f(x, y)$ 等于

(A) $y^2 + (x - 1)y - 2$.

(B) $y^2 + (x + 1)y + 2$.

(C) $y^2 + (x - 1)y + 2$.

(D) $y^2 + (x + 1)y - 2$.

解 (方法一) 容易验证, 只有 (C) 选项中的函数同时满足题设中的三个条件, 故应选 (C).

(方法二) 由 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$ 知 $\frac{\partial z}{\partial y} = \int 2 dy = 2y + \varphi(x)$. 由题设条件 $f'_y(x, 1) = 1 + x$ 知,

$$1 + x = 2 + \varphi(x) \Rightarrow \varphi(x) = x - 1 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = 2y + x - 1$$

于是 $z = \int (2y + x - 1) dy = y^2 + y(x - 1) + \psi(x)$.

由 $f(x, 1) = x + 2$ 知 $x + 2 = 1 + (x - 1) + \psi(x)$, 从而 $\psi(x) = 2$.

则 $z = y^2 + y(x - 1) + 2$. 故应选 (C).

【注】 方法一只适用于选择题, 方法二是一般方法.

【例 4】 已知 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$, 且当 $x = 0$ 时, $z = \sin y$; 当 $y = 0$ 时, $z = \sin x$, 则 $z(x, y) =$ _____.



解 (方法一) 由 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$ 知 $\frac{\partial z}{\partial x} = \int 1 dy = y + \varphi(x)$. 于是

$$z = \int [y + \varphi(x)] dx = xy + \int \varphi(x) dx + \psi(y) = xy + g(x) + \psi(y)$$

其中 $g(x) = \int \varphi(x) dx$.

由 $x = 0$ 时, $z = \sin y$ 知

$$\sin y = g(0) + \psi(y)$$

①

由 $y = 0$ 时, $z = \sin x$ 知

$$\sin x = g(x) + \psi(0)$$

从而有 $z = xy + \sin x + \sin y - g(0) - \psi(0)$.

在 ① 式中令 $y = 0$ 得 $g(0) + \psi(0) = 0$, 故 $z(x, y) = xy + \sin x + \sin y$.

(方法二) 由 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$ 知 $\frac{\partial z}{\partial x} = \int 1 dy = y + \varphi(x)$.

又当 $y = 0$ 时, $z = \sin x$, 则 $z(x, 0) = \sin x$, $z'_x(x, 0) = \cos x$, 从而有

$$\varphi(x) = \cos x, \frac{\partial z}{\partial x} = y + \cos x$$

即

$$z = \int (y + \cos x) dx = xy + \sin x + \psi(y)$$

由 $x = 0$ 时, $z = \sin y$ 知, $\psi(y) = \sin y$. 故 $z(x, y) = xy + \sin x + \sin y$.

【例 5】 已知 $(axy^3 - y^2 \cos x)dx + (1 + by \sin x + 3x^2 y^2)dy$ 是某一函数的全微分, 则 a, b 取值分别为:

(A) -2 和 2.

(B) 2 和 -2.

(C) -3 和 3.

(D) 3 和 -3.

解 由题设可知, 存在可微函数 $f(x, y)$, 使

$$df(x, y) = (axy^3 - y^2 \cos x)dx + (1 + by \sin x + 3x^2 y^2)dy$$

则

$$\frac{\partial f}{\partial x} = axy^3 - y^2 \cos x, \frac{\partial f}{\partial y} = 1 + by \sin x + 3x^2 y^2$$

从而有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3axy^2 - 2y \cos x, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = by \cos x + 6xy^2$$

由于 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ 都连续, 从而有 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, 即

$$3axy^2 - 2y \cos x = by \cos x + 6xy^2$$

则 $\begin{cases} 3a = 6 \\ b = -2 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \end{cases}$. 故应选 (B).

【注】 由本题求解中可看出, 若 $P(x, y), Q(x, y)$ 有连续一阶偏导数, 且 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ 是某一函数全微分, 则 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. 此结论以后可直接用, 本题直接用该结论更简单.



【例 6】 设 $f(x)$ 有连续一阶导数, 且有 $(xy - yf(x))dx + (f(x) + y^2)dy = du(x, y)$, 求 $f(x)$ 及 $u(x, y)$, 其中 $f(0) = -1$.

解 由题设知 $x - f(x) = f'(x)$, 即

$$\begin{aligned} f'(x) + f(x) &= x \\ f(x) &= (x-1) + Ce^{-x} \end{aligned}$$

由 $f(0) = -1$ 知, $C = 0$, $f(x) = x - 1$, 从而

$$du(x, y) = ydx + [(x-1) + y^2]dy$$

(方法一) 偏积分 由上式可知 $\frac{\partial u}{\partial x} = y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x - 1 + y^2$.

等式 $\frac{\partial u}{\partial x} = y$ 两端对 x 偏积分得

$$u = \int ydx = xy + \varphi(y)$$

该式两端对 y 求偏导得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + \varphi'(y)$$

又 $\frac{\partial u}{\partial y} = x - 1 + y^2$

则 $\varphi'(y) = -1 + y^2$, 从而

$$\varphi(y) = \int (-1 + y^2)dy = -y + \frac{1}{3}y^3 + C$$

$$u(x, y) = xy - y + \frac{1}{3}y^3 + C$$

(方法二) 凑微分

$$\begin{aligned} du(x, y) &= ydx + [(x-1) + y^2]dy \\ &= (ydx + xdy) + (y^2 - 1)dy \\ &= d(xy) + d\left(\frac{1}{3}y^3 - y\right) \\ &= d\left(xy + \frac{1}{3}y^3 - y\right) \end{aligned}$$

则 $u(x, y) = xy - y + \frac{1}{3}y^3 + C$.

题型三 含有抽象函数的复合函数偏导数与全微分

【例 1】 设函数 $f(u, v)$ 由关系式 $f[xg(y), y] = x + g(y)$ 所确定, 其中函数 $g(y)$ 可微, 且 $g(y) \neq 0$, 则 $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} =$ _____.

解 令 $xg(y) = u, y = v$, 则 $x = \frac{u}{g(y)} = \frac{u}{g(v)}$. 于是



$$f(u, v) = \frac{u}{g(v)} + g(v) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{1}{g(v)}, \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = -\frac{g'(v)}{[g(v)]^2}$$

【例 2】 设函数 $u(x, y) = \varphi(x+y) + \varphi(x-y) + \int_{x-y}^{x+y} \psi(t) dt$, 其中 φ 具有二阶导数, ψ 具有一阶导数, 则必有

(A) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

(B) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

(C) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

(D) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

解 (方法一) 直接法

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(x+y) + \varphi'(x-y) + \psi(x+y) - \psi(x-y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(x+y) - \varphi'(x-y) + \psi(x+y) + \psi(x-y)$$

进一步有: $\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = \varphi''(x+y) + \varphi''(x-y) + \psi'(x+y) - \psi'(x-y)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = \varphi''(x+y) + \varphi''(x-y) + \psi'(x+y) + \psi'(x-y)$$

从而有 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. 故应选(B).

(方法二) 排除法

令 $\varphi(x) = x^2, \psi(x) = 0$, 则

$$u(x, y) = (x+y)^2 + (x-y)^2 = 2x^2 + 2y^2$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

显然(A)(C)(D) 均不正确, 故应选(B).

【例 3】 设 $z = f(xy, x^2 + y^2)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, 其中 $f(u, v)$ 有二阶连续偏导数.

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = yf'_1 + 2xf'_2$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f'_1 + y[xf''_{11} + 2yf''_{12}] + 2x[f''_{21}x + f''_{22} \cdot 2y]$$

$$= f'_1 + xy[f''_{11} + 4f''_{22}] + 2(x^2 + y^2)f''_{12}.$$

【例 4】 设 $f(x, y)$ 可微, 又 $f(0, 0) = 0, f'_x(0, 0) = a, f'_y(0, 0) = b$ 且 $g(t) = f[t, f(t, t^2)]$, 求 $g'(0)$.

解 $g'(t) = f'_1[t, f(t, t^2)] + f'_2[t, f(t, t^2)] \cdot [f'_1(t, t^2) + f'_2(t, t^2) \cdot 2t],$

$$g'(0) = a + b[a + 0 \times b] = a(1 + b).$$

【例 5】 设 $u = f(x, y, z), y = \varphi(x, t), t = \psi(x, z)$, 其中 f, φ, ψ 可微, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial z}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right].$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z}.$$



【例 6】 设 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, 且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 1$, 又 $g(x, y) = f[xy, \frac{1}{2}(x^2 - y^2)]$, 求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

解 令 $xy = u, \frac{1}{2}(x^2 - y^2) = v$, 则

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} y + \frac{\partial f}{\partial v} x$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = y \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} y + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} x \right) + x \left(\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} y + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} x \right) + \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} x - \frac{\partial f}{\partial v} y$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = x \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} x - \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} y \right) - y \left(\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} x - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} y \right) - \frac{\partial f}{\partial v}$$

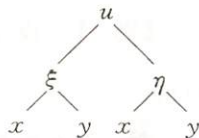
$$\text{故 } \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = (x^2 + y^2) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) = x^2 + y^2.$$

【例 7】 设函数 $u = f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 且满足

$$4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

确定 a, b 的值, 使等式在变换 $\xi = x + ay, \eta = x + by$ 下简化为 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$.

解 (方法一) 变量之间关系如右图



$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot 1 + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot 1 = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot 1 + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot 1 + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \cdot 1 + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot 1$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot a + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot b = a \frac{\partial u}{\partial \xi} + b \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot a + a \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot b + b \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \cdot a + b \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot b$$

$$= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2ab \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot a + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot b + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \cdot a + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot b$$

$$= a \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (a+b) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + b \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

将以上三个二阶偏导数代入等式 $4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ 得

$$(5a^2 + 12a + 4) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + [10ab + 12(a+b) + 8] \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + (5b^2 + 12b + 4) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$$

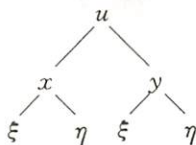
由题设知 $\begin{cases} 5a^2 + 12a + 4 = 0 \\ 5b^2 + 12b + 4 = 0 \end{cases}$, 但 $10ab + 12(a+b) + 8 \neq 0$, 解得



$$\begin{cases} a = -2 \\ b = -\frac{2}{5} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = -\frac{2}{5} \\ b = -2 \end{cases}$$

(方法二) 由 $\xi = x + ay, \eta = x + by$ 解得

$$\begin{cases} x = \frac{a\eta - b\xi}{a - b} \\ y = \frac{\xi - \eta}{a - b} \end{cases}$$



$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{-b}{a-b} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{a-b} \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} &= \frac{-b}{a-b} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{a}{a-b} + \frac{-b}{a-b} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cdot \frac{-1}{a-b} + \frac{1}{a-b} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \cdot \frac{a}{a-b} + \frac{1}{a-b} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot \frac{-1}{a-b} \\ &= \frac{-ab}{(a-b)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{a+b}{(a-b)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{-1}{(a-b)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

欲使 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$, 即

$$-ab \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (a+b) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

与已知关系式比较得

$$\frac{-ab}{4} = \frac{a+b}{12} = \frac{-1}{5}$$

由此解得 $\begin{cases} a = -2 \\ b = -\frac{2}{5} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = -\frac{2}{5} \\ b = -2 \end{cases}$.

【例 8】 设 $f(u)$ 具有二阶连续导数, 而 $z = f(e^x \sin y)$ 满足方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = ze^{2x}$, 求

$f(u)$.

解 令 $u = e^x \sin y$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u) e^x \sin y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(u) e^{2x} \sin^2 y + f'(u) e^x \sin y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'(u) e^x \cos y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(u) e^{2x} \cos^2 y - f'(u) e^x \sin y$$

将 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 代入等式 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = ze^{2x}$ 得

$$f''(u) = f(u), \text{ 即 } f''(u) - f(u) = 0$$

这是一个二阶线性常系数齐次微分方程, 特征方程为 $r^2 - 1 = 0, r = \pm 1$, 则

$$f(u) = C_1 e^u + C_2 e^{-u}$$

【例 9】 设 (r, θ) 为极坐标, $u = u(r, \theta)$ 具有二阶连续偏导数, 并满足 $\frac{\partial u}{\partial \theta} \equiv 0$, 且 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} +$

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, 求 $u(r, \theta)$.

解 由 $\frac{\partial u}{\partial \theta} \equiv 0$ 知 u 仅为 r 的函数, 令 $u = \varphi(r)$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, 则



$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(r) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \varphi'(r) \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi''(r) \frac{x^2}{r^2} + \varphi'(r) \frac{r - \frac{x^2}{r}}{r^2} = \varphi''(r) \frac{x^2}{r^2} + \varphi'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right)$$

由对称性知

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \varphi''(r) \frac{y^2}{r^2} + \varphi'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} \right)$$

则

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \varphi''(r) + \varphi'(r) \frac{1}{r}$$

从而得 $\varphi''(r) + \varphi'(r) \frac{1}{r} = 0$, 即 $r\varphi''(r) + \varphi'(r) = 0$, 从而 $[r\varphi'(r)]' = 0$. 则 $r\varphi'(r) = C_1$, $\varphi(r) = C_1 \ln r + C_2$. 故 $u = C_1 \ln r + C_2$.

【例 10】 若对任意 $t > 0$ 有 $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$, 则称函数 $f(x, y)$ 是 n 次齐次函数, 试证: 若 $f(x, y)$ 可微, 则 $f(x, y)$ 是 n 次齐次函数 $\Leftrightarrow x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = nf(x, y)$.

证明 必要性 由于 $f(x, y)$ 为 n 次齐次函数, 则对任意 $t > 0$, 有 $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$, 该式两端对 t 求导得

$$xf'_1(tx, ty) + yf'_2(tx, ty) = nt^{n-1}f(x, y)$$

令 $t = 1$ 得

$$xf'_1(x, y) + yf'_2(x, y) = nf(x, y)$$

即 $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = nf(x, y)$.

充分性 令 $F(t) = f(tx, ty) (t > 0)$, 则

$$\frac{dF}{dt} = xf'_1(tx, ty) + yf'_2(tx, ty)$$

两边乘以 t 得

$$t \frac{dF}{dt} = tx f'_1(tx, ty) + ty f'_2(tx, ty) = nf(tx, ty) = nF(t)$$

于是 $\frac{dF}{F} = \frac{n}{t} dt$, 解得 $F(t) = Ct^n$.

令 $t = 1$ 得 $F(1) = C$, 而由 $F(t) = f(tx, ty)$ 知 $F(1) = f(x, y)$, 则 $C = f(x, y)$.

于是 $F(t) = t^n f(x, y)$, 即 $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$.

题型四 隐函数的偏导数与全微分

【例 1】 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $z + e^z = xy$ 所确定, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 (方法一) 由 $z + e^z = xy$ 知, $z + e^z - xy = 0$. 由隐函数求导公式可得



$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{-y}{1+e^z} = \frac{y}{1+e^z}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{-x}{1+e^z} = \frac{x}{1+e^z}$$

(方法二) 等式 $z + e^z = xy$ 两端分别对 x, y 求偏导得

$$(1+e^z) \frac{\partial z}{\partial x} = y, (1+e^z) \frac{\partial z}{\partial y} = x$$

由以上两式解得 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{1+e^z}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{1+e^z}$.

(方法三) 等式 $z + e^z = xy$ 两端求微分得

$$dz + e^z dz = ydx + xdy$$

则

$$dz = \frac{y}{1+e^z} dx + \frac{x}{1+e^z} dy$$

从而有 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{1+e^z}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{1+e^z}$.

【例2】 设方程 $F(\frac{x}{z}, \frac{z}{y}) = 0$ 可确定函数 $z = z(x, y)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 由隐函数求导公式得

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{\frac{1}{z}F'_1}{-\frac{x}{z^2}F'_1 + \frac{1}{y}F'_2} = \frac{yzF'_1}{xyF'_1 - z^2F'_2} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{-\frac{z}{y^2}F'_2}{-\frac{x}{z^2}F'_1 + \frac{1}{y}F'_2} = \frac{-z^3F'_2}{y(xyF'_1 - z^2F'_2)} \end{aligned}$$

【例3】 设 $u = f(x, y, z)$ 有连续一阶偏导数, $z = z(x, y)$ 由方程 $xe^x - ye^y = ze^z$ 所确定, 求 du .

解 (方法一) 由题设知

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}$$

等式 $xe^x - ye^y = ze^z$ 两端对 x 求得

$$e^x + xe^x = (e^z + ze^z) \frac{\partial z}{\partial x}$$

由此可得

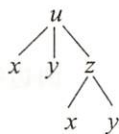
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^x(1+x)}{e^z(1+z)} = \frac{1+x}{1+z} e^{x-z}$$

则

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{1+x}{1+z} e^{x-z}$$

同理可求得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{1+y}{1+z} e^{y-z}$$



故
$$du = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{1+x}{1+z} e^{x-z} \right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{1+y}{1+z} e^{y-z} \right) dy$$

(方法二) 根据微分形式不变性, 由 $u = f(x, y, z)$ 知, $du = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$.

等式 $xe^x - ye^y = ze^z$ 两端求微分得

$$(e^x + xe^x)dx - (e^y + ye^y)dy = (e^z + ze^z)dz$$

解得 $dz = \frac{1+x}{1+z} e^{x-z} dx - \frac{1+y}{1+z} e^{y-z} dy$. 将 dz 代入 $du = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$ 得

$$du = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{1+x}{1+z} e^{x-z} \right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{1+y}{1+z} e^{y-z} \right) dy$$

【例 4】 设 $u = f(x, y, z)$, $\varphi(x^2, e^y, z) = 0$, $y = \sin x$ 确定了函数 $u = u(x)$, 其中 f, φ 都有一阶连续偏导数, 且 $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \neq 0$, 求 $\frac{du}{dx}$.

解 (方法一)
$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cos x + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dx}.$$

$\varphi(x^2, e^y, z) = 0$ 两端对 x 求导得

$$\varphi'_1 2x + \varphi'_2 e^y \cos x + \varphi'_3 \frac{dz}{dx} = 0$$

解得 $\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{\varphi'_3} (2x\varphi'_1 + \varphi'_2 e^y \cos x)$. 将 $\frac{dz}{dx}$ 代入 $\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cos x + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dx}$ 得

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cos x - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{1}{\varphi'_3} (2x\varphi'_1 + \varphi'_2 e^y \cos x)$$

(方法二) 根据微分形式不变性, 由 $u = f(x, y, z)$ 知

$$du = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad ①$$

等式 $\varphi(x^2, e^y, z) = 0$ 两端求微分得

$$\varphi'_1 2x dx + \varphi'_2 e^y dy + \varphi'_3 dz = 0 \quad ②$$

由 $y = \sin x$ 知 $dy = \cos x dx$, 将 $dy = \cos x dx$ 代入 ② 式得

$$dz = -\frac{1}{\varphi'_3} (\varphi'_1 2x + \varphi'_2 e^y \cos x) dx$$

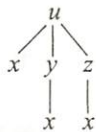
将该式中的 dz 和 $dy = \cos x dx$ 代入 ① 式得

$$du = \left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cos x - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{1}{\varphi'_3} (2x\varphi'_1 + \varphi'_2 e^y \cos x) \right] dx$$

$$\text{故 } \frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cos x - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{1}{\varphi'_3} (2x\varphi'_1 + \varphi'_2 e^y \cos x).$$

【例 5】 设 $y = f(x, t)$, 且方程 $F(x, y, t) = 0$ 确定了函数 $t = t(x, y)$, 其中 f, F 都有一阶连续偏导数, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解 (方法一) 将 $t = t(x, y)$ 代入 $y = f(x, t)$ 得 $y = f(x, t(x, y))$, 这是一个关于 x, y 的二元方程, 它可确定 y 是 x 的函数.



等式 $y = f(x, t(x, y))$ 两端对 x 求导得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} \left(\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right)$$

而 $t = t(x, y)$ 由 $F(x, y, t) = 0$ 所确定, 则

$$\frac{\partial t}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial t}}, \quad \frac{\partial t}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial t}}$$

$$\text{于是 } \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial t} \left[\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial t}} + \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial t}} \frac{dy}{dx} \right] \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial t}}{\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial t}}.$$

(方法二) 根据微分形式不变性, 由 $y = f(x, t)$ 知 $dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial t} dt$.

由 $F(x, y, t) = 0$ 知 $\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial t} dt = 0$.

解得 $dt = -\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial t}} \left(\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy \right)$. 将 dt 的表达式代入 $dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial t} dt$ 并整理可得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial t}}{\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial t}}$$

【例 6】 设 $f(x, y)$ 有二阶连续偏导数, 且 $f'_y \neq 0$. 证明: 对任意常数 C , $f(x, y) = C$ 为一条直线 $\Leftrightarrow f_2'^2 f_{11}'' - 2f_1' f_2' f_{12}'' + f_1'^2 f_{22}'' = 0$.

证明 由原题设条件知 $f(x, y) = C$ 可确定隐函数 $y = y(x)$, 从而 $f(x, y) = C$ 为一条直线的充要条件是 $y = y(x)$ 是线性函数 (即 $y = ax + b$), 而 $y = y(x)$ 是线性函数的充要条件是 $y'' = 0$.

等式 $f(x, y) = C$ 两端对 x 求导得

$$f_1' + f_2' \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{f_1'}{f_2'}$$

从而有

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= -\frac{d}{dx} \left(\frac{f_1'}{f_2'} \right) = -\frac{\left(f_{11}'' + f_{12}'' \frac{dy}{dx} \right) f_2' - \left(f_{21}'' + f_{22}'' \frac{dy}{dx} \right) f_1'}{f_2'^2} \\ &= -\frac{f_2'^2 f_{11}'' - 2f_1' f_2' f_{12}'' + f_1'^2 f_{22}''}{f_2'^3} \end{aligned}$$

必要性 若 $f(x, y) = C$ 是一条直线, 则由 $f(x, y) = C$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 应为线性函数 (即 $y = ax + b$), 则 $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$, 从而有

$$f_2'^2 f_{11}'' - 2f_1' f_2' f_{12}'' + f_1'^2 f_{22}'' = 0$$

充分性 若 $f_2'^2 f_{11}'' - 2f_1' f_2' f_{12}'' + f_1'^2 f_{22}'' = 0$, 则 $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$, 从而有 $y = ax + b$, 即

$f(x, y) = C$ 所确定的隐函数 $y = y(x)$ 为线性函数.

故 $f(x, y) = C$ 表示直线.

第三节 极值与最值

一、考试内容要点精讲

(一) 无条件极值

定义 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 的某邻域内有定义, 若对该去心邻域内任意的点 $P(x, y)$ 均有

$$f(x, y) < f(x_0, y_0) \text{ (或 } f(x, y) > f(x_0, y_0) \text{)}$$

则称 (x_0, y_0) 为 $f(x, y)$ 的 **极大值点** (或 **极小值点**); 称 $f(x_0, y_0)$ 为 $f(x, y)$ 的 **极大值** (或 **极小值**). 极大值点和极小值点统称为 **极值点**; 极大值和极小值统称为 **极值**.

定理 1 (极值的必要条件) 设 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 存在偏导数, 且 (x_0, y_0) 为 $f(x, y)$ 的极值点, 则

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$$

定理 2 (极值的充分条件) 设 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某邻域内有二阶连续偏导数, 又 $f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0) = 0$. 记

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), B = f''_{xy}(x_0, y_0), C = f''_{yy}(x_0, y_0)$$

则有下列结论:

(1) 若 $AC - B^2 > 0$, 则 (x_0, y_0) 为 $f(x, y)$ 的极值点.

① $A < 0$, 则 (x_0, y_0) 为 $f(x, y)$ 的极大值点;

② $A > 0$, 则 (x_0, y_0) 为 $f(x, y)$ 的极小值点.

(2) 若 $AC - B^2 < 0$, 则 (x_0, y_0) 不为 $f(x, y)$ 的极值点.

(3) 若 $AC - B^2 = 0$, 则 (x_0, y_0) 可能为 $f(x, y)$ 的极值点, 也可能不为 $f(x, y)$ 的极值点 (此时一般用定义判定).

求具有二阶连续偏导数二元函数 $z = f(x, y)$ 极值的一般步骤为:

(1) 求出 $f(x, y)$ 的驻点 $P_1, \dots, P_k$.

(2) 利用极值的充分条件判定驻点 P_i 是否为极值点.

【注】 二元函数 $z = f(x, y)$ 在偏导数不存在的点也可能取到极值 (如 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$), 而这种点是否取得极值一般用极值定义判定.

(二) 条件极值及拉格朗日乘数法

求 $z = f(x, y)$ 在条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的条件极值的一般方法为:

(1) 构造拉格朗日函数 $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$;

(2) 将 $F(x, y, \lambda)$ 分别对 x, y, λ 求偏导数, 构造方程组

$$\begin{cases} f'_x(x, y) + \lambda \varphi'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) + \lambda \varphi'_y(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$



解出 x, y 及 λ , 则其中 (x, y) 就是函数 $f(x, y)$ 在条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的可能的极值点.

以上方法可推广到对于 n 元函数在 m 个约束条件下的极值问题, 如求 $u = f(x, y, z)$ 在条件 $\varphi(x, y, z) = 0, \psi(x, y, z) = 0$ 下的极值, 可构造拉格朗日函数

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = f + \lambda\varphi + \mu\psi$$

将 F 对 x, y, z, λ, μ 分别求偏导数, 并构造方程组

$$\begin{cases} f'_x(x, y, z) + \lambda\varphi'_x(x, y, z) + \mu\psi'_x(x, y, z) = 0 \\ f'_y(x, y, z) + \lambda\varphi'_y(x, y, z) + \mu\psi'_y(x, y, z) = 0 \\ f'_z(x, y, z) + \lambda\varphi'_z(x, y, z) + \mu\psi'_z(x, y, z) = 0 \\ \varphi(x, y, z) = 0 \\ \psi(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

解出 x, y, z, λ 及 μ , 则其中 (x, y, z) 就是可能的极值点.

对于实际问题, 如果驻点唯一, 且由实际意义知问题存在最大(小)值, 则该驻点即为最大(小)值点. 如果存在多个驻点, 且由实际意义知道问题既存在最大值也存在最小值, 只需比较各驻点处的函数值, 最大的则为最大值, 最小的则为最小值.

(三) 最大最小值

1) 求连续函数 $f(x, y)$ 在有界闭域 D 上的最大最小值三部曲.

(1) 求 $f(x, y)$ 在 D 内部可能的极值点;

(2) 求 $f(x, y)$ 在 D 的边界上的最大最小值;

(3) 比较.

2) 应用题

二、常考题型的方法与技巧

题型一 求无条件极值

【例 1】求函数 $z = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2$ 的极值.

解 由 $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6x = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 6y = 0 \end{cases}$ 得驻点 $(0, 0), (0, 2), (2, 0), (2, 2)$.

又 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x - 6, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y - 6,$

(1) 点 $(0, 0)$ 处, $AC - B^2 = 36 > 0$ 且 $A = -6 < 0$, 则点 $(0, 0)$ 为极大值点, $z(0, 0) = 0$;

(2) 点 $(0, 2)$ 处, $AC - B^2 = -36 < 0$, 则 $(0, 2)$ 不是极值点;

(3) 点 $(2, 0)$ 处, $AC - B^2 = -36 < 0$, 则 $(2, 0)$ 不是极值点;

(4) 点 $(2, 2)$ 处, $AC - B^2 = 36 > 0$ 且 $A = 6 > 0$, 则点 $(2, 2)$ 为极小值点, $z(2, 2) = -8$.

【例 2】求函数 $f(x, y) = xy(a - x - y)$ 的极值.

解 由 $\begin{cases} f'_x(x, y) = y(a - x - y) - xy = 0 \\ f'_y(x, y) = x(a - x - y) - xy = 0 \end{cases}$ 得驻点 $(0, 0), (0, a), (a, 0), (\frac{a}{3}, \frac{a}{3})$. 又 A

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2y, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = a - 2x - 2y, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2x,$$

$$AC - B^2 = 4xy - (a - 2x - 2y)^2$$

(1) $a > 0$ 时, $(0, 0), (0, a), (a, 0)$ 不是极值点, $(\frac{a}{3}, \frac{a}{3})$ 极大值, $f(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}) = (\frac{a}{3})^3$;

(2) $a < 0$ 时, $(0, 0), (0, a), (a, 0)$ 不是极值点, $(\frac{a}{3}, \frac{a}{3})$ 极小值, $f(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}) = (\frac{a}{3})^3$;

(3) $a = 0$ 时, 驻点 $(0, 0)$, $AC - B^2 = 0$; 而 $f(x, x) = -2x^3$ 可正可负, $f(0, 0) = 0$, 则 $(0, 0)$ 不是极值点.

【例 3】 求由方程 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$ 所确定函数 $z = z(x, y)$ 的极值.

解 (方法一) 由 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$ 得

$$\begin{cases} 2x + 2zz'_x - 2 - 4z'_x = 0 \\ 2y + 2zz'_y + 2 - 4z'_y = 0 \end{cases}$$

在上式中令 $z'_x = 0, z'_y = 0$ 得 $x = 1, y = -1$, 将 $x = 1, y = -1$ 代入原方程得 $z = 6$ 和 $z = -2$, 即驻点为 $(1, -1, 6)$ 和 $(1, -1, -2)$.

等式 $2x + 2zz'_x - 2 - 4z'_x = 0$ 两端分别对 x, y 求导得

$$\begin{cases} 2 + 2(z'_x)^2 + 2zz''_{xx} - 4z''_{xx} = 0 \\ 2z'_y z'_x + 2zz''_{xy} - 4z''_{xy} = 0 \end{cases}$$

从而可得 $z''_{xx} = \frac{1 + (z'_x)^2}{2 - z}, z''_{xy} = \frac{z'_x z'_y}{2 - z}$.

等式 $2y + 2zz'_y + 2 - 4z'_y = 0$ 两端对 y 求导得

$$2 + 2(z'_y)^2 + 2zz''_{yy} - 4z''_{yy} = 0$$

从而可得 $z''_{yy} = \frac{1 + (z'_y)^2}{2 - z}$. 则

(1) 在点 $(1, -1, 6)$ 处, $AC - B^2 = \frac{1}{16} > 0$, 且 $A = -\frac{1}{4} < 0$, 则函数 $z = z(x, y)$ 在该点取极大值, 极大值 $z_1(1, -1) = 6$.

(2) 在点 $(1, -1, -2)$ 处, $AC - B^2 = \frac{1}{16} > 0$, 且 $A = \frac{1}{4} > 0$, 则函数 $z = z(x, y)$ 在该点取极小值, $z_2(1, -1) = -2$.

(方法二) 将方程 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$ 配方得

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 16$$

从而有 $z = 2 \pm \sqrt{16 - (x-1)^2 - (y+1)^2}$.

由此可见当 $x = 1, y = -1$ 时, $z = z(x, y)$ 取得极大值为 $2 + 4 = 6$, 取得极小值 $2 - 4 = -2$.

【例 4】 设 $f(x, y)$ 有二阶连续导数, $g(x, y) = f(e^{xy}, x^2 + y^2)$, 且

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) + x + y - 1}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} = 0$$

证明 $g(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 取得极值, 判断此极值是极大值还是极小值, 并求出此极值.

解 由题设 $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) + x + y - 1}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} = 0$ 知

$$f(x, y) = -(x-1) - y + o(\rho)$$



其中 $\rho = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$.

则 $f(1,0) = 0, f'_1(1,0) = f'_2(1,0) = -1$.

$$g'_x = f'_1 \cdot e^{xy} y + f'_2 \cdot 2x, g'_y = f'_1 \cdot e^{xy} x + f'_2 \cdot 2y,$$

$$g'_x(0,0) = 0, g'_y(0,0) = 0,$$

$$g''_{xx} = (f''_{11} \cdot e^{xy} y + f''_{12} \cdot 2x) e^{xy} y + f'_1 \cdot e^{xy} y^2 + (f''_{21} \cdot e^{xy} y + f''_{22} \cdot 2x) 2x + 2f'_2,$$

$$g''_{xy} = (f''_{11} \cdot e^{xy} x + f''_{12} \cdot 2y) e^{xy} y + f'_1 \cdot (e^{xy} xy + e^{xy}) + (f''_{21} \cdot e^{xy} x + f''_{22} \cdot 2y) 2x,$$

$$g''_{yy} = (f''_{11} \cdot e^{xy} x + f''_{12} \cdot 2y) e^{xy} x + f'_1 \cdot e^{xy} x^2 + (f''_{21} \cdot e^{xy} x + f''_{22} \cdot 2y) 2y + 2f'_2,$$

$$A = g''_{xx}(0,0) = 2f'_2(1,0) = -2, B = g''_{xy}(0,0) = f'_1(1,0) = -1,$$

$$C = g''_{yy}(0,0) = 2f'_2(1,0) = -2,$$

$AC - B^2 = 3 > 0$ 且 $A < 0$, 故 $g(x,y)$ 在 $(0,0)$ 取得极值, 且 $g(0,0) = f(1,0) = 0$ 是极大值.

【注】 求 $A = g''_{xx}(0,0), B = g''_{xy}(0,0), C = g''_{yy}(0,0)$ 有更简单的方法.

由 $g'_x = f'_1 \cdot e^{xy} y + f'_2 \cdot 2x$ 知 $g'_x(x,0) = 2xf'_2(1,x^2), g'_x(0,y) = yf'_1(1,y^2)$, 则 $g''_{xx}(0,0) = 2f'_2(1,0) = -2, g''_{xy}(0,0) = f'_1(1,0) = -1$.

同理 $g'_y(0,y) = 2yf'_2(1,y^2)$, 则 $g''_{yy}(0,0) = 2f'_2(1,0) = -2$.

【例 5】 设 $z = f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续, 且 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y)}{\sin(x^2 + y^2)} = -1$, 则

(A) $f'_x(0,0)$ 不存在.

(B) $f'_x(0,0)$ 存在但不为零.

(C) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处取极小值.

(D) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处取极大值.

解 (方法一) 直接法

由于 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y)}{\sin(x^2 + y^2)} = -1 < 0$, 由极限的保号性知, 存在 $(0,0)$ 点的去心邻域, 使

$$\frac{f(x,y)}{\sin(x^2 + y^2)} < 0$$

而在该去心邻域内 $\sin(x^2 + y^2) > 0$, 则 $f(x,y) < 0$.

再由 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y)}{\sin(x^2 + y^2)} = -1$ 及 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的连续性知 $f(0,0) = 0$.

由极值定义知 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点取极大值, 故应选(D).

(方法二) 排除法

取 $f(x,y) = -(x^2 + y^2)$, 显然满足原题条件, 但 $f'_x(0,0) = 0, f(x,y) = -(x^2 + y^2)$ 在 $(0,0)$ 取极大值, 因此选项(A)(B)(C) 均不正确, 故应选(D).

【例 6】 已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内连续, 且 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y) - xy}{(x^2 + y^2)^2} = 1$, 则

(A) 点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

(B) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点.

(C) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点.

(D) 根据所给条件无法判断点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点.



解 由 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 连续及 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - xy}{(x^2 + y^2)^2} = 1$ 知 $f(0, 0) = 0$, 且

$$\frac{f(x, y) - xy}{(x^2 + y^2)^2} = 1 + \alpha, \text{ 其中 } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \alpha = 0$$

则 $f(x, y) = xy + (1 + \alpha)(x^2 + y^2)^2$

令 $y = x$ 得 $f(x, x) = x^2 + 4(1 + \alpha)x^4 = x^2 + o(x^2)$.

令 $y = -x$ 得 $f(x, -x) = -x^2 + 4(1 + \alpha)x^4 = -x^2 + o(x^2)$.

因此可知 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点的任何去心邻域内始终可正可负, 而 $f(0, 0) = 0$, 由极值定义知 $(0, 0)$ 点不是 $f(x, y)$ 的极值点, 故应选 (A).

【注】 一种“经典错误”是: 从以上解答的第三行之后

则 $f(x, y) = xy + (1 + \alpha)(x^2 + y^2)^2$

从而, $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点的某去心邻域内的函数值的正负由 xy 所确定, 而 xy 在 $(0, 0)$ 点的去心邻域内可正可负, 则 $f(x, y)$ 也可正可负, 又 $f(0, 0) = 0$, 则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点不取得极值.

以上解法的依据是当 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时, $(x^2 + y^2)^2$ 是 xy 的高阶无穷小, 即

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^2 + y^2)^2}{xy} = 0$$

但事实上极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^2 + y^2)^2}{xy}$ 不存在! 这是由于

$$\lim_{\substack{y=x^4 \\ x \rightarrow 0}} \frac{(x^2 + y^2)^2}{xy} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + x^8)^2}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 2x^{10} + x^{16}}{x^5} = \infty$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

题型二 求最大最小值

【例 1】 求函数 $z = x^2y(4 - x - y)$ 在直线 $x + y = 6$, x 轴和 y 轴所围成的区域 D 上的最大值和最小值.

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy(4 - x - y) - x^2y = xy(8 - 3x - 2y),$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2(4 - x - y) - x^2y = x^2(4 - x - 2y).$$

令 $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$, 由此可解得 $z(x, y)$ 在 D 内唯一驻点 $(2, 1)$, 且 $z(2, 1) = 4$.

在 D 的边界 $y = 0, 0 \leq x \leq 6$ 或 $x = 0, 0 \leq y \leq 6$ 上, $z(x, y) = 0$.

在边界 $x + y = 6 (0 \leq x \leq 6)$ 上, $z(x, y) = 2(x^3 - 6x^2) (0 \leq x \leq 6)$.

令 $\varphi(x) = 2(x^3 - 6x^2) (0 \leq x \leq 6)$, 则 $\varphi'(x) = 6x^2 - 24x$. 令 $\varphi'(x) = 0$, 得 $x = 4$. 又

$$\varphi(0) = 0, \varphi(4) = -64, \varphi(6) = 0$$



则 $z(x, y)$ 在边界 $x + y = 6 (0 \leq x \leq 6)$ 上的最大值为 0, 最小值为 -64.

由此可知 $z(x, y)$ 在区域 D 上最大值为 4, 最小值为 -64.

【例 2】 求函数 $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ 在 $x^2 + y^2 \leq 25$ 上的最大值与最小值.

解 (方法一) 由
$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 12 = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y + 16 = 0 \end{cases}, \text{得 } x = 6, y = -8. \text{ 显然点 } (6, -8) \text{ 不在区域 } D$$

内, 因此构造拉格朗日函数

$$\begin{aligned} F(x, y, \lambda) &= x^2 + y^2 - 12x + 16y + \lambda(x^2 + y^2 - 25) \\ &= 25 - 12x + 16y + \lambda(x^2 + y^2 - 25) \end{aligned}$$

$$\text{由 } \begin{cases} F'_x = -12 + 2\lambda x = 0 \\ F'_y = 16 + 2\lambda y = 0 \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 - 25 = 0 \end{cases}, \text{解得 } \begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = -4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_2 = -3 \\ y_2 = 4 \end{cases}. \text{ 又}$$

$$z(3, -4) = -75, z(-3, 4) = 125$$

则 $z(x, y)$ 在 D 上最小值为 -75, 最大值为 125.

(方法二) 由方法一的讨论知 $z(x, y)$ 在区域 $x^2 + y^2 \leq 25$ 的最大值和最小值应在该区域边界 $x^2 + y^2 = 25$ 上取得. 由于 $x^2 + y^2 = 25$ 可改写成参数方程 $\begin{cases} x = 5\cos\theta \\ y = 5\sin\theta \end{cases} (0 \leq \theta \leq 2\pi)$,

将 $x = 5\cos\theta, y = 5\sin\theta$ 代入 $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ 得

$$\begin{aligned} z &= 25 - 60\cos\theta + 80\sin\theta \\ &= 25 - \sqrt{60^2 + 80^2} \left(\frac{60}{\sqrt{60^2 + 80^2}} \cos\theta - \frac{80}{\sqrt{60^2 + 80^2}} \sin\theta \right) \\ &= 25 - \sqrt{60^2 + 80^2} \cos(\theta + \alpha). \end{aligned}$$

则 z 的最小值为 $25 - \sqrt{60^2 + 80^2} = -75$, z 的最大值为 $25 + \sqrt{60^2 + 80^2} = 125$.

(方法三) $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y = (x - 6)^2 + (y + 8)^2 - 100$.

注意到上式中的 $(x - 6)^2 + (y + 8)^2$ 是平面域 D 上点 (x, y) 与点 $(6, -8)$ 之间距离的平方. 因此, 从几何上看, 求函数 $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ 在区域 $x^2 + y^2 \leq 25$ 的最大值和最小值点的问题就是在区域 $x^2 + y^2 \leq 25$ 上找点 (x, y) , 使它到点 $(6, -8)$ 的距离最大或最小, 显然, 这两个点应为过原点和点 $(6, -8)$ 的直线 $y = -\frac{4}{3}x$ 与圆周 $x^2 + y^2 = 25$ 的两个交点.

$$\text{由 } \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = -\frac{4}{3}x \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = -4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_2 = -3 \\ y_2 = 4 \end{cases}. \text{ 又 } z(3, -4) = -75, z(-3, 4) = 125,$$

故 $z(x, y)$ 在 $x^2 + y^2 \leq 25$ 上的最大值为 125, 最小值为 -75.

【例 3】 求函数 $u = xy + 2yz$ 在约束条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ 下的最大值和最小值.

解 (方法一) 设 $F(x, y, z, \lambda) = xy + 2yz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 10)$. 令

$$\begin{cases} F'_x = y + 2\lambda x = 0 & \text{①} \\ F'_y = x + 2z + 2\lambda y = 0 & \text{②} \\ F'_z = 2y + 2\lambda z = 0 & \text{③} \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 10 = 0 & \text{④} \end{cases}$$

1) 当 $\lambda \neq 0$ 时,

由 ① 式和 ③ 式得 $2x = z$, 代入 ② 式后由 ② 式和 ① 式得 $5x^2 = y^2$.

将 $2x = z, 5x^2 = y^2$ 代入 ④ 式得四个可能的极值点

$$P_1 = (1, \sqrt{5}, 2), \quad P_2 = (-1, \sqrt{5}, -2)$$

$$P_3 = (1, -\sqrt{5}, 2), \quad P_4 = (-1, -\sqrt{5}, -2)$$

2) 当 $\lambda = 0$ 时,

将 $y = 0, x + 2z = 0$ 代入 ④ 式得两个可能的极值点

$$P_5 = (2\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}), \quad P_6 = (-2\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$$

$$u(P_1) = u(P_4) = 5\sqrt{5}, u(P_2) = u(P_3) = -5\sqrt{5}, u(P_5) = u(P_6) = 0$$

所以 $u_{\max} = 5\sqrt{5}; u_{\min} = -5\sqrt{5}$.

(方法二) 方程 $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ 可确定 z 是 x, y 的函数, 则 u 是 x, y 的函数, 令

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = y + 2y \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = x + 2z + 2y \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

由方程 $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ 可知 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$, 代入上式得

$$\begin{cases} yz - 2xy = 0 & \text{①} \\ xz + 2z^2 - 2y^2 = 0 & \text{②} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 10 & \text{③} \end{cases}$$

由 ① 式可知, 需分以下两种情况

1) 若 $y \neq 0$, 则 $z = 2x$, 代入 ② 式得 $y^2 = 5x^2$, 从而由 ③ 式解得

$$P_1 = (1, \sqrt{5}, 2), \quad P_2 = (-1, \sqrt{5}, -2)$$

$$P_3 = (1, -\sqrt{5}, 2), \quad P_4 = (-1, -\sqrt{5}, -2)$$

2) 若 $y = 0$, 代入 ② 式得 $x + 2z = 0$, 从而由 ③ 式解得

$$P_5 = (2\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}), \quad P_6 = (-2\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$$

以下同方法一.

【例 4】 在椭圆 $x^2 + 4y^2 = 4$ 上求一点, 使其到直线 $2x + 3y - 6 = 0$ 的距离最短.

解 (方法一) 椭圆 $x^2 + 4y^2 = 4$ 上的点 $P(x, y)$ 到直线 $2x + 3y - 6 = 0$ 的距离为

$$d = \frac{|2x + 3y - 6|}{\sqrt{13}}, \text{显然将 } d \text{ 作为目标函数不方便, 而}$$

$$d^2 = \frac{(2x + 3y - 6)^2}{13}$$

所以只要求得函数 $(2x + 3y - 6)^2$ 在条件 $x^2 + 4y^2 = 4$ 下的最小值点即可.

令 $F(x, y, \lambda) = (2x + 3y - 6)^2 + \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)$, 则

$$\begin{cases} F'_x = 4(2x + 3y - 6) + 2\lambda x = 0 \\ F'_y = 6(2x + 3y - 6) + 8\lambda y = 0 \\ F'_\lambda = x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$



从而得 $\begin{cases} x_1 = \frac{8}{5} \\ y_1 = \frac{3}{5} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_2 = -\frac{8}{5} \\ y_2 = -\frac{3}{5} \end{cases}$. 于是

$$d|_{(x_1, y_1)} = \frac{1}{\sqrt{13}}, d|_{(x_2, y_2)} = \frac{11}{\sqrt{13}}$$

由本题实际意义知最短距离存在, 则点 $(\frac{8}{5}, \frac{3}{5})$ 为所求的点.

(方法二) 作椭圆 $x^2 + 4y^2 = 4$ 的切线 l , 使其与直线 $2x + 3y - 6 = 0$ 平行, 这样的切线应有两条, 对应的两个切点, 其中一个是距直线 $2x + 3y - 6 = 0$ 最远的点, 另一个则是距直线 $2x + 3y - 6 = 0$ 最近的点.

直线 $2x + 3y - 6 = 0$ 的斜率为 $k = -\frac{2}{3}$, 而椭圆 $x^2 + 4y^2 = 4$ 在点 $P(x, y)$ 处切线斜率可由等式 $2x + 8yy' = 0$ 得到 $y' = -\frac{x}{4y}$. 则 $-\frac{2}{3} = -\frac{x}{4y}$, 即 $8y = 3x$.

将 $8y = 3x$ 与 $x^2 + 4y^2 = 4$ 联立得

$$\begin{cases} x_1 = \frac{8}{5} \\ y_1 = \frac{3}{5} \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x_2 = -\frac{8}{5} \\ y_2 = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

由几何意义知, 点 $(\frac{8}{5}, \frac{3}{5})$ 应为所求的点.

【例 5】 已知三角形周长为 $2p$, 求使它绕自己的一边旋转时所构成旋转体体积最大的三角形.

解 设三角形三边之长分别为 x, y, z , 底边上的高为 h , 该三角形绕边长为 y 的边旋转所得旋转体体积为 V , 则

$$V = \frac{\pi}{3} h^2 y,$$

$$S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)} = \frac{1}{2} y h,$$

$$V = \frac{4}{3} \pi p \frac{(p-x)(p-y)(p-z)}{y}, \text{ 其中 } x+y+z=2p.$$

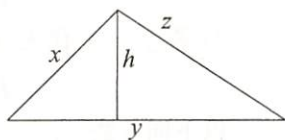


图 5-2

令 $F(x, y, z, \lambda) = \ln(p-x) + \ln(p-y) + \ln(p-z) - \ln y + \lambda(x+y+z-2p)$, 则

$$\begin{cases} F'_x = \frac{-1}{p-x} + \lambda = 0 \\ F'_y = \frac{-1}{p-y} - \frac{1}{y} + \lambda = 0 \\ F'_z = \frac{-1}{p-z} + \lambda = 0 \\ F'_\lambda = x+y+z-2p = 0 \end{cases}.$$

由此解得 $x = z = \frac{3p}{4}, y = \frac{p}{2}, V_{\max} = \frac{\pi}{12} p^3$.



【例 6】 (仅数学三要求) 设某厂生产甲乙两种产品, 产量分别为 x, y (千只), 其利润函数为 $L(x, y) = -x^2 - 4y^2 + 8x + 24y - 15$, 如果现有原料 15000kg (不要求用完), 生产两种产品每千只都需要原料 2000kg, 求

(1) 使利润最大的 x, y 和最大利润;

(2) 如果原料降至 12000kg, 求这时利润最大的产量和最大利润.

解 (1) 由
$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = -2x + 8 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = -8y + 24 = 0 \end{cases}, \quad \text{得 } x = 4, y = 3.$$

于是点 $(4, 3)$ 为 $L(x, y)$ 唯一可能取得极值的点, 由该问题已知 $L(x, y)$ 最大值存在, 则最大值只能在点 $(4, 3)$ 取到, $L(4, 3) = 37$ (万元).

(2) 如果原料降至 12000kg, 问题变为条件极值, 令

$$F(x, y, \lambda) = -x^2 - 4y^2 + 8x + 24y - 15 + \lambda(x + y - 6)$$

由
$$\begin{cases} F'_x = -2x + 8 + \lambda = 0 \\ F'_y = -8y + 24 + \lambda = 0 \\ F'_\lambda = x + y - 6 = 0 \end{cases} \quad \text{得 } x = 3.2, y = 2.8.$$

于是点 $(3.2, 2.8)$ 为 $L(x, y)$ 在条件 $x + y = 6$ 下唯一可能取得极值的点, 由该问题已知该最大值存在, 则最大值只能在点 $(3.2, 2.8)$ 取到, $L(3.2, 2.8) = 36.2$ (万元).

【例 7】 利用条件极值的方法证明: 对任意正数 a, b, c , 有

$$abc^3 \leq \frac{27}{5^5} (a + b + c)^5$$

分析 要证明 $abc^3 \leq \frac{27}{5^5} (a + b + c)^5$, 只要证明对任意正数 k , 函数 xyz^3 在条件

$x + y + z = k$ 下的最大值不超过 $\frac{27}{5^5} k^5$ 即可.

证明 (方法一) 令 $F(x, y, z, \lambda) = xyz^3 + \lambda(x + y + z - k)$, 由

$$\begin{cases} F'_x = yz^3 + \lambda = 0 \\ F'_y = xz^3 + \lambda = 0 \\ F'_z = 3xyz^2 + \lambda = 0 \\ F'_\lambda = x + y + z - k = 0 \end{cases} \quad \text{得 } x = y = \frac{k}{5}, z = \frac{3k}{5}.$$

由于可能的极值点唯一, 所求最大值存在, 则最大值在 $x = y = \frac{k}{5}, z = \frac{3k}{5}$ 时取到, 故

$$xyz^3 \leq \frac{k}{5} \cdot \frac{k}{5} \cdot \left(\frac{3k}{5}\right)^3 = \frac{27}{5^5} k^5 = \frac{27}{5^5} (x + y + z)^5$$

(方法二) $xyz^3 = 3^3 x \cdot y \cdot \frac{z}{3} \cdot \frac{z}{3} \cdot \frac{z}{3}$, 又 $x + y + \frac{z}{3} + \frac{z}{3} + \frac{z}{3} = x + y + z = k$,

从而当 $x = y = \frac{z}{3}$ 时, xyz^3 最大, 即 $x = y = \frac{k}{5}, z = \frac{3k}{5}$ 时, xyz^3 最大, 最大值为 $\frac{27}{5^5} k^5$,

原题得证.



第六章 二重积分

考试内容	考试要求		
	数一	数二	数三
二重积分的基本性质	了解(二重积分的性质)	了解	了解
二重积分的计算方法(直角坐标、极坐标)	掌握	掌握	掌握
二重积分的中值定理	了解	了解	了解
无界区域上较简单的反常二重积分并会计算			了解

一、考试内容要点精讲

(一) 二重积分的概念

定义 设函数 $z = f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上有界, 将 D 任意分成 n 个小闭区域

$$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$$

其中 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小区域, 也表示它的面积. 在每个 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i, η_i) , 作乘积 $f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$, 并求和 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$. 记 λ 为 n 个小区域 $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$ 中的最大直径, 如果

$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$ 存在, 则称此极限值为函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上的**二重积分**, 记为

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

(二) 二重积分的几何意义

二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 是一个数. 当 $f(x, y) \geq 0$ 时, 其值等于以积分域 D 为底, 以曲面 $z = f(x, y)$ 为曲顶的曲顶柱体的体积.



(三) 二重积分的性质

1. 不等式性质

(1) 若在 D 上 $f(x, y) \leq g(x, y)$, 则 $\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma$.

(2) 若 $f(x, y)$ 在 D 上连续, 则 $mS \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq MS$, 其中 m 和 M 分别为 $f(x, y)$ 在 D 上的最小值和最大值, S 为积分域 D 的面积.

(3) $\left| \iint_D f(x, y) d\sigma \right| \leq \iint_D |f(x, y)| d\sigma$.

2. 积分中值定理

若 $f(x, y)$ 在 D 上连续, 则 $\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta)S$, 其中 $(\xi, \eta) \in D$, S 为积分域 D 的面积.

(四) 二重积分的计算

1. 利用直角坐标计算

1) 先 y 后 x

若积分域 D 是 X 型区域, 即积分域 D 可以用不等式 $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$, $a \leq x \leq b$ 来表示 (如图 6-1), 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

2) 先 x 后 y

若积分域 D 是 Y 型区域, 即积分域 D 可以用不等式 $x_1(y) \leq x \leq x_2(y)$, $c \leq y \leq d$ 来表示 (如图 6-2), 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx.$$

2. 利用极坐标计算

1) 先 r 后 θ

若积分域 D 可以用不等式 $r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, 来表示 (如图 6-3), 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$$

【注】 适合用极坐标计算的二重积分的特征

① 适合用极坐标计算的被积函数:

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}), f\left(\frac{y}{x}\right), f\left(\frac{x}{y}\right)$$

② 适合用极坐标的积分域:

$$\text{如 } x^2 + y^2 \leq R^2; r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2; x^2 + y^2 \leq 2ax; x^2 + y^2 \leq 2by.$$

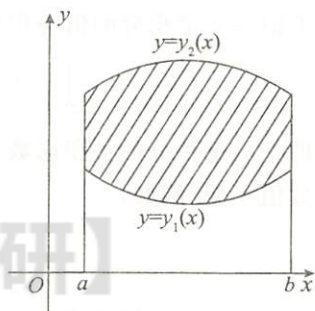


图 6-1

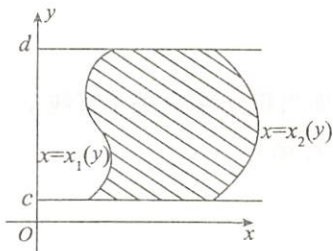


图 6-2

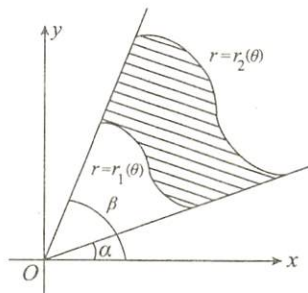


图 6-3



3. 利用对称性和奇偶性计算

1) 若积分域 D 关于 y 轴对称, $f(x, y)$ 关于 x 有奇偶性, 则:

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} 2 \iint_{D_{x \geq 0}} f(x, y) d\sigma, & f(-x, y) = f(x, y) \\ 0, & f(-x, y) = -f(x, y) \end{cases}$$

2) 若积分域 D 关于 x 轴对称, $f(x, y)$ 关于 y 有奇偶性, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} 2 \iint_{D_{y \geq 0}} f(x, y) d\sigma, & f(x, -y) = f(x, y) \\ 0, & f(x, -y) = -f(x, y) \end{cases}$$

4. 利用变量对称性计算

二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 的积分域 D 是点 (x, y) 的集合, 记为 $D_{(x, y)}$,

类似一元定积分的值与积分变量用什么记号无关, 则

$$\iint_{D_{(x, y)}} f(x, y) d\sigma = \iint_{D_{(y, x)}} f(y, x) d\sigma$$

即把二重积分的被积函数 $f(x, y)$ 及积分域 $D_{(x, y)}$ 中的 x 和 y 对调, 积分值不变. 例如,

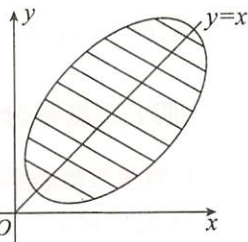


图 6-4

$$\iint_{x^2+2y^2 \leq 1} (3x^2 + 4y^2) d\sigma = \iint_{y^2+2x^2 \leq 1} (3y^2 + 4x^2) d\sigma$$

如果积分域 D 关于直线 $y = x$ 对称, 即 $(x, y) \in D \Leftrightarrow (y, x) \in D$, 如右图, 此时 $D_{(x, y)} = D_{(y, x)}$, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(y, x) d\sigma$$

即当积分域 D 关于直线 $y = x$ 对称时, 将被积函数 $f(x, y)$ 中的 x 和 y 对调, 积分值不变.

笔记:



二、常考题型的方法与技巧

题型一 计算二重积分

【例 1】 计算 $\iint_D [|xy| + \sin(xy^2)] d\sigma$, 其中 D 由曲线 $|x| + |y| = 1$ 所围成.

解 由奇偶性知

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iint_D |xy| d\sigma = 4 \iint_{D_1} xy d\sigma \quad (\text{其中 } D_1 \text{ 为 } D \text{ 在第一象限的部分}) \\ &= 4 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} xy dy = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

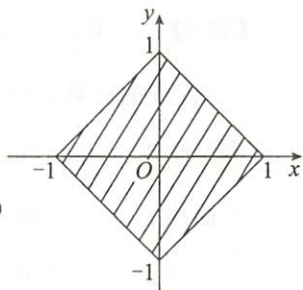


图 6-5

【例 2】 设区域 D 为 $x^2 + y^2 \leq R^2$, 则 $\iint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) d\sigma =$ _____.

解 (方法一) $\iint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \left(\frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b^2} \right) r^3 dr = \frac{\pi R^4}{4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right).$

(方法二) 由于积分域 $D: x^2 + y^2 \leq R^2$ 关于直线 $y = x$ 对称, 则

$$\begin{aligned} \iint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) d\sigma &= \iint_D \left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} \right) d\sigma \\ \text{从而有 } \iint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) d\sigma &= \frac{1}{2} \iint_D \left[\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) + \left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} \right) \right] d\sigma = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi R^4}{4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right). \end{aligned}$$

【例 3】 设区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, $f(x)$ 为 D 上正值连续函数, a, b 为常数, 则 $\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} d\sigma =$ _____.

- (A) $ab\pi$. (B) $\frac{ab}{2}\pi$. (C) $(a+b)\pi$. (D) $\frac{a+b}{2}\pi$.

解 (方法一) 直接法

由于积分域 D 关于直线 $y = x$ 对称, 则

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} d\sigma &= \iint_D \frac{a\sqrt{f(y)} + b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)} + \sqrt{f(x)}} d\sigma \\ \text{原式} &= \frac{1}{2} \left[\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} d\sigma + \iint_D \frac{a\sqrt{f(y)} + b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)} + \sqrt{f(x)}} d\sigma \right] \\ &= \frac{1}{2} \iint_D (a+b) d\sigma = \frac{a+b}{2}\pi \end{aligned}$$

故应选(D).



(方法二) 排除法

取 $f(x) \equiv 1$, 显然符合题设条件, 而

$$\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} d\sigma = \frac{1}{2} \iint_D (a+b) d\sigma = \frac{a+b}{2} \pi$$

显然(A)(B)(C) 均不正确, 故应选(D).

【例 4】 计算 $\iint_D x[1+yf(x^2+y^2)]d\sigma$, 其中 D 是由 $y=x^3$, $y=1$, $x=-1$ 围成的区域, $f(u)$ 为连续函数.

解 原式 $= \iint_D x dx dy + \iint_D xyf(x^2+y^2) dx dy$.

作曲线 $y=-x^3$ 将原积分域分为两个区域 D_1 和 D_2 , 则

$$\iint_D xyf(x^2+y^2) dx dy = \iint_{D_1} xyf(x^2+y^2) dx dy + \iint_{D_2} xyf(x^2+y^2) dx dy = 0, \text{ (利用奇偶性)}$$

$$\iint_D x dx dy = \int_{-1}^1 dx \int_{x^3}^1 x dy = -\frac{2}{5}.$$

故原式 $= -\frac{2}{5}$.

【例 5】 计算积分 $\iint_D \frac{\sin y}{y} d\sigma$, 其中 D 由 $y=\sqrt{x}$ 和 $y=x$ 围成.

$$\begin{aligned} \text{解 } \iint_D \frac{\sin y}{y} dx dy &= \int_0^1 dy \int_{y^2}^y \frac{\sin y}{y} dx \\ &= \int_0^1 (\sin y - y \sin y) dy = 1 - \sin 1. \end{aligned}$$

【例 6】 计算 $\iint_D \sqrt{x^2+y^2} dx dy$, 其中 D 由曲线 $x^2+y^2=2ay$ ($a>0$) 所围成.

$$\begin{aligned} \text{解 } \iint_D \sqrt{x^2+y^2} dx dy &= \int_0^\pi d\theta \int_0^{2a\sin\theta} r^2 dr = \frac{8a^3}{3} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \\ &= \frac{8a^3}{3} \left(\frac{\cos^3 \theta}{3} - \cos \theta \right) \Big|_0^\pi = \frac{32}{9} a^3. \end{aligned}$$

【例 7】 计算 $\iint_D (x+y) d\sigma$, 其中 D 由 $x^2+y^2 \leq x+y$ 所确定.

解 (方法一) 圆 $x^2+y^2=x+y$ 在极坐标下方程为 $r = \cos \theta + \sin \theta$, 则

$$\begin{aligned} \iint_D (x+y) d\sigma &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{\cos\theta+\sin\theta} (\cos\theta + \sin\theta) r^2 dr \\ &= \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\cos\theta + \sin\theta)^4 d\theta = \frac{4}{3} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin^4 \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) d\theta \\ &\stackrel{\theta + \frac{\pi}{4} = t}{=} \frac{4}{3} \int_0^\pi \sin^4 t dt = \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t dt \\ &= \frac{8}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

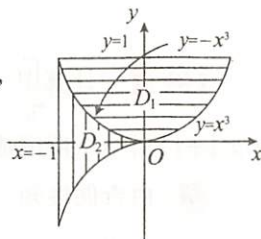


图 6-6

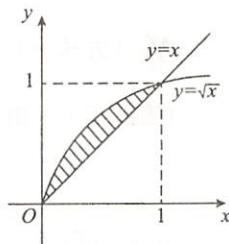


图 6-7

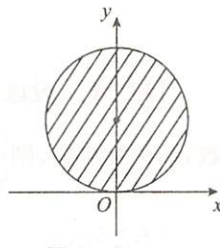


图 6-8

(方法二) 令 $\begin{cases} x - \frac{1}{2} = r \cos \theta \\ y - \frac{1}{2} = r \sin \theta \end{cases}$, 此时 $d\sigma = r dr d\theta$, 则

$$\begin{aligned} \iint_D (x+y) d\sigma &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (r \cos \theta + r \sin \theta + 1) r dr \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r dr = 2\pi \times \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

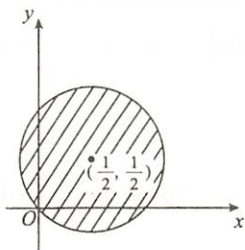


图 6-9

注意: $\int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = 0$.

(方法三) 由于 $\iint_D (x+y) d\sigma = \iint_D [(x - \frac{1}{2}) + (y - \frac{1}{2}) + 1] d\sigma$, 而

$$\iint_D (x - \frac{1}{2}) d\sigma = \iint_D (y - \frac{1}{2}) d\sigma = 0 \quad (\text{利用奇偶性})$$

$$\text{则 } \iint_D (x+y) d\sigma = \iint_D d\sigma = \frac{\pi}{2}. \quad (\text{积分域面积})$$

(方法四) 由对称性知

$$\iint_D (x+y) d\sigma = 2 \iint_D x d\sigma = 2 \bar{x} S$$

其中 $\bar{x}$ 为积分域 D 的形心的 x 坐标, 应为 $\bar{x} = \frac{1}{2}$, S 为积分域 D 的面积, 应为 $S = \frac{\pi}{2}$, 则

$$\iint_D (x+y) d\sigma = \frac{\pi}{2}$$

【例 8】 计算二重积分 $\iint_D y dx dy$, 其中 D 是由直线 $x = -2, y = 0$,

$y = 2$ 以及曲线 $x = -\sqrt{2y - y^2}$ 所围成的平面区域.

解 (方法一) 在直角坐标下化为累次积分计算

$$\begin{aligned} \iint_D y dx dy &= \int_0^2 dy \int_{-2}^{-\sqrt{2y-y^2}} y dx \\ &= \int_0^2 y [2 - \sqrt{2y - y^2}] dy = 2 \int_0^2 y dy - \int_0^2 y \sqrt{2y - y^2} dy \\ &= 4 - \int_0^2 y \sqrt{1 - (y-1)^2} dy \quad (\text{令 } y-1 = \sin t) \\ &= 4 - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin t) \cos^2 t dt = 4 - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

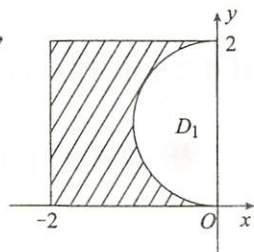


图 6-10

事实上, 计算 $\int_0^2 y \sqrt{1 - (y-1)^2} dy$ 还有一种巧妙的方法:

$$\begin{aligned} \int_0^2 y \sqrt{1 - (y-1)^2} dy &= \int_0^2 (y-1) \sqrt{1 - (y-1)^2} dy + \int_0^2 \sqrt{1 - (y-1)^2} dy \\ &= \int_0^2 (y-1) \sqrt{1 - (y-1)^2} dy = 0 \end{aligned}$$



而 $\int_0^2 \sqrt{1-(y-1)^2} dy$ 应等于半圆的面积 $\frac{\pi}{2}$, 故

$$\int_0^2 y \sqrt{1-(y-1)^2} dy = \frac{\pi}{2}$$

(方法二) $\iint_D y d\sigma = \iint_{D+D_1} y d\sigma - \iint_{D_1} y d\sigma = \int_{-2}^0 dx \int_0^2 y dy - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^{2\sin\theta} r^2 \sin\theta dr$

$$= 4 - \frac{8}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^4 \theta d\theta = 4 - \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta d\theta$$

$$= 4 - \frac{8}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = 4 - \frac{\pi}{2}.$$

(方法三) 由于积分域 D 关于直线 $y=1$ 上下对称, 则

$$\iint_D (y-1) d\sigma = 0$$

故 $\iint_D y d\sigma = \iint_D [(y-1)+1] d\sigma = \iint_D d\sigma = 4 - \frac{\pi}{2}.$

(方法四) 由形心计算公式知 $\iint_D y d\sigma = \bar{y}S.$

由于积分域 D 关于 $y=1$ 对称, 则 $\bar{y}=1$, 而 $S=4-\frac{\pi}{2}$, 故 $\iint_D y d\sigma = 4 - \frac{\pi}{2}.$

【例 9】 设二元函数

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2, & |x|+|y| \leq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 1 < |x|+|y| \leq 2 \end{cases}$$

计算二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) \mid |x|+|y| \leq 2\}.$

解 原式 $= 4 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x^2 dy + 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{\frac{2}{\sin\theta+\cos\theta}} \frac{dr}{\sin\theta+\cos\theta}$

$$= \frac{1}{3} + 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sin\theta + \cos\theta}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{4}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sin(\theta + \frac{\pi}{4})}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{4}{\sqrt{2}} \ln |\csc(\theta + \frac{\pi}{4}) + \cot(\theta + \frac{\pi}{4})| \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{3} + 4\sqrt{2} \ln(\sqrt{2}+1).$$

【例 10】 计算 $\iint_D y^2 d\sigma$, 其中 D 由 $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi)$ 与 $y=0$ 围成.

解 $\iint_D y^2 d\sigma = \int_0^{2\pi a} dx \int_0^{y(x)} y^2 dy = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi a} y^3(x) dx$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} a^3 (1 - \cos t)^3 a (1 - \cos t) dt$$

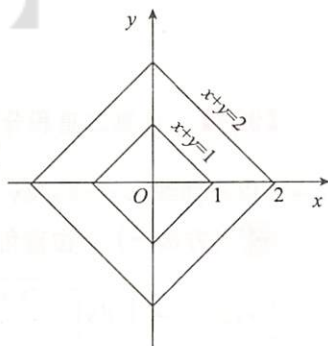


图 6-11

$$\begin{aligned}
 &= \frac{16a^4}{3} \int_0^{2\pi} \sin^8 \frac{t}{2} dt \stackrel{\text{令 } \frac{t}{2} = u}{=} \frac{32a^4}{3} \int_0^{\pi} \sin^8 u du \\
 &= \frac{64a^4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 u du = \frac{64a^4}{3} \times \frac{7}{8} \times \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \\
 &= \frac{35}{12} \pi a^4.
 \end{aligned}$$

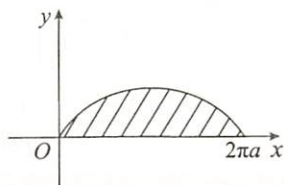


图 6-12

【注】 类似的可以计算下列二重积分

设平面区域 D 由曲线 $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi)$ 与 x 轴围成, 计算二重积分 $\iint_D (x + 2y) dx dy$.

$(5\pi + 3\pi^2)$

【例 11】 设 D 是全平面, $f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$.

$$\text{计算 } \iint_D f(x) f(x^2 - y) d\sigma.$$

【解】 由题设知 $f(x^2 - y) = \begin{cases} x^2 - y, & -1 \leq x^2 - y \leq 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$.

则

$$f(x) f(x^2 - y) = \begin{cases} x(x^2 - y), & -1 \leq x^2 - y \leq 2, -1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$\text{原式} = \int_{-1}^2 dx \int_{x^2-2}^{x^2+1} x(x^2 - y) dy = \frac{9}{4}.$$

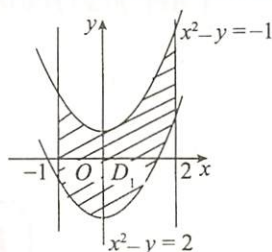


图 6-13

【例 12】 计算 $\iint_D |x^2 + y^2 - 2y| d\sigma$, 其中 D 由 $x^2 + y^2 \leq 4$ 所确定.

$$\text{【解】 } \iint_D |x^2 + y^2 - 2y| d\sigma$$

$$= \iint_{D_1} (2y - x^2 - y^2) d\sigma + \iint_{D_2} (x^2 + y^2 - 2y) d\sigma$$

$$= \iint_{D_1} (2y - x^2 - y^2) d\sigma + \left[\iint_D (x^2 + y^2 - 2y) d\sigma - \iint_{D_1} (x^2 + y^2 - 2y) d\sigma \right]$$

$$\iint_{D_1} (x^2 + y^2 - 2y) d\sigma$$

$$= \iint_D (x^2 + y^2 - 2y) d\sigma + 2 \iint_{D_1} (2y - x^2 - y^2) d\sigma$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^3 dr + 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\sin\theta} (2r\sin\theta - r^2) r dr = 9\pi.$$

【例 13】 计算 $\iint_D \min\{x, y\} e^{-(x^2+y^2)} d\sigma$, 其中 D 为全平面.

$$\text{【解】 } \iint_D \min\{x, y\} e^{-(x^2+y^2)} d\sigma = \iint_{D_1} x e^{-(x^2+y^2)} d\sigma + \iint_{D_2} y e^{-(x^2+y^2)} d\sigma$$

$$D_1 = \{x \leq y\}$$

$$D_2 = \{x \geq y\}$$

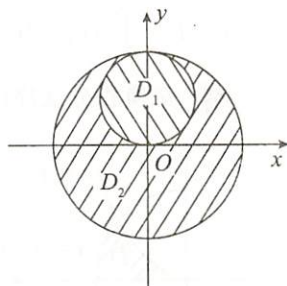


图 6-14



$$\begin{aligned}
 &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^y x e^{-x^2} \cdot e^{-y^2} dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2y^2} dy \\
 &\stackrel{\sqrt{2}y=t}{=} - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\pi} = - \sqrt{\frac{\pi}{2}}.
 \end{aligned}$$

【注】 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$, 这是概率论中一个常用结论.

【例 14】 设 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 且 $\int_0^1 f(x) dx = A$, 求 $\int_0^1 dx \int_x^1 f(x) f(y) dy$.

解 $\int_0^1 dx \int_x^1 f(x) f(y) dy \stackrel{x \text{ 与 } y \text{ 对换}}{=} \int_0^1 dy \int_y^1 f(y) f(x) dx,$

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 dx \int_x^1 f(x) f(y) dy &= \frac{1}{2} \left[\int_0^1 dx \int_x^1 f(x) f(y) dy + \int_0^1 dy \int_y^1 f(y) f(x) dx \right] \\
 &= \frac{1}{2} \iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1}} f(x) f(y) dx dy = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 f(y) dy = \frac{A^2}{2}.
 \end{aligned}$$

题型二 累次积分交换次序及计算

【例 1】 交换下列累次积分次序

(1) $I = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx;$

(2) $I = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy;$

(3) $I = \int_0^2 dx \int_{x^2}^x f(x, y) dy.$

解 交换积分次序的问题, 首先是画域, 然后按另一种次序重新定限. 其区域分别如下:

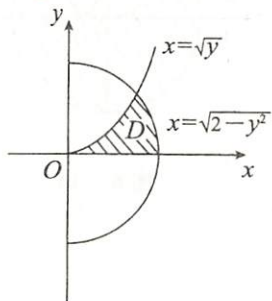


图 6-15

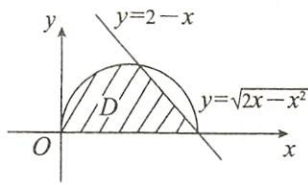


图 6-16

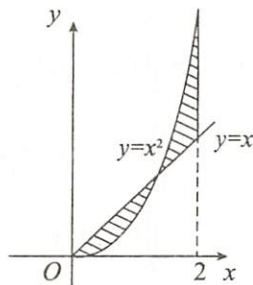


图 6-17

(1) $I = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy.$

(2) $I = \int_0^1 dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y} f(x, y) dx.$



$$(3) I = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx - \int_1^2 dy \int_{\sqrt{y}}^y f(x, y) dx - \int_2^4 dy \int_{\sqrt{y}}^2 f(x, y) dx.$$

【例 2】 交换累次积分 $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$

的次序 ($a > 0$).

解 (方法一) $r = 2a\cos\theta$ 是圆 $x^2 + y^2 = 2ax$, 为了确定 θ 的积分限, 作 $r = \text{常数}$ 的圆弧 (即中心为坐标原点的圆弧),

当 $0 \leq r \leq \sqrt{2}a$ 时, 该圆弧从射线 $\theta = -\frac{\pi}{4}$ 进入积分域, 从上

半圆弧 $r = 2a\cos\theta$ ($\theta = \arccos \frac{r}{2a}$) 出积分域;

当 $\sqrt{2}a \leq r \leq 2a$ 时, 该圆弧从下半圆弧 $r = 2a\cos\theta$ ($\theta = -\arccos \frac{r}{2a}$) 进入积分域, 从上

半圆弧 $r = 2a\cos\theta$ ($\theta = \arccos \frac{r}{2a}$) 出积分域, 则

$$I = \int_0^{\sqrt{2}a} dr \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\arccos \frac{r}{2a}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r d\theta + \int_{\sqrt{2}a}^{2a} dr \int_{-\arccos \frac{r}{2a}}^{\arccos \frac{r}{2a}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r d\theta.$$

(方法二) 曲线 $r = 2a\cos\theta$ 与 $\theta = -\frac{\pi}{4}$ 所围区域在 θ, r 直角坐标

下的区域如右图, 则将原积分在 θ, r 直角坐标下化为先 θ 后 r 的累次积分

$$I = \int_0^{\sqrt{2}a} dr \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\arccos \frac{r}{2a}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r d\theta + \int_{\sqrt{2}a}^{2a} dr \int_{-\arccos \frac{r}{2a}}^{\arccos \frac{r}{2a}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r d\theta$$

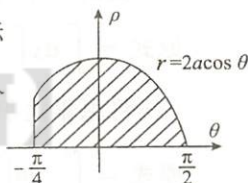


图 6-19

【例 3】 累次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$ 可写成

(A) $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y-y^2}} f(x, y) dx.$

(B) $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$

(C) $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy.$

(D) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x, y) dy.$

解 画域如图 6-20, 故选 (D).

【例 4】 计算下列累次积分

(1) $\int_0^2 dx \int_x^2 e^{-y^2} dy;$

(2) $\int_1^2 dx \int_{\sqrt{x}}^x \sin \frac{\pi x}{2y} dy + \int_2^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 \sin \frac{\pi x}{2y} dy;$

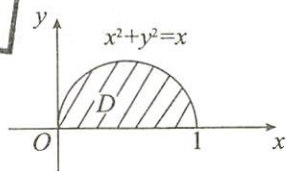


图 6-20



$$(3) \int_0^a dx \int_{-x}^{-a+\sqrt{a^2-x^2}} \frac{1}{\sqrt{4a^2-(x^2+y^2)}} dy \quad (a > 0).$$

解 以上三个积分对应的积分域如下:

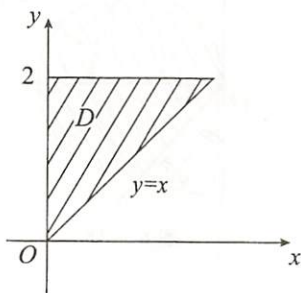


图 6-21

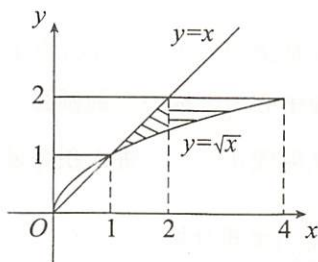


图 6-22

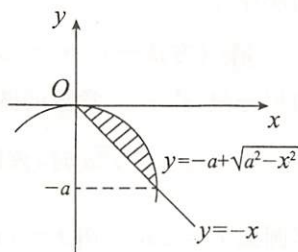


图 6-23

(1) 交换积分次序得

$$\int_0^2 dx \int_x^{2-x} e^{-y^2} dy = \int_0^2 dy \int_0^y e^{-y^2} dx = \int_0^2 ye^{-y^2} dy = -\frac{1}{2}e^{-y^2} \Big|_0^2 = \frac{1}{2}(1 - e^{-4}).$$

(2) 交换积分次序得

$$\text{原式} = \int_1^2 dy \int_y^{y^2} \sin \frac{\pi x}{2y} dx = -\frac{2}{\pi} \int_1^2 y \cos \frac{\pi y}{2} dy = -\frac{4}{\pi^2} \int_1^2 y \sin \frac{\pi y}{2} dy = \frac{4}{\pi^2} + \frac{8}{\pi^3}.$$

(3) 将原累次积分化为极坐标下先 r 后 θ 的累次积分得

$$\text{原式} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 d\theta \int_0^{-2a \sin \theta} \frac{r}{\sqrt{4a^2-r^2}} dr = \frac{\pi-2\sqrt{2}}{2}a.$$

【例 5】 设 $f(x)$ 为连续, 证明:

$$\iint_D f(x-y) dx dy = \int_{-A}^A f(t)(A-|t|) dt, \quad D: |x| \leq \frac{A}{2}, |y| \leq \frac{A}{2}$$

证明 $\iint_D f(x-y) dx dy = \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} dx \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} f(x-y) dy,$

$$\int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} f(x-y) dy = \int_{x-\frac{A}{2}}^{x+\frac{A}{2}} f(u) du \quad (\text{令 } x-y=u)$$

$$\iint_D f(x-y) dx dy = \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} dx \int_{x-\frac{A}{2}}^{x+\frac{A}{2}} f(u) du \quad (\text{交换积分次序})$$

$$= \int_{-A}^0 du \int_{-\frac{A}{2}}^{u+\frac{A}{2}} f(u) dx + \int_0^A du \int_{u-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} f(u) dx$$

$$= \int_{-A}^0 f(u)(A+u) du + \int_0^A f(u)(A-u) du$$

$$= \int_{-A}^A f(u)(A-|u|) du.$$



题型三 与二重积分有关的综合题

【例 1】 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx$, 则 $F'(2)$ 等于

- (A) $2f(2)$. (B) $f(2)$.
(C) $-f(2)$. (D) 0 .

解 (方法一) 交换积分次序得

$$F(t) = \int_1^t dx \int_1^x f(x) dy = \int_1^t (x-1)f(x) dx$$

则 $F'(t) = (t-1)f(t)$, 从而 $F'(2) = f(2)$.

故应选(B).

(方法二) 排除法 $f(t) = 1$.

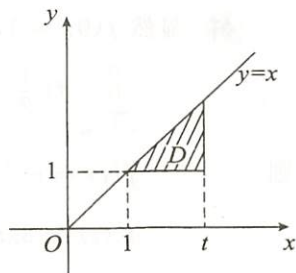


图 6-24

【例 2】 设区域 D 由 $x^2 + y^2 \leq y$ 和 $x \geq 0$ 所确定, $f(x, y)$ 为 D 上的连续函数, 且 $f(x, y) = \sqrt{1-x^2-y^2} - \frac{8}{\pi} \iint_D f(u, v) du dv$. 求 $f(x, y)$.

解 (方法一) 令 $\iint_D f(u, v) du dv = A$ ①

则 $f(x, y) = \sqrt{1-x^2-y^2} - \frac{8}{\pi} A$

将 $f(x, y) = \sqrt{1-x^2-y^2} - \frac{8}{\pi} A$ 代入 ① 式得

$$\iint_D [\sqrt{1-x^2-y^2} - \frac{8}{\pi} A] dx dy = A$$

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy - A = A$$

于是

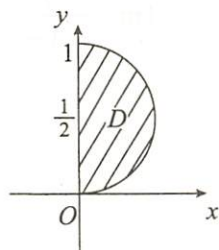


图 6-25

$$A = \frac{1}{2} \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sin \theta} \sqrt{1-r^2} r dr = \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right)$$

$$\text{故 } f(x, y) = \sqrt{1-x^2-y^2} - \frac{4}{3\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right).$$

(方法二) 等式 $f(x, y) = \sqrt{1-x^2-y^2} - \frac{8}{\pi} \iint_D f(u, v) du dv$ 两端在区域 D 上作二重积分

得

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy - \iint_D f(u, v) du dv$$

$$\text{则 } \iint_D f(x, y) dx dy = \frac{1}{2} \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy = \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right). \text{ (方法一中已算过)}$$



$$\text{故 } f(x, y) = \sqrt{1-x^2-y^2} - \frac{4}{3\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right).$$

【例 3】 设 $f(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且满足

$$f(t) = e^{4\pi t^2} + \iint_{x^2+y^2 \leq 4t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right) dx dy$$

求 $f(t)$.

解 显然 $f(0) = 1$, 且

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 4t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2t} f\left(\frac{1}{2}r\right) r dr = 2\pi \int_0^{2t} r f\left(\frac{1}{2}r\right) dr$$

$$\text{则 } f(t) = e^{4\pi t^2} + 2\pi \int_0^{2t} r f\left(\frac{1}{2}r\right) dr,$$

$$f'(t) = 8\pi t e^{4\pi t^2} + 8\pi t f(t),$$

$$f(t) = e^{\int 8\pi t dt} \left[\int 8\pi t e^{-4\pi t^2} dt + C \right] = (4\pi t^2 + C) e^{4\pi t^2}.$$

由 $f(0) = 1$ 得 $C = 1$, 因此 $f(t) = (4\pi t^2 + 1) e^{4\pi t^2}$.

【例 4】 设 $f(x, y)$ 是定义在 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ 上的连续

函数, $f(0, 0) = -1$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} dt \int_x^{\sqrt{t}} f(t, u) du}{1 - e^{-x^3}}$.

解 (方法一) 交换积分次序得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} dt \int_x^{\sqrt{t}} f(t, u) du}{1 - e^{-x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\int_0^x du \int_0^{u^2} f(t, u) dt}{x^3} \quad (1 - e^{-x^3} \sim x^3)$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \left[\int_0^{u^2} f(t, u) dt \right] du}{x^3}$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} f(t, x) dt}{3x^2}$$

(应用洛必达法则)

$$= -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 f(\xi, x)}{3x^2} \quad (0 < \xi < x^2, \text{这里应用了定积分中值定理})$$

$$= -\frac{1}{3} f(0, 0) = \frac{1}{3}.$$

(方法二) 由以上分析及二重积分中值定理知

$$\int_0^{x^2} dt \int_x^{\sqrt{t}} f(t, u) du = - \iint_D f(t, u) dt du = -f(\xi, \eta) S$$

其中 $(\xi, \eta) \in D$, S 为 D 的面积. 而

$$S = \int_0^{x^2} dt \int_{\sqrt{t}}^x du = \int_0^{x^2} (x - \sqrt{t}) dt = \frac{1}{3} x^3$$

$$\text{故 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} dt \int_x^{\sqrt{t}} f(t, u) du}{1 - e^{-x^3}} = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(\xi, \eta) \cdot \frac{1}{3} x^3}{x^3} = -\frac{f(0, 0)}{3} = \frac{1}{3}.$$

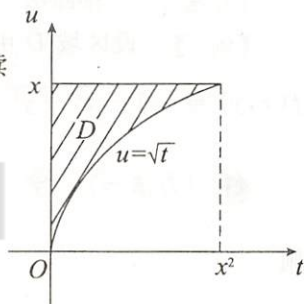


图 6-26



【例 5】 设 $f(x, y)$ 在单位圆 $x^2 + y^2 \leq 1$ 上有连续一阶偏导数, 且在边界上取值为零,

证明: $f(0, 0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{-1}{2\pi} \iint_D \frac{xf'_x + yf'_y}{x^2 + y^2} dx dy$, 其中 D 为圆环域 $\epsilon^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1$.

【证明】 从积分域和被积函数不难看出, 应在极坐标下将本题中的重积分化为累次积分.

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{xf'_x + yf'_y}{x^2 + y^2} dx dy &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\epsilon}^1 [\cos \theta f'_x(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta f'_y(r \cos \theta, r \sin \theta)] dr \\ &= \int_0^{2\pi} [f(r \cos \theta, r \sin \theta) \Big|_{\epsilon}^1] d\theta = - \int_0^{2\pi} f(\epsilon \cos \theta, \epsilon \sin \theta) d\theta \\ &= -2\pi f(\epsilon \cos \bar{\theta}, \epsilon \sin \bar{\theta}), \bar{\theta} \in [0, 2\pi], \end{aligned}$$

$$\text{则 } \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{-1}{2\pi} \iint_D \frac{xf'_x + yf'_y}{x^2 + y^2} dx dy = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f(\epsilon \cos \bar{\theta}, \epsilon \sin \bar{\theta}) = f(0, 0).$$

【例 6】 设二元函数 $f(x, y)$ 在平面区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ 上具有二阶连续偏导数, 在 D 的边界上取零值, 且在 D 上有 $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right| \leq M$, 试证:

$$\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \frac{M}{4}$$

【证明】 (方法一) 由题设知 $f(x, 0) = f(x, 1) = 0, f(0, y) = f(1, y) = 0$, 且 $f'_y(0, y) = f'_y(1, y) = 0$. 从而

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy = \int_0^1 \left[yf(x, y) \Big|_0^1 - \int_0^1 y \frac{\partial f}{\partial y} dy \right] dx \\ &= \int_0^1 y dy \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y} d(1-x) = \int_0^1 y \left[(1-x) \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_0^1 - \int_0^1 (1-x) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx \right] dy \\ &= - \iint_D y(1-x) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy. \end{aligned}$$

$$\text{则 } \left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_D \left| y(1-x) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right| dx dy \leq M \iint_D y(1-x) dx dy = \frac{M}{4}.$$

$$\text{(方法二)} \quad f(x, y) = f(x, y) - f(0, y) \quad (f(0, y) = 0)$$

$$= xf'_x(\xi, y) \quad (\text{拉格朗日中值定理})$$

$$= x[f'_x(\xi, y) - f'_x(\xi, 0)] \quad (f'_x(x, 0) = 0)$$

$$= xyf''_{xy}(\xi, \eta) \quad (\text{拉格朗日中值定理})$$

$$\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_D |xyf''_{xy}(\xi, \eta)| dx dy \leq M \iint_D xy dx dy = \frac{M}{4}$$

题型四 与二重积分有关的积分不等式问题

【例 1】 设 $I_1 = \iint_D \cos \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma, I_2 = \iint_D \cos(x^2 + y^2) d\sigma, I_3 = \iint_D \cos(x^2 + y^2)^2 d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$, 则



(A) $I_3 > I_2 > I_1$. (B) $I_1 > I_2 > I_3$. (D) $I_2 > I_1 > I_3$. (D) $I_3 > I_1 > I_2$.

解 当 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 时, $\cos x$ 是减函数, 且 $0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$ 时,

$$\sqrt{x^2 + y^2} \geq x^2 + y^2 \geq (x^2 + y^2)^2$$

则 $\cos \sqrt{x^2 + y^2} \leq \cos(x^2 + y^2) \leq \cos(x^2 + y^2)^2$,

故 $\iint_D \cos \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma < \iint_D \cos(x^2 + y^2) d\sigma < \iint_D \cos(x^2 + y^2)^2 d\sigma$,

即 $I_1 < I_2 < I_3$, 故应选(A).

【例 2】 设 $I_1 = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) d\sigma$, $I_2 = \iint_{|x|+|y| \leq 1} 2|xy| d\sigma$, $I_3 = \iint_{|x|+|y| \leq 1} (x^2 + y^2) d\sigma$, 则

(A) $I_1 < I_2 < I_3$. (B) $I_2 < I_3 < I_1$. (D) $I_3 < I_1 < I_2$. (D) $I_3 < I_2 < I_1$.

解 先比较 I_1 和 I_3 的大小, 由于 I_1 和 I_3 被积函数相同且非负, 而 I_1 的积分域包含了 I_3 的积分域, 则 $I_1 > I_3$.

再比较 I_2 和 I_3 , I_2 和 I_3 积分域相同, 但 $x^2 + y^2 \geq 2|xy|$, 则 $I_3 > I_2$.

从而有 $I_1 > I_3 > I_2$, 故应选(B).

【例 3】 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x) > 0$, 证明:

$$\int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx \geq (b-a)^2$$

证明 (方法一) 若记 $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}$, 则

$$\int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b \frac{1}{f(y)} dy = \iint_D \frac{f(x)}{f(y)} dx dy.$$

由于积分域 D 关于 $y = x$ 对称, 则

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx &= \frac{1}{2} \left[\iint_D \frac{f(x)}{f(y)} dx dy + \iint_D \frac{f(y)}{f(x)} dx dy \right] \\ &= \frac{1}{2} \iint_D \frac{f^2(x) + f^2(y)}{f(x)f(y)} dx dy \\ &= \iint_D \frac{f^2(x) + f^2(y)}{2f(x)f(y)} dx dy \geq \iint_D 1 dx dy \\ &= (b-a)^2. \end{aligned}$$

(方法二) 由柯西积分不等式得

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx &= \int_a^b (\sqrt{f(x)})^2 dx \cdot \int_a^b \left(\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\right)^2 dx \\ &\geq \left(\int_a^b \sqrt{f(x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{f(x)}} dx \right)^2 = (b-a)^2 \end{aligned}$$

【例 4】 设 $f(x)$ 是 $[0, 1]$ 上单调减的正值连续函数, 证明:

$$\frac{\int_0^1 x f^2(x) dx}{\int_0^1 x f(x) dx} \leq \frac{\int_0^1 f^2(x) dx}{\int_0^1 f(x) dx}$$



证明 (方法一) 若记 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 则

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 f^2(x) dx \int_0^1 xf(x) dx - \int_0^1 xf^2(x) dx \int_0^1 f(x) dx \\ &= \int_0^1 f^2(x) dx \cdot \int_0^1 yf(y) dy - \int_0^1 xf^2(x) dx \cdot \int_0^1 f(y) dy \\ &= \iint_D yf^2(x)f(y) dx dy - \iint_D xf^2(x)f(y) dx dy = \iint_D f^2(x)f(y)(y-x) dx dy. \end{aligned}$$

由于 D 关于 $y = x$ 对称, 则

$$I = \iint_D f^2(x)f(y)(y-x) dx dy = \iint_D f^2(y)f(x)(x-y) dx dy,$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \left[\iint_D f^2(x)f(y)(y-x) dx dy + \iint_D f^2(y)f(x)(x-y) dx dy \right] \\ &= \frac{1}{2} \iint_D f(x)f(y)(y-x)[f(x)-f(y)] dx dy. \end{aligned}$$

由于 $f(x)$ 单调减且大于零, 则 $f(x)f(y)(y-x)[f(x)-f(y)] \geq 0$, 故 $I \geq 0$. 原题得证.

(方法二) 令 $g(x) = \int_0^x tf(t) dt \cdot \int_0^x f^2(t) dt - \int_0^x tf^2(t) dt \cdot \int_0^x f(t) dt, x \in [0, 1]$, 则

$g(0) = 0$, 且

$$\begin{aligned} g'(x) &= xf(x) \int_0^x f^2(t) dt + f^2(x) \int_0^x tf(t) dt - xf^2(x) \int_0^x f(t) dt - f(x) \int_0^x tf^2(t) dt \\ &= \int_0^x xf(x)f(t)[f(t)-f(x)] dt + \int_0^x tf(x)f(t)[f(x)-f(t)] dt \\ &= \int_0^x f(x)f(t)(x-t)[f(t)-f(x)] dt \geq 0, \end{aligned}$$

则 $g(x) \geq g(0) = 0, x \in [0, 1]$, 从而 $g(1) \geq 0$, 原题得证.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



第七章 无穷级数

考试内容	考试要求	
	数一	数三
几何级数及 p 级数的收敛与发散的条件 正项级数收敛性的比较判别法和比值判别法 根式判别法	掌握	掌握
任意项级数绝对收敛与条件收敛的概念以及绝对收敛与收敛的关系 幂级数在其收敛区间内的基本性质(和函数的连续性、逐项求导和逐项积分)	了解	了解
幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域的求法	掌握	掌握
常数项级数收敛、发散以及收敛级数的和的概念	理解	理解
级数的基本性质及收敛的必要条件 交错级数的莱布尼茨判别法	掌握	掌握
函数项级数的收敛域及和函数的概念	了解	
幂级数收敛半径的概念	理解	
一些幂级数在收敛区间内的和函数,并会由此求出某些数项级数的和	会求	会求
$e^x, \sin x, \cos x, \ln(1+x)$ 及 $(1+x)^\alpha$ 的麦克劳林(Maclaurin)展开式,会用它们将一些简单函数间接展开为幂级数	掌握	掌握
傅里叶级数的概念和狄利克雷收敛定理	了解	
将定义在 $[-l, l]$ 上的函数展开为傅里叶级数 将定义在 $[0, l]$ 上的函数展开为正弦级数与余弦级数 写出傅里叶级数的和函数的表达式	会	
积分判别法	会用	会用



第一节 常数项级数

一、考试内容要点精讲

(一) 级数的概念与性质

1. 级数的概念

设 $\{u_n\}$ 是一数列, 则表达式 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ 称为**无穷级数**, 简称**级数**.

$s_n = \sum_{i=1}^n u_i$ 称为级数的**部分和**. 若部分和数列 $\{s_n\}$ 有极限 s , 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **收敛**, 并称

这个极限值 s 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的**和**, 记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$. 如果极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ 不存在, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **发散**.

2. 级数的性质

1) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 s , 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} k u_n$ 也收敛, 且其和为 ks .

2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 分别收敛于 s, σ , 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 收敛于 $s \pm \sigma$.

【注】 ① 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 必发散;

② 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 敛散性不定.

3) 在级数中去掉、加上或改变有限项, 不会改变级数的敛散性.

4) 收敛级数加括号仍收敛且和不变.

【注】 ① 若级数加括号以后收敛, 原级数不一定收敛;

② 若级数加括号以后发散, 则原级数一定发散.

5) (级数收敛的必要条件) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

【注】 ① 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 不一定收敛;

② 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 一定发散.

(二) 级数的审敛准则

1. 正项级数

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n, u_n \geq 0 \right)$$



基本定理: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow s_n$ 有界.

1) 比较判别法:

设 $u_n \leq v_n$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛}; \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 发散} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 发散}.$$

2) 比较法极限形式:

$$\text{设 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l (0 \leq l \leq +\infty),$$

① 若 $0 < l < +\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同敛散;

② 若 $l = 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散;

③ 若 $l = +\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛.

【注】 使用比较法和比较法的极限形式时, 需要适当的选择一个已知其敛散性的级数作为比较的基准. 最常用的是 p 级数和等比级数.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad \text{当 } p > 1 \text{ 时收敛, 当 } p \leq 1 \text{ 时发散.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^n \quad \text{当 } q < 1 \text{ 时收敛, 当 } q \geq 1 \text{ 时发散, 其中 } a \text{ 和 } q \text{ 为正数.}$$

3) 比值法:

$$\text{若 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho, \text{ 则 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \begin{cases} \text{收敛,} & \rho < 1 \\ \text{发散,} & \rho > 1. \\ \text{不一定,} & \rho = 1 \end{cases}$$

4) 根值法:

$$\text{若 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho, \text{ 则 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \begin{cases} \text{收敛,} & \rho < 1 \\ \text{发散,} & \rho > 1. \\ \text{不一定,} & \rho = 1 \end{cases}$$

5) 积分判别法:

设 $f(x)$ 是 $[1, +\infty)$ 上单调减, 非负连续函数, 且 $a_n = f(n)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 同敛散.

笔记:



2. 交错级数

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n, u_n > 0 \right)$$

莱布尼茨准则 若: (1) u_n 单调减; (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 收敛.

【注】 $\{u_n\}$ 单调减, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 收敛的充分条件, 但非必要条件. 如

交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n+(-1)^n}}$ 收敛, 但 $u_n = \frac{1}{2^{n+(-1)^n}}$ 并不单调递减.

3. 任意项级数

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n, u_n \text{ 为任意实数} \right)$$

1) 绝对收敛与条件收敛概念

① 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必收敛, 此时称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **绝对收敛**;

② 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 此时称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **条件收敛**.

2) 绝对收敛和条件收敛的基本结论

① 绝对收敛的级数一定收敛, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

② 条件收敛的级数的所有正项(或负项)构成的级数一定发散.

即 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n + |u_n|}{2}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n - |u_n|}{2}$ 发散.

二、常考题型的方法与技巧

题型一 正项级数敛散性的判定

【例 1】 判定下列级数的敛散性.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{na}{n+1} \right)^n \quad (a > 0).$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n} \quad (a > 0).$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{\sqrt{\pi}}{n}).$$

$$(4) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n} \quad (p > 0).$$

解 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na}{n+1} = a$, 则

① 当 $0 < a < 1$ 时, 原级数收敛;

② 当 $a > 1$ 时, 原级数发散;

③ 当 $a = 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{e} \neq 0$, 原级数发散.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{a^n n!} = a \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{a}{e}$, 则



① 当 $0 < a < e$ 时, 原级数收敛;

② 当 $a > e$ 时, 原级数发散;

③ 当 $a = e$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{(1 + \frac{1}{n})^n} = 1$, 但 $(1 + \frac{1}{n})^n$ 是单调增趋于 e 的,

则 $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e}{(1 + \frac{1}{n})^n} > 1$, 即 u_n 单调增, 又 $u_n > 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, 原级数发散.

(3) 由于 $1 - \cos \frac{\sqrt{\pi}}{n} \sim \frac{1}{2} \frac{\pi}{n^2} \quad (n \rightarrow \infty)$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 则原级数收敛.

(4) 令 $f(x) = \frac{1}{x \ln^p x} (x \geq 2)$, 显然 $f(x)$ 是 $[2, +\infty)$ 上单调减, 非负, 连续函数, 且

$a_n = \frac{1}{n \ln^p n} = f(n)$, 则级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$ 与反常积分 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^p x}$ 同敛散.

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^p x} \stackrel{\ln x = t}{=} \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^p}$$

则原级数在 $p > 1$ 时收敛, 在 $p \leq 1$ 时发散.

【例 2】 判定下列级数敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$. (2) $\sum_{n=1}^{\infty} (n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1)$. (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln(1 + \frac{1}{n}) \right)$.

解

(1) 由于

$$0 < \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx \leq \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 则原级数收敛.

(2) 由于 $n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1 = e^{\frac{\ln n}{n^2+1}} - 1 \sim \frac{\ln n}{n^2+1} < \frac{\ln n}{n^2} < \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, 故原级数收敛.

(3) **(方法一)** 由泰勒公式知

$$\ln(1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

则 $\frac{1}{n} - \ln(1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{2n^2} - o(\frac{1}{n^2}) \sim \frac{1}{2n^2}$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$ 收敛, 则原级数收敛.

(方法二) 由不等式 $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x (x > 0)$ 知

$$0 < \frac{1}{n} - \ln(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n} - \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 则原级数收敛.



【例 3】 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{2n \sin \frac{1}{n}} \cdot u_n = 1$, 试讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性.

解 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{2n \sin \frac{1}{n}} \cdot u_n = 1 > 0$ 知, n 充分大时 $u_n > 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n^{2n \sin \frac{1}{n}}}} = 1$, 则

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2n \sin \frac{1}{n}}}$ 同敛散.

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n \sin \frac{1}{n}) = 2$, 则当 n 充分大时有 $2n \sin \frac{1}{n} > \frac{3}{2}$, 从而有 $\frac{1}{n^{2n \sin \frac{1}{n}}} < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

【例 4】 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 下列结论正确的是

(A) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(B) 若存在非零常数 λ , 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} n u_n = \lambda$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

(C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 u_n = 0$.

(D) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则存在非零常数 λ , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} n u_n = \lambda$.

解 (方法一) 直接法

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} n u_n = \lambda \neq 0$ 知, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n}} = \lambda \neq 0$, 由比较法的极限形式知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 同

敛散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 故应选(B).

(方法二) 排除法

考虑 $u_n = \frac{1}{n \ln n}$, 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ 发散. 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} n u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} = 0$, 则(A)和(D)都不正确.

考虑 $u_n = \frac{1}{n^2}$, 显然级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 u_n = 1 \neq 0$, 则(C)不正确.

故应选(B).

题型二 交错级数敛散性判定

【例 1】 判定下列级数的敛散性

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{\sqrt{n}}$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + a^2})$.



解 (1) 本题中的级数为交错级数, 且 $u_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$, 因此考虑函数 $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

由于
$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} \quad (x > 0)$$
$$= \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} < 0 \quad (x > e^2),$$

又
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} \quad (\text{洛必达法则})$$
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0,$$

故 $u_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ 单调减且趋于零, 由莱布尼茨准则知原级数收敛.

(2) 由于

$$\sin(\pi \sqrt{n^2 + a^2}) = \sin[n\pi + (\pi \sqrt{n^2 + a^2} - n\pi)] = (-1)^n \sin(\pi \sqrt{n^2 + a^2} - n\pi)$$
$$= (-1)^n \sin \frac{a^2 \pi}{\sqrt{n^2 + a^2} + n},$$

此时 $\sin \frac{a^2 \pi}{\sqrt{n^2 + a^2} + n}$ 单调减且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{a^2 \pi}{\sqrt{n^2 + a^2} + n} = 0$, 由莱布尼茨准则知原级数收敛.

【例 2】 设正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 发散, 试问级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n + 1}\right)^n$ 是否收敛? 为什么?

解 由于 a_n 单调减, 且 $a_n > 0$, 即有下界, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 $a \geq 0$. 若 $a = 0$, 由莱布尼茨准则知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛, 这与题设矛盾, 因此 $a > 0$. 此时, 对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n + 1}\right)^n$ 用根值法, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{a_n + 1} = \frac{1}{a + 1} < 1$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a_n + 1)^n}$ 收敛.

题型三 任意项级数敛散性判定

【例 1】 判定 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \tan \frac{\pi}{2^n} \sin(n!)$ 的敛散性.

解 因 $|n^2 \tan \frac{\pi}{2^n} \sin(n!)| \leq n^2 \tan \frac{\pi}{2^n}$, 又 $\tan \frac{\pi}{2^n} \sim \frac{\pi}{2^n}$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \tan \frac{\pi}{2^n}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi}{2^n}$ 同



敛散.

对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ 用根值法得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2} = \frac{1}{2} < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ 收敛, 则原级数绝对收敛, 故原级数收敛.

【例 2】 讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n n^p}$ 是绝对收敛, 条件收敛还是发散?

解 先考虑绝对值级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{a^n n^p} \right|$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{a^{n+1}(n+1)^p} \right| \cdot |a^n n^p| = \frac{1}{|a|}$$

1) 当 $|a| > 1$ 时, 原级数绝对收敛;

2) 当 $0 < |a| < 1$ 时, 原级数发散,

由于 $\frac{1}{|a|} > 1$, 当 n 充分大时, $\left| \frac{1}{a^{n+1}(n+1)^p} \right| > \left| \frac{1}{a^n n^p} \right|$, 则 $\left| \frac{1}{a^n n^p} \right| \nrightarrow 0$, 从而 $\frac{1}{a^n n^p} \nrightarrow 0$, 故级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n n^p}$ 发散;

3) 当 $|a| = 1$ 时,

若 $a = 1$, 原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p > 1$ 时绝对收敛, $p \leq 1$ 时发散;

若 $a = -1$, 原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$, 该级数在 $p > 1$ 时绝对收敛; 在 $0 < p \leq 1$ 时条件收敛;

在 $p \leq 0$ 时发散.

【例 3】 设常数 $k > 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k+n}{n^2}$

(A) 发散.

(B) 绝对收敛.

(C) 条件收敛.

(D) 收敛与发散与 k 取值有关.

解 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k+n}{n^2} = k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

显然 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ 绝对收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 条件收敛, 则原级数条件收敛, 故应选 (C).

【注】 这里有几个常用结论:

1) 绝对收敛 $\pm$ 条件收敛 = 条件收敛;

2) 绝对收敛 $\pm$ 绝对收敛 = 绝对收敛;

3) 条件收敛 $\pm$ 条件收敛 = 条件收敛或绝对收敛.

【例 4】 设常数 $\lambda > 0$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{|a_n|}{\sqrt{n^2 + \lambda}}$

(A) 发散.

(B) 条件收敛.

(C) 绝对收敛.

(D) 敛散性与 λ 有关.

解 由不等式 $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ 知



$$\left| (-1)^n \frac{|a_n|}{\sqrt{n^2 + \lambda}} \right| = \frac{|a_n|}{\sqrt{n^2 + \lambda}} \leq \frac{1}{2} \left(a_n^2 + \frac{1}{n^2 + \lambda} \right)$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \lambda}$ 都收敛, 则原级数绝对收敛, 故应选(C).

【例 5】 设 $0 \leq a_n < \frac{1}{n} (n = 1, 2, \dots)$, 则下列级数中肯定收敛的是

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(B) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$.

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$.

(D) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n^2$.

解 (方法一) 直接法

由 $0 \leq a_n < \frac{1}{n}$ 知 $|(-1)^n a_n^2| = a_n^2 < \frac{1}{n^2}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n^2$ 肯定收敛, 故应选(D).

(方法二) 排除法

1) 取 $a_n = \frac{1}{2n}$, 显然 $0 < a_n < \frac{1}{n}$, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散, 则

(A) 和 (C) 不正确.

2) 取 $a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & \text{当 } n \text{ 为奇数} \\ \frac{1}{2n}, & \text{当 } n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 显然有 $0 \leq a_n < \frac{1}{n}$, 但

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{8} - \dots - \frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{1}{4n} - \dots$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n-1}}$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 发散, 则(B) 不正确.

故应选(D).

【例 6】 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则下列级数必收敛的为

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{u_n}{n}$.

(B) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$.

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$.

(D) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})$.

解 (方法一) 直接法

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1}$ 也收敛. 从而有 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})$ 收敛, 故应选(D).

(方法二) 排除法

1) 取 $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln n}$, 由交错级数的莱布尼茨准则知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 但 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{u_n}{n} =$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ 发散. 则(A) 不正确.

2) 取 $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$, 显然 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 则(B) 不正确. 而



$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}} + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right)$$

由于 $\frac{1}{\sqrt{2n-1}} + \frac{1}{\sqrt{2n}} \geq \frac{1}{\sqrt{2n}} + \frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ 发散, (C) 不正确, 故应选(D).

【例 7】 设 $u_n \neq 0 (n = 1, 2, \dots)$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{u_n} = 1$, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \right)$$

(A) 发散.

(B) 绝对收敛.

(C) 条件收敛.

(D) 敛散性不定.

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1} \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{u_n} + \frac{n}{u_{n+1}} \right) = 2 \neq 0,$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \right) \right|$ 发散.

由 $u_n \neq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{u_n} = 1$ 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{u_n} \cdot \frac{1}{n} = 0$. 令

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left(\frac{1}{u_k} + \frac{1}{u_{k+1}} \right) \\ &= \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} \right) - \left(\frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} \right) + \left(\frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} \right) - \cdots + (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \right) \\ &= \frac{1}{u_1} + \frac{(-1)^{n+1}}{u_{n+1}}, \end{aligned}$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{u_1}$. 由级数定义知原级数收敛, 故原级数条件收敛.

故应选(C).

【注】 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{u_n} = 1$ 得, $(-1)^{n-1} \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \right) \sim (-1)^{n-1} \frac{2}{n}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2}{n}$ 条件收敛, 得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \right)$ 条件收敛, 这是一种“经典错误”. 这是因为等价无穷小代换只适用正项级数.

【例 8】 设 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n 2^n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

(A) 条件收敛.

(B) 绝对收敛.

(C) 发散.

(D) 敛散性不定.

解 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n 2^n$ 收敛, 由级数收敛的必要条件知 $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n a_n 2^n = 0$, 则数列

$(-1)^n a_n 2^n$ 有界, 即存在 $M > 0$, 对一切的 n 有 $|(-1)^n a_n 2^n| \leq M$, 从而有 $|a_n| \leq \frac{M}{2^n}$.



而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{2^n}$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 故应选(B).

题型四 证明题与综合题

【例1】 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 绝对收敛.

【证明】 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$ 收敛, 则其部分和数列

$$s_n = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_1$$

有极限, 从而数列 $\{a_n\}$ 收敛, 由于收敛数列必有界, 则存在 $M > 0$, 使 $|a_n| \leq M (n = 1, 2, \cdots)$, 从而有 $|a_n b_n| \leq M |b_n|$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ 收敛, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 绝对收敛.

【例2】 设极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n$ 存在, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛.

【证明】 (方法一) 由于极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n$ 存在, 则数列 $\{n a_n\}$ 有界, 即存在 $M > 0$, 使 $|n a_n| \leq M$, 从而有 $|a_n| \leq \frac{M}{n}$, 因此 $a_n^2 \leq \frac{M^2}{n^2}$. 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M^2}{n^2}$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛.

(方法二) 由于极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n$ 存在, 不妨设为 l , 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = l$, 从而有 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n^2 = l^2$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2}{\frac{1}{n^2}} = l^2$. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛.

【例3】 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $|f'(x)| \leq h < 1$, 对一切 $x \in [a, b]$, 有 $a \leq f(x) \leq b$, 令 $u_n = f(u_{n-1}) (n = 1, 2, \cdots)$, 其中 $u_0 \in [a, b]$, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1} - u_n)$ 绝对收敛.

【证明】 由于

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - u_n| &= |f(u_n) - f(u_{n-1})| = |f'(\xi_1)| |u_n - u_{n-1}| \\ &\leq h |u_n - u_{n-1}| \\ &\leq h^2 |u_{n-1} - u_{n-2}| \leq \cdots \leq h^n |u_1 - u_0| \end{aligned}$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} h^n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1} - u_n)$ 绝对收敛.

【注】 类似的

已知函数 $f(x)$ 可导, 且 $f(0) = 1, 0 < f'(x) < \frac{1}{2}$. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1} = f(x_n) (n = 1, 2, \cdots)$. 证明:

(I) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (x_{n+1} - x_n)$ 绝对收敛;

(II) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 且 $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} x_n < 2$.

【例4】 设 $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n}) (n = 1, 2, \dots)$, 证明

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1)$ 收敛.

证明 (1) 因为 $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n}) \geq \sqrt{a_n \cdot \frac{1}{a_n}} = 1$, 则 a_n 下有界.

又 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{a_n^2}) \leq \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{1}) = 1$, 则 $\{a_n\}$ 单调减, 由数列单调有界准则知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在.

(2) 由(1)知 $0 \leq \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1}} \leq a_n - a_{n+1}$.

记 $s_n = \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1}$, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ 存在, 即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ 收敛, 由比较判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1)$ 收敛.

【例5】 设有方程 $x^n + nx - 1 = 0$, 其中 n 为正整数, 证明此方程存在唯一正实根 x_n , 并证明当 $a > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^a$ 收敛.

证明 令 $f_n(x) = x^n + nx - 1$, 当 $x > 0$ 时, $f'_n(x) = nx^{n-1} + n > 0$, 则 $f_n(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调增. 而 $f_n(0) = -1 < 0, f_n(1) = n > 0$, 由此可知方程 $x^n + nx - 1 = 0$ 存在唯一正实根 x_n . 由 $x_n^n + nx_n - 1 = 0$ 及 $x_n > 0$ 知

$$0 < x_n = \frac{1 - x_n^n}{n} < \frac{1}{n} \Rightarrow 0 < x_n^a < \frac{1}{n^a}$$

当 $a > 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ 收敛, 由比较判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^a$ 收敛.

【例6】 设 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 的某邻域内具有二阶连续导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ 绝对收敛.

证明 (方法一) 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, 则 $f(0) = 0$, 且

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$$

由泰勒公式可知

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\theta x)}{2!}x^2 = \frac{f''(\theta x)}{2!}x^2 \quad (0 < \theta < 1)$$

由题设可知 $f''(x)$ 在包含原点的某个闭区间 $[-\delta, \delta] (\delta > 0)$ 上连续, 则存在 $M > 0$, 使 $|f''(\theta x)| \leq M (x \in [-\delta, \delta])$. 令 $x = \frac{1}{n}$, 当 n 充分大时, 有 $|f(\frac{1}{n})| \leq \frac{M}{2} \frac{1}{n^2}$. 因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ 绝对收敛.



(方法二) 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 且

$$0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$$

又 $f''(x)$ 连续, 由洛必达法则知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{2} = \frac{f''(0)}{2}$$

从而有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right|}{\frac{1}{n^2}} = \frac{|f''(0)|}{2}$. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right|$ 收敛, 即级数

$\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

第二节 幂级数

一、考试内容要点精讲

(一) 收敛半径、收敛区间、收敛域

定义 1 形如 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$

或者 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + \cdots + a_n (x - x_0)^n + \cdots$

的函数项级数称为**幂级数**.

定理 1 (阿贝尔定理)

(1) 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 当 $x = x_0 (x_0 \neq 0)$ 时收敛, 则当 $|x| < |x_0|$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛;

(2) 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 当 $x = x_0$ 时发散, 则当 $|x| > |x_0|$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散.

定理 2 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛性有且仅有以下三种可能:

(1) 对任何 $x \in (-\infty, +\infty)$ 都收敛;

(2) 仅在 $x = 0$ 处收敛;

(3) 存在一个正数 R , 当 $|x| < R$ 时绝对收敛, 当 $|x| > R$ 时发散.

定义 2 定理 2 中的正数 R 称为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的**收敛半径**. 开区间 $(-R, R)$ 称为它的

收敛区间. 再考察 $x = \pm R$ 时 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛性, 可得出该级数收敛点的全体, 称之为**收敛域**.

定理 3 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$, 则 $R = \frac{1}{\rho}$.



定理 4 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$, 则 $R = \frac{1}{\rho}$.

(二) 幂级数的性质

1. 有理运算性质

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R_1 , $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径为 R_2 , 令 $R = \min\{R_1, R_2\}$, 则有

$$(1) \text{ 加法: } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n, \quad x \in (-R, R).$$

$$(2) \text{ 减法: } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) x^n, \quad x \in (-R, R).$$

$$(3) \text{ 乘法: } \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) \\ = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \cdots + \\ (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) x^n + \cdots, \quad x \in (-R, R).$$

$$(4) \text{ 除法: } \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad x \in (-R, R).$$

其中系数 $c_n (n = 0, 1, 2, \cdots)$ 由 $\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 所确定.

2. 分析性质

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R , 和函数为 $S(x)$, 则

(1) 连续性: $S(x)$ 在收敛域上连续.

(2) 可导性: $S(x)$ 在收敛区间 $(-R, R)$ 内可导, 且可逐项求导, 即

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

求导后的幂级数与原幂级数有相同的收敛半径.

(3) 可积性: $S(x)$ 在收敛域上可积, 且可逐项积分, 即

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}$$

积分后的幂级数与原幂级数有相同的收敛半径.

(三) 函数的幂级数展开

定义 1 设函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 上有定义, 若

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

对任意的 $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ 都成立, 则称函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 上能展开为 $x - x_0$ 的幂级数.



由幂级数的性质可知,如果函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 上能展开为 $x - x_0$ 的幂级数,那么, $f(x)$ 在区间 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 上任意阶可导. 此时有两个问题

1) 展开式唯一吗?

2) 展开式是什么?

定理 1 如果函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 上能展开为 $x - x_0$ 的幂级数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

那么, $f(x)$ 在区间 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 上任意阶可导,且其展开式是唯一的,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (n = 0, 1, 2, \dots)$$

定义 2 若函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处任意阶可导,则称幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

为 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的**泰勒级数**.

特别地, $x_0 = 0$ 处的泰勒级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ 称为函数 $f(x)$ 的**麦克劳林级数**.

定理 2 设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处任意阶可导,则 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ 在 $(x_0 - R, x_0 + R)$

上收敛于 $f(x) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$, 其中 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$ 为 $f(x)$ 在 x_0 处的泰勒公式

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x)$$

中的余项.

几个常用的展开式

$$(1) \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (-1 < x < 1)$$

$$(2) \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (-1 < x < 1)$$

$$(3) e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$(4) \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$(5) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$(6) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \quad (-1 < x \leq 1)$$

$$(7) (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \quad (-1 < x < 1)$$



函数展开为幂级数的两种方法

1) 直接展开法

直接展开法分以下两步进行:

第一步 求出 $f(x)$ 在 x_0 处的各阶导数 $f^{(n)}(x_0)$, 并写出 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的泰勒级

$$数 f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n;$$

第二步 考察 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} = 0$ 是否成立.

2) 间接展开法

根据函数展开为幂级数的唯一性, 从某些已知函数的展开式出发, 利用幂级数的性质 (四则运算, 逐项求导, 逐项积分) 及变量代换等方法, 求得所给函数的展开式.

【注】 直接展开法分两步, 但这两步都比较困难, 主要用于一开始推导一些基本展开式 (如 $e^x, \sin x$); 有了一些基本展开式后, 主要用间接展开法.

二、常考题型的方法与技巧

题型一 求收敛区间及收敛域

求收敛区间或收敛域的关键是求收敛半径 R , 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ 的收敛半径常用的有以下两种方法

1) 利用公式 (一般用于系数 a_n 已给出)

$$\text{若 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho, \text{ 则 } R = \frac{1}{\rho};$$

$$\text{若 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho, \text{ 则 } R = \frac{1}{\rho}.$$

2) 利用阿贝尔定理 (一般用于系数 a_n 未给出)

【例 1】 求下列幂级数的收敛域

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n} x^n}{n!}.$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x-1)^n.$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n} (x-1)^{2n}.$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3 + (-1)^n]^n}{n} x^n.$$

解 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 0$, 则 $R = +\infty$.

故原幂级数收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.



$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{3^n + (-2)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}{3^n + (-2)^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - 2(-\frac{2}{3})^n}{1 + (-\frac{2}{3})^n} = 3.$$

$$\text{或} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{3^n + (-2)^n}}{\sqrt[n]{n}} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + (-\frac{2}{3})^n} = 3.$$

$$\text{则 } R = \frac{1}{3}.$$

当 $x-1 = \frac{1}{3}$ 时, 原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-\frac{2}{3})^n \frac{1}{n}$, 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} (-\frac{2}{3})^n \frac{1}{n}$ 收敛, 则原幂级数在 $x-1 = \frac{1}{3}$ 处发散.

当 $x-1 = -\frac{1}{3}$ 时, 原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \frac{(-1)^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\frac{2}{3})^n$, 则原幂级数在 $x-1 = -\frac{1}{3}$ 处收敛, 故原幂级数收敛域为 $[\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$.

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2}, \text{ 由于该幂级数只有偶次项, 则 } R = \sqrt{2}.$$

当 $x-1 = \pm\sqrt{2}$ 时, 原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$ 发散. 则原幂级数收敛域为 $(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$.

【注】 对于只有偶次项 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^{2n}$ 或只有奇次项 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^{2n+1}$ 的幂级数求收敛半径有以下结论

$$\textcircled{1} \text{ 若 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho, \text{ 则 } R = \sqrt{\frac{1}{\rho}};$$

$$\textcircled{2} \text{ 若 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho, \text{ 则 } R = \sqrt{\frac{1}{\rho}}.$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + (-1)^n}{\sqrt[n]{n}} \text{ 不存在, 而}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[3 + (-1)^{n+1}]^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{[3 + (-1)^n]^n}$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$, 且 $\frac{[3 + (-1)^{n+1}]^{n+1}}{[3 + (-1)^n]^n} = \begin{cases} 2^{n+2}, & n \text{ 为奇数} \\ (\frac{1}{2})^{n-1}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ 不存在, 不能用

公式求收敛半径, 要改用其它方法. 注意到

$$u_n = \frac{[3 + (-1)^n]^n}{n} = \begin{cases} \frac{4^n}{n}, & n \text{ 为偶数} \\ \frac{2^n}{n}, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$



因此,分别考虑该级数奇次项和偶次项构成的两个幂级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k-1}}{2k-1} x^{2k-1}$ 和 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^{2k}}{2k} x^{2k}$.

容易求得幂级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k-1}}{2k-1} x^{2k-1}$ 的收敛半径 $R_1 = \frac{1}{2}$, 而幂级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^{2k}}{2k} x^{2k}$ 的收敛半径 $R_2 = \frac{1}{4}$, 则原幂级数收敛半径为 $\frac{1}{4}$.

当 $x = \pm \frac{1}{4}$ 时, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k-1}}{2k-1} x^{2k-1}$ 收敛, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^{2k}}{2k} x^{2k}$ 发散, 则原幂级数发散, 故原幂级数收敛域为 $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

【例 2】 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x=0$ 收敛, 在 $x=2$ 发散, 则该幂级数收敛域为 _____.

解 由于幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x=0$ 处收敛, 在 $x=2$ 处发散, 由阿贝尔定理知

当 $|x-1| < |0-1|$, 即 $|x-1| < 1$, 原幂级数收敛; 当 $|x-1| > |2-1|$, 即 $|x-1| > 1$, 原幂级数发散. 则该幂级数收敛域为 $[0, 2)$.

【例 3】 设 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n}$ 在 $x=-2$ 处条件收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (x-a)^n$ 在 $x = \ln \frac{1}{2}$ 处

(A) 绝对收敛.

(B) 条件收敛.

(C) 必发散.

(D) 敛散性由 a 确定.

解 应选 (A).

显然 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n}$ 的收敛半径为 1. 由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n}$ 在 $x=-2$ 处条件收敛知, $a=-3$ 或 $a=-1$, 但 $a=-3$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n}$ 在 $x=-2$ 处条件收敛矛盾, 则 $a=-1$. 而 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (x-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (x+1)^n$ 的收敛半径为 1, 收敛区间为 $(-2, 0)$, 又 $\ln \frac{1}{2} \in (-2, 0)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (x-a)^n$ 在 $x = \ln \frac{1}{2}$ 处绝对收敛.

题型二 将函数展开为幂级数

常用方法:

1) 直接展开法

2) 间接展开法

一般都是用间接展开法.

【例 1】 将下列函数展开为 x 的幂级数.

(1) $f(x) = \frac{3x}{2+x^2}$;

(2) $f(x) = \frac{12-5x}{6-5x-x^2}$;



$$(3) f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x};$$

$$(4) f(x) = x \arctan x - \ln \sqrt{1+x^2};$$

$$(5) f(x) = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \arctan x - x;$$

$$(6) f(x) = \ln(1-x-2x^2);$$

$$(7) f(x) = \ln(1+x+x^2+x^3+x^4).$$

解

$$(1) f(x) = \frac{3x}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x^2}{2}} = \frac{3x}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x^2}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3x^{2n+1}}{2^{n+1}}, x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

$$\begin{aligned} (2) f(x) &= \frac{6}{x+6} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{1+\frac{x}{6}} + \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{6}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{6^n} + 1\right) x^n, x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

$$(3) f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, x \in (-1, 1).$$

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},$$

$$\text{又 } f(0) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}, \text{ 则 } f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, x \in [-1, 1].$$

$$(4) \arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},$$

$$\ln \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n},$$

$$\begin{aligned} \text{则 } f(x) &= x \arctan x - \ln \sqrt{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{2n+1} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}, x \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

$$(5) f(x) = \frac{1}{4} (\ln(1+x) - \ln(1-x)) + \frac{1}{2} \arctan x - x,$$

$$f'(x) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) + \frac{1}{2(1+x^2)} - 1 = \frac{1}{1-x^4} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} x^{4n},$$

$$f(x) = \int_0^x f'(t) dt + f(0) = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} t^{4n} \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}, x \in (-1, 1).$$

$$(6) f(x) = \ln[(1+x)(1-2x)] = \ln(1+x) + \ln(1-2x)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (-2x)^n}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} [1 + (-2)^n] x^n}{n}, x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 (7) f(x) &= \ln(1+x+x^2+x^3+x^4) = \ln \frac{1-x^5}{1-x} = \ln(1-x^5) - \ln(1-x) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(-x^5)^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(-x)^n}{n} \\
 &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{5n}}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, x \in [-1, 1).
 \end{aligned}$$

【例 2】 将下列函数在指定点处展开为幂级数.

(1) $f(x) = \sin x$ 在 $x = \frac{\pi}{4}$ 处; (2) $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$ 在 $x = 1$ 处;

(3) $f(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$ 在 $x = -1$ 处.

解 (1) $f(x) = \sin x = \sin[(x - \frac{\pi}{4}) + \frac{\pi}{4}] = \frac{\sqrt{2}}{2}[\sin(x - \frac{\pi}{4}) + \cos(x - \frac{\pi}{4})]$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x - \frac{\pi}{4})^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x - \frac{\pi}{4})^{2n}}{(2n)!} \right], x \in (-\infty, +\infty).$$

(2) $f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2+(x-1)} - \frac{1}{3+(x-1)}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x-1}{2}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{x-1}{3}} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x-1}{2}\right)^n - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x-1}{3}\right)^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right) (x-1)^n \quad (-1 < x < 3).
 \end{aligned}$$

(3) $f(x) = -\left(\frac{1}{x+2}\right)' = -\left(\frac{1}{1+(x+1)}\right)' = -\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x+1)^n\right)'$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n (x+1)^{n-1} \quad (-2 < x < 0).$$

【例 3】 将 $f(x) = x^2 \ln(1+x)$ 展开为 x 的幂级数, 并求 $f^{(n)}(0) (n > 2)$.

解 $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, x \in (-1, 1)$, 则

$$f(x) = x^2 \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{n+2}}{n}$$

于是 $x^n (n > 2)$ 项系数 $a_n = \frac{(-1)^{n-3}}{n-2} = \frac{(-1)^{n-1}}{n-2}$, 从而有 $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n-2}$, 即 $f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^{n-1} n!}{n-2}$.

【例 4】 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, 求 $f^{(n)}(0)$.

解 由于 $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, 则 $f(x) = \frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$.



于是 $a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} = \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}$, 从而 $f^{(2n)}(0) = \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

又 $a_{2n+1} = 0$, 从而 $f^{(2n+1)}(0) = 0$.

题型三 级数求和

级数求和常见的是两种问题, 幂级数求和及常数项级数求和.

1) 幂级数求和的方法:

利用已有的几个展开式 ($\frac{1}{1 \pm x}$, e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^a$) 以及幂级数的性质 (有理运算, 逐项求导, 逐项积分) 来求幂级数的和函数;

2) 常数项级数求和的方法:

求常数项级数的和最常用的方法是借助于幂级数求和. 常见的求和级数形式为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b^n$, 此时, 考虑相应的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 并求出其和函数 $S(x)$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b^n = S(b)$.

【例 1】求下列幂级数的和函数

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}.$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}.$$

$$(3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n n!} x^n.$$

$$(4) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

【解】(1) 易求得该幂级数收敛域为 $[-1, 1]$.

令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$, $x \in [-1, 1]$. 当 $x = 0$ 时, $S(x) = 0$.

当 $0 < |x| < 1$ 时,

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = -\ln(1-x) - \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ &= -\ln(1-x) - \frac{1}{x} [-\ln(1-x) - x] = 1 + \left(\frac{1}{x} - 1\right) \ln(1-x). \end{aligned}$$

$$S(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} S(x) = 1 + \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \left(\frac{1}{x} - 1\right) \ln(1-x) = 1 - 2\ln 2$$

$$S(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = 1 + \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{x} - 1\right) \ln(1-x) = 1 + \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \ln(1-x) = 1$$

$$\text{故 } S(x) = \begin{cases} 1 + \left(\frac{1}{x} - 1\right) \ln(1-x), & -1 \leq x < 1 \text{ 且 } x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

【注】 本题用到 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$, 这是一个常用的结论, 望读者记住.



(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2n-1}}{2} = \frac{1}{2}$, 则 $R = \sqrt{2}$. 当 $x = \pm\sqrt{2}$ 时, 原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2}$

发散. 则原级数收敛域为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}$, $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. 当 $x = 0$ 时, $S(x) = \frac{1}{2}$.

当 $0 < |x| < \sqrt{2}$ 时,

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2^n} \right)' = \left(\frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n} \right)' = \left(\frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{2} \right)^n \right)' \\ &= \left[\frac{1}{x} \cdot \frac{\frac{x^2}{2}}{1 - \frac{x^2}{2}} \right]' = \left(\frac{x}{2 - x^2} \right)' = \frac{2 + x^2}{(2 - x^2)^2} \end{aligned}$$

故 $S(x) = \frac{2 + x^2}{(2 - x^2)^2}$, $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

$$\begin{aligned} (3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n n!} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{n!} \left(\frac{x}{2} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} \left(\frac{x}{2} \right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2} \right)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} \left(\frac{x}{2} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{x}{2} \right)^n + e^{\frac{x}{2}} \\ &= \frac{x^2}{4} e^{\frac{x}{2}} + \frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{2}} = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + 1 \right) e^{\frac{x}{2}}, x \in (-\infty, +\infty). \end{aligned}$$

(4) 易求得该级数收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \left(\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+2} \right)' \\ &= \left(\frac{x}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \right)' = \left(\frac{x}{2} \sin x \right)' \\ &= \frac{1}{2} (\sin x + x \cos x), x \in (-\infty, +\infty). \end{aligned}$$

【例 2】 求下列常数项级数的和.

$$(1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2-1)2^n};$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n^2 - n + 1)}{2^n}.$$

解 (1) 令 $S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^2-1}$, $x \in (-1, 1)$, 则

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n-1} - \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{x}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} - \frac{1}{2x} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{x}{2} [-\ln(1-x)] - \frac{1}{2x} [-\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2}] \\ &= \frac{2+x}{4} + \frac{1-x^2}{2x} \ln(1-x) \quad (|x| < 1, x \neq 0), \end{aligned}$$



$$\text{故 } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2-1)2^n} = S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8} - \frac{3}{4} \ln 2.$$

$$(2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n^2 - n + 1)}{2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

令 $S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n, x \in (-1, 1)$, 则

$$S(x) = x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = x^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)'' = x^2 \left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \frac{2x^2}{(1-x)^3},$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \left(-\frac{1}{2}\right)^n = S\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{27}$$

$$\text{故 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n^2 - n + 1)}{2^n} = \frac{2}{3} + \frac{4}{27} = \frac{22}{27}.$$

【例 3】求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ 的和函数.

解 (方法一) 由于 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$, 则

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \cdots$$

$$e^x + e^{-x} = 2\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots\right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\text{故 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

(方法二) 令 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$, 则

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

$$S(x) + S'(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = e^x$$

解一阶线性微分方程 $S'(x) + S(x) = e^x$ 得 $S(x) = Ce^{-x} + \frac{1}{2}e^x$.

由 $S(0) = 1$ 知 $C = \frac{1}{2}$. 则 $S(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

【例 4】设 $a_n = \int_0^{n\pi} x |\sin x| dx (n = 1, 2, \cdots)$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{2^n}\right)$.

解

$$a_n = \int_0^{n\pi} x |\sin x| dx \quad (x = n\pi - t)$$

$$= \int_0^{n\pi} (n\pi - t) |\sin t| dt = n\pi \int_0^{n\pi} |\sin t| dt - a_n$$



$$a_n = \frac{n\pi}{2} \int_0^{n\pi} |\sin t| dt = \frac{n^2\pi}{2} \int_0^\pi \sin t dt = n^2\pi$$

$$\text{则 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{2^n} \right) = \pi \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^2}{2} + \frac{2^2}{2^2} + \cdots + \frac{n^2}{2^n} \right) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}.$$

令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' = x \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^n \right)' = x \left(\frac{x}{(1-x)^2} \right)' = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{2^n} \right) = \pi S\left(\frac{1}{2}\right) = 6\pi.$$

【例 5】 设 $a_1 = a_2 = 1, a_{n+1} = a_n + a_{n-1} (n = 2, 3, \cdots)$, 试证 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$ 在 $|x| < \frac{1}{2}$ 处必收敛, 并求其和函数.

解 由 $a_1 = a_2 = 1$ 及 $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ 知 $\{a_n\}$ 单调增, 即 $a_{n+1} > a_n$, 则

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} < a_n + a_n = 2a_n < 2^2 a_{n-1} < \cdots < 2^{n-1} a_2 = 2^{n-1}$$

从而有 $a_n < 2^{n-2} (n = 4, 5, \cdots)$, 于是 $|a_n x^{n-1}| < 2^{n-2} |x^{n-1}| = \frac{1}{2} |(2x)^{n-1}|$.

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (2x)^{n-1}$ 在 $|2x| < 1$, 即 $|x| < \frac{1}{2}$ 时绝对收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$ 在 $|x| < \frac{1}{2}$ 处收敛.

令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} (x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$, 则

$$\begin{aligned} S(x) &= 1 + x + \sum_{n=3}^{\infty} a_n x^{n-1} = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n+1} x^n = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n + a_{n-1}) x^n \\ &= 1 + x + x[S(x) - a_1] + x^2 S(x) = 1 + (x + x^2)S(x), \end{aligned}$$

$$\text{解得 } S(x) = \frac{1}{1-x-x^2}, |x| < \frac{1}{2}.$$

【注】 类似的

设 $a_0 = 1, a_1 = 0, a_{n+1} = \frac{1}{n+1}(na_n + a_{n-1}) (n = 1, 2, 3, \cdots)$, $S(x)$ 为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数.

(I) 证明幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径不小于 1;

(II) 证明 $(1-x)S'(x) - xS(x) = 0 (x \in (-1, 1))$, 并求 $S(x)$ 的表达式.



第三节 傅里叶级数

一、考试内容要点精讲

1. 傅里叶系数与傅里叶级数

设函数 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 且在 $[-\pi, \pi]$ 上可积, 则称

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

为 $f(x)$ 的傅里叶系数, 称级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

为 $f(x)$ 以 2π 为周期的傅里叶级数, 记作

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

2. 收敛定理(狄利克雷)

设 $f(x)$ 是 $[-\pi, \pi]$ 上的分段单调函数, 除有限个第一类间断点外都是连续的, 则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $[-\pi, \pi]$ 上处处收敛, 且收敛于

$$1) f(x), \quad \text{当 } x \text{ 为 } f(x) \text{ 的连续点.}$$

$$2) \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}, \quad \text{当 } x \text{ 为 } f(x) \text{ 的间断点.}$$

$$3) \frac{f(-\pi^+) + f(\pi^-)}{2}, \quad \text{当 } x = \pm \pi.$$

3. 周期为 2π 的函数的展开

1) $[-\pi, \pi]$ 上展开

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, \dots.$$

2) $[-\pi, \pi]$ 上奇偶函数的展开

① $f(x)$ 为奇函数

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, \dots.$$

② $f(x)$ 为偶函数

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots.$$



③ 在 $[0, \pi]$ 上展为正弦或展为余弦

(1) 展为正弦

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, \dots.$$

(2) 展为余弦

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots.$$

4. 周期为 $2l$ 的函数的展开

1) $[-l, l]$ 上展开

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \, dx, \quad n = 1, 2, \dots.$$

2) $[-l, l]$ 上奇偶函数的展开

① $f(x)$ 为奇函数

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \, dx, \quad n = 1, 2, \dots.$$

② $f(x)$ 为偶函数

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots.$$

3) 在 $[0, l]$ 上展为正弦或展为余弦

① 展为正弦

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \, dx, \quad n = 1, 2, \dots.$$

② 展为余弦

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots.$$

二、常考题型的方法与技巧

题型一 有关收敛定理的问题

【例 1】 函数 $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上展开为傅里叶级数的和函数



$S(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 由收敛定理知

$$S(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \\ 0, & x = 0 \\ 0, & x = \pm\pi \end{cases}$$

【例 2】 设 $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1+x^2, & 0 < x < \pi \end{cases}$, 则其以 2π 为周期的傅里叶级数在 $x = \pi$ 处收敛于 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解 由收敛定理知, 在 $x = \pi$ 处收敛于 $\frac{f((-\pi)^+) + f(\pi^-)}{2} = \frac{-1 + (1 + \pi^2)}{2} = \frac{\pi^2}{2}$.

【例 3】 设函数 $f(x) = x^2 (0 \leq x \leq 1)$, 而 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x (-\infty < x < +\infty)$, 其中 $b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx (n = 1, 2, 3, \dots)$, 则 $S(-\frac{1}{2})$ 为

- (A) $-\frac{1}{2}$. (B) $-\frac{1}{4}$. (C) $\frac{1}{4}$. (D) $\frac{1}{2}$.

解 将 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上作奇延拓按周期 2 展开, 则

$$S(-\frac{1}{2}) = -S(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$$

故应选(B).

【例 4】 设 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2-2x, & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$,

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x (-\infty < x < +\infty)$$

其中 $a_n = 2 \int_0^1 f(x) \cos n\pi x dx (n = 0, 1, 2, \dots)$, 则 $S(-\frac{5}{2})$ 等于

- (A) $\frac{1}{2}$. (B) $-\frac{1}{2}$. (C) $\frac{3}{4}$. (D) $-\frac{3}{4}$.

解 将 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上作偶延拓按周期为 2 展开, 则

$$S(-\frac{5}{2}) = S(-\frac{1}{2}) = S(\frac{1}{2}) = \frac{f(\frac{1}{2}-0) + f(\frac{1}{2}+0)}{2} = \frac{\frac{1}{2} + (2-1)}{2} = \frac{3}{4}$$

故应选(C).

题型二 将函数展开为傅里叶级数

将函数展开为傅里叶级数分两步进行:

第一步 求出傅里叶系数, 写出傅里叶级数;

第二步 根据狄利克雷收敛定理确定其傅里叶级数在哪些点处收敛于 $f(x)$, 在哪些点处不收敛于 $f(x)$, 在不收敛于 $f(x)$ 的点处收敛于何值.

【例 1】将 $f(x) = x^2$ 在 $(0, \pi)$ 上分别展开为正弦级数和余弦级数.

解 (1) 展为正弦

$$a_n = 0, b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin nx \, dx = \frac{2\pi}{n} (-1)^{n-1} + \frac{4}{n^3 \pi} [(-1)^n - 1]$$

$$\text{则 } x^2 = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx - \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \sin(2n-1)x, x \in (0, \pi).$$

(2) 展为余弦

$$b_n = 0, a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \, dx = \frac{2}{3} \pi^2, a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx \, dx = \frac{4}{n^2} (-1)^n$$

$$\text{则 } x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx, x \in (0, \pi).$$

【例 2】将函数 $f(x) = 2 + |x|$ ($-1 \leq x \leq 1$) 展开为以 2 为周期的傅里叶级数, 并由此求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的和.

解 由于 $f(x) = 2 + |x|$ 为偶函数, 则

$$b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$a_0 = 2 \int_0^1 (2+x) \, dx = 5$$

$$a_n = 2 \int_0^1 (2+x) \cos n\pi x \, dx = \frac{2(\cos n\pi - 1)}{n^2 \pi^2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

由收敛定理知

$$\begin{aligned} 2 + |x| &= \frac{5}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(\cos n\pi - 1)}{n^2 \pi^2} \cos n\pi x \\ &= \frac{5}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos[(2n+1)\pi x]}{(2n+1)^2}, x \in [-1, 1] \end{aligned}$$

令 $x = 0$, 得 $2 = \frac{5}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$, 则

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\text{又 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



$$\text{故 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

【例 3】 设 $f(x) = 10 - x (5 \leq x \leq 15)$, 将 $f(x)$ 展成以 10 为周期的傅里叶级数.

【分析】 本题给出周期函数 $f(x)$ 在一个周期 $5 \leq x \leq 15$ 上的表达式, 但该区间不关于原点对称, 为了利用系数计算公式, 将 $f(x)$ 作周期延拓, 得其在 $-5 \leq x \leq 5$ 上有表达式, 此时

$$a_n = \frac{1}{5} \int_{-5}^5 f(x) \cos \frac{n\pi x}{5} dx.$$

由于 $f(x) \cos \frac{n\pi x}{5}$ 以 10 为周期, 则

$$a_n = \frac{1}{5} \int_{-5}^5 f(x) \cos \frac{n\pi x}{5} dx = \frac{1}{5} \int_5^{15} f(x) \cos \frac{n\pi x}{5} dx$$

$$\text{解} \quad a_0 = \frac{1}{5} \int_5^{15} f(x) dx = \frac{1}{5} \int_5^{15} (10 - x) dx = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{5} \int_5^{15} f(x) \cos \frac{n\pi x}{5} dx = \frac{1}{5} \int_5^{15} (10 - x) \cos \frac{n\pi x}{5} dx = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{5} \int_5^{15} f(x) \sin \frac{n\pi x}{5} dx = \frac{1}{5} \int_5^{15} (10 - x) \sin \frac{n\pi x}{5} dx = (-1)^n \frac{10}{n\pi},$$

$$\text{则 } f(x) = 10 - x = \frac{10}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi x}{5}, x \in (5, 15).$$

当 $x = 5, x = 15$ 时, 它的傅里叶级数收敛于 0.

笔记:

(ID: djky66)



第八章 向量代数与空间解析几何 及多元微分学在几何上的应用

考试内容	考试要求
	数一
空间直角坐标系 向量的概念及其表示 单位向量、方向数与方向余弦、向量的坐标表达式 方向导数与梯度的概念	理解
向量的运算(线性运算、数量积、向量积、混合积) 用坐标表达式进行向量运算的方法 平面方程和直线方程及其求法 方向导数与梯度的计算方法	掌握
两个向量垂直、平行的条件 曲面方程和空间曲线方程的概念 常用二次曲面的方程及其图形 空间曲线的参数方程和一般方程 空间曲线在坐标平面上的投影 空间曲线的切线和法平面及曲面的切平面和法线的概念	了解
平面与平面、平面与直线、直线与直线之间的夹角 利用平面、直线的相互关系(平行、垂直、相交等) 解决有关问题 点到直线以及点到平面的距离 简单的柱面和旋转曲面的方程 空间曲线在坐标平面上的投影 投影曲线的方程 空间曲线的切线和法平面及曲面的切平面和法线的方程	会求

第一节 向量代数

一、考试内容要点精讲

1. 数量积

1) 几何表示: $a \cdot b = |a| |b| \cos \theta$.

2) 代数表示: $a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

3) 运算规律:

i) 交换律: $a \cdot b = b \cdot a$.

ii) 分配律: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.



4) 几何应用:

i) 求模: $|a| = \sqrt{a \cdot a}$.

ii) 求夹角: $\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a| |b|}$.

iii) 判定两向量垂直: $a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b = 0$.

2. 向量积

1) 几何表示 $a \times b$ 是一向量.

模: $|a \times b| = |a| |b| \sin \theta$.

方向: 右手法则.

2) 代数表示: $a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$.

3) 运算规律

i) $a \times b = -(b \times a)$.

ii) 分配律: $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$.

4) 几何应用:

i) 求同时垂直于 a 和 b 的向量: $a \times b$.

ii) 求以 a 和 b 为邻边的平行四边形面积: $S = |a \times b|$.

iii) 判定两向量平行: $a // b \Leftrightarrow a \times b = 0$.

3. 混合积: $(abc) = (a \times b) \cdot c$

1) 代数表示:

$$(abc) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

2) 运算规律:

i) 轮换对称性: $(abc) = (bca) = (cab)$.

ii) 交换变号: $(abc) = -(acb)$.

3) 几何应用

i) $V_{\text{平行六面体}} = |(abc)|$.

ii) 判定三向量共面: a, b, c 共面 $\Leftrightarrow (abc) = 0$.

二、常考题型的方法与技巧

题型一 向量运算

【例 1】 设 $(a \times b) \cdot c = 2$, 则 $[(a + b) \times (b + c)] \cdot (c + a) =$ _____.解 $[(a + b) \times (b + c)] \cdot (c + a)$

$$= [a \times b + a \times c + b \times b + b \times c] \cdot (c + a)$$



$$\begin{aligned}
 &= (a \times b) \cdot c + (a \times b) \cdot a + (a \times c) \cdot c + (a \times c) \cdot a + (b \times c) \cdot c + (b \times c) \cdot a \\
 &= (a \times b) \cdot c + (b \times c) \cdot a \\
 &= 2(a \times b) \cdot c = 4.
 \end{aligned}$$

【例 2】 已知 $|a| = 2$, $|b| = 3$, 则 $(a \times b) \cdot (a \times b) + (a \cdot b)(a \cdot b) =$ _____.

解 $(a \times b) \cdot (a \times b) + (a \cdot b)(a \cdot b) = |a \times b|^2 + (a \cdot b)^2$

$$\begin{aligned}
 &= |a|^2 |b|^2 \sin^2(\hat{a}, \hat{b}) + |a|^2 |b|^2 \cos^2(\hat{a}, \hat{b}) \\
 &= |a|^2 |b|^2 = 36.
 \end{aligned}$$

【例 3】 已知 $|a| = 2$, $|b| = \sqrt{2}$, 且 $a \cdot b = 2$, 则 $|a \times b| =$ _____.

(A) 2. (B) $2\sqrt{2}$. (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (D) 1.

解 由于 $a \cdot b = |a| |b| \cos(\hat{a}, \hat{b})$, 而 $|a| = 2$, $|b| = \sqrt{2}$, 则 $\cos(\hat{a}, \hat{b}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 从而 $(\hat{a}, \hat{b}) =$

$\frac{\pi}{4}$. 故

$$|a \times b| = |a| |b| \sin(\hat{a}, \hat{b}) = 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2$$

题型二 向量运算的应用及向量的位置关系

【例 1】 已知 $a = (2, 4, -4)$, $b = (-1, 2, -2)$, 求 a 与 b 的角平分线向量且使其模为 $\sqrt{32}$.

解 设 a 与 b 的角平分线向量为 c , 则 $c = \lambda \left(\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} \right)$, 其中 λ 为待定常数.

由 $a = (2, 4, -4)$ 和 $b = (-1, 2, -2)$ 知 $c = \lambda \left(0, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3} \right)$. 由

$$|c| = |\lambda| \sqrt{0^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2} = |\lambda| \frac{\sqrt{32}}{3} = \sqrt{32}$$

得 $|\lambda| = 3$, 即 $\lambda = \pm 3$. 故 $c = (0, \pm 4, \mp 4)$.

【例 2】 设 r_1, r_2, r_3 分别为点 A, B, C 的矢径向量.

试证: A, B, C 三点共线 $\Leftrightarrow r_1 \times r_2 + r_2 \times r_3 + r_3 \times r_1 = 0$.

证明 由以上分析知 A, B, C 三点共线 $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 0$. 而

$$\overrightarrow{AB} = r_2 - r_1, \overrightarrow{AC} = r_3 - r_1$$

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= (r_2 - r_1) \times (r_3 - r_1) \\
 &= r_2 \times r_3 - r_1 \times r_3 - r_2 \times r_1 + r_1 \times r_1 \\
 &= r_1 \times r_2 + r_2 \times r_3 + r_3 \times r_1
 \end{aligned}$$

故 A, B, C 三点共线 $\Leftrightarrow r_1 \times r_2 + r_2 \times r_3 + r_3 \times r_1 = 0$.



第二节 空间平面与直线

一、考试内容要点精讲

1. 平面方程

- 1) 一般式: $Ax + By + Cz + D = 0, n = \{A, B, C\}$.
- 2) 点法式: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.
- 3) 截距式: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

2. 直线方程

- 1) 一般式: $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$.
- 2) 对称式: $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$.
- 3) 参数式: $x = x_0 + lt, y = y_0 + mt, z = z_0 + nt$.

3. 平面与直线的位置关系(平行、垂直、夹角)

关键: 平面的法线向量, 直线的方向向量.

4. 点到面的距离

点 (x_0, y_0, z_0) 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离为

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

5. 点到直线距离

点 (x_0, y_0, z_0) 到直线 $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$ 的距离为

$$d = \frac{|(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) \times (l, m, n)|}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

二、常考题型的方法与技巧

题型一 建立直线方程

【例 1】求过点 $(-1, -4, 3)$ 且与下面两直线

$$L_1: \begin{cases} 2x - 4y + z = 1, \\ x + 3y = -5 \end{cases} \text{ 和 } L_2: \begin{cases} x = 2 + 4t, \\ y = -1 - t, \\ z = -3 + 2t \end{cases} \text{ 都垂直的直线.}$$

解 (方法一) 设 $s = (l, m, n)$, 则有 $\begin{cases} -3l + m + 10n = 0 \\ 4l - m + 2n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l = -12n \\ m = -46n \end{cases}$, 从而所求



直线为

$$\frac{x+1}{-12} = \frac{y+4}{-46} = \frac{z-3}{1}$$

(方法二) $s = s_1 \times s_2 = (-3, 1, 10) \times (4, -1, 2) = (12, 46, -1)$, 则所求直线同方法一.

(方法三) 过点 $(-1, -4, 3)$ 且与 L_1 垂直的平面 $3x - y - 10z = -29$, 过点 $(-1, -4, 3)$ 且与 L_2 垂直的平面 $4x - y + 2z = 6$, 从而所求直线方程为

$$\begin{cases} 3x - y - 10z = -29 \\ 4x - y + 2z = 6 \end{cases}$$

【例 2】求过点 $(-1, 0, 4)$ 且平行于平面 $3x - 4y + z = 10$, 又与直线 $x + 1 = y - 3 = \frac{z}{2}$ 相交的直线方程.

解 (方法一) 设所求直线 L 的方程为 $\begin{cases} x = -1 + lt \\ y = mt \\ z = 4 + nt \end{cases}$, $s = (l, m, n)$, 由于该直线与平面

$3x - 4y + z = 10$ 平行, 则

$$3l - 4m + n = 0 \quad ①$$

又因为所求直线 L 与直线 L_2 相交, 则将 $\begin{cases} x = -1 + lt \\ y = mt \\ z = 4 + nt \end{cases}$ 代入 $x + 1 = y - 3 = \frac{z}{2}$ 得

$$lt = -3 + mt = \frac{4 + nt}{2}, \text{ 即 } \begin{cases} (m - l)t = 3 \\ (2l - n)t = 4 \end{cases}$$

消去 t 得

$$4m + 3n - 10l = 0 \quad ②$$

由 ① 式和 ② 式可得 $l = \frac{4}{7}n, m = \frac{19}{28}n$. 令 $n = 28$, 则 $l = 16, m = 19$.

$$\text{则所求直线方程为 } \begin{cases} x = -1 + 16t \\ y = 19t \\ z = 4 + 28t \end{cases}.$$

(方法二) 过点 $(-1, 0, 4)$ 且与平面 $3x - 4y + z = 10$ 平行的平面 Π 的方程为

$$3(x + 1) - 4y + (z - 4) = 0, \text{ 即 } 3x - 4y + z = 1$$

为求平面 $\Pi: 3x - 4y + z = 1$ 和直线 $x + 1 = y - 3 = \frac{z}{2}$ 的交点, 解方程组

$$\begin{cases} 3x - 4y + z = 1 \\ x + 1 = y - 3 = \frac{z}{2} \end{cases}$$

得 $x = 15, y = 19, z = 32$. 由所求直线过点 $(-1, 0, 4)$ 和 $(15, 19, 32)$ 知其方程为

$$\frac{x+1}{16} = \frac{y}{19} = \frac{z-4}{28}$$

(方法三) 过点 $(-1, 0, 4)$ 且平行于平面 $3x - 4y + z = 10$ 的平面 Π_1 方程为:

$$3(x + 1) - 4y + (z - 4) = 0, \text{ 即 } 3x - 4y + z = 1$$



过直线 $x+1=y-3=\frac{z}{2}$ 的平面束方程为

$$x-y+4+\lambda(y-\frac{z}{2}-3)=0$$

将点 $(-1, 0, 4)$ 的坐标代入上式得 $\lambda = \frac{3}{5}$. 将 $\lambda = \frac{3}{5}$ 代入上式得过点 $(-1, 0, 4)$ 和直线 $x+1=y-3=\frac{z}{2}$ 的平面方程为

$$10x-4y-3z=-22$$

$$\text{则所求直线方程为 } \begin{cases} 3x-4y+z=1 \\ 10x-4y-3z=-22 \end{cases}$$

题型二 建立平面方程

【例 1】求过原点且与两直线 $\begin{cases} x=1 \\ y=-1+t \\ z=2+t \end{cases}$ 及 $\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{1}$ 都平行的平面方程.

③ (方法一) 显然直线 $\begin{cases} x=1 \\ y=-1+t \\ z=2+t \end{cases}$ 及 $\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{1}$ 的方向向量分别为

$s_1=(0, 1, 1)$ 和 $s_2=(1, 2, 1)$. 则所求平面的法向量为

$$n=s_1 \times s_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1, 1, -1)$$

平面 Π 过原点, 则所求平面的方程为

$$-(x-0)+(y-0)-(z-0)=0, \text{ 即 } x-y+z=0$$

(方法二) 由题设知, 两条已知直线的方向向量分别为

$$s_1=(0, 1, 1) \text{ 和 } s_2=(1, 2, 1)$$

设 $P(x, y, z)$ 为所求平面上任一点, 由题设知向量 $\overrightarrow{OP}=(x, y, z)$ 与 s_1 和 s_2 共面, 则

$$(\overrightarrow{OP}, s_1, s_2)=0, \text{ 即 } \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ 亦即 } -x+y-z=0$$

【例 2】求过直线 $L: \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-2}{2}$ 且垂直于平面 $\Pi: 3x+2y-z-5=0$ 的平面方程.

③ (方法一) 直线 L 的方向向量为 $s=(2, -3, 2)$, 平面 Π 的法向量为 $n_1=(3, 2, -1)$, 则所求平面方程的法向量为 $n=s \times n_1=(-1, 8, 13)$. 又直线 L 过点 $(1, -2, 2)$, 故所求平面也过该点, 从而所求平面方程为



$$-(x-1)+8(y+2)+13(z-2)=0, \text{即}$$

$$x-8y-13z+9=0$$

$$(\text{方法二}) \quad \text{平面束} \left(\frac{x-1}{2} - \frac{z-2}{2} \right) + \lambda \left(\frac{y+2}{-3} - \frac{z-2}{2} \right) = 0, \lambda = 12.$$

题型三 与平面和直线位置关系有关的问题

【例1】 直线 $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{\lambda}$ 和直线 $L_2: x+1 = y-1 = z$ 是否相交? 如果相交求其交点, 如果不相交求两直线间距离.

解 直线 L_1 的方向向量 $s_1 = (1, 2, \lambda)$, 直线 L_2 的方向向量为 $s_2 = (1, 1, 1)$.

点 $A(1, -1, 1)$ 为直线 L_1 上的点, 点 $B(-1, 1, 0)$ 为直线 L_2 上的点, 则 $\overrightarrow{AB} = (-2, 2, -1)$. 直线 L_1 和 L_2 共面的充要条件是向量 $s_1, s_2, \overrightarrow{AB}$ 混合积为零, 即

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{5}{4}$$

故当 $\lambda = \frac{5}{4}$ 时, 直线 L_1 与 L_2 相交; 当 $\lambda \neq \frac{5}{4}$ 时, L_1 与 L_2 不相交.

1) 当 $\lambda = \frac{5}{4}$ 时, 为求得直线 L_1 与 L_2 的交点, 令 $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{\frac{5}{4}} = t$, 则

$$x = 1 + t, y = -1 + 2t, z = 1 + \frac{5}{4}t$$

代入 $x+1 = y-1 = z$ 得 $t = 4$. 则 L_1 与 L_2 交点为 $(5, 7, 6)$.

2) 当 $\lambda \neq \frac{5}{4}$ 时, 为求得直线 L_1 与 L_2 之间距离, 考虑直线 L_1 和 L_2 的方向向量 $s_1 = (1, 2, \lambda)$, $s_2 = (1, 1, 1)$ 和向量 $\overrightarrow{AB} = (-2, 2, -1)$, 由两直线之间的距离公式知

$$d = \frac{|(s_1, s_2, \overrightarrow{AB})|}{|s_1 \times s_2|} = \frac{|4\lambda - 5|}{\sqrt{(2-\lambda)^2 + (\lambda-1)^2 + 1}}$$

【例2】 设直线 $L_1: \frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{1}$, $L_2: \frac{x+4}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{3}$, 求与直线 L_1, L_2 都垂直且相交的直线方程.

解 由题设知, 直线 L_1 和 L_2 的方向向量分别为

$$s_1 = (1, -1, 1) \text{ 和 } s_2 = (2, 1, 3)$$

则所求直线方向向量为

$$s = s_1 \times s_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -4i - j + 3k$$

过直线 L_1 且平行于 s 的平面的方程是



$$\begin{vmatrix} x+2 & y-3 & z+1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0, \text{即 } 2x+7y+5z-12=0$$

同理,过直线 L_2 且平行于 s 的平面的方程是

$$\begin{vmatrix} x+4 & y & z-4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0, \text{即 } 3x-9y+z+8=0$$

则所求直线方程为 $\begin{cases} 2x+7y+5z-12=0 \\ 3x-9y+z+8=0 \end{cases}$.

第三节 曲面与空间曲线

一、考试内容要点精讲

1. 曲面方程

一般式 $F(x, y, z) = 0$ 或 $z = f(x, y)$.

2. 空间曲线

1) 参数式: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$

2) 一般式: $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$

3. 常见曲面

1) 旋转面

一条平面曲线绕其平面上一条直线旋转一周所成的曲面:

设 L 是 yOz 平面上一条曲线,其方程是 $\begin{cases} f(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$, 则

① L 绕 y 轴旋转所得旋转面方程为 $f(y, \pm \sqrt{x^2 + z^2}) = 0$.

② L 绕 z 轴旋转所得旋转面方程为 $f(\pm \sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$.

2) 柱面

平行于定直线并沿定曲线 Γ 移动的直线 L 形成的轨迹:

① 准线为 $\Gamma: \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, 母线平行于 z 轴的柱面方程为 $f(x, y) = 0$.

② 准线为 $\Gamma: \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$, 母线平行于 z 轴的柱面方程为 $F(x, y, z) = 0$ 和

$G(x, y, z) = 0$ 联立消去 z 所得的二元方程 $H(x, y) = 0$.

3) 二次曲面



① 椭圆锥面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$; 特别地: 圆锥面 $x^2 + y^2 = z^2$;

② 椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; 特别地: 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;

③ 单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$;

④ 双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$;

⑤ 椭圆抛物面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$; 特别地: 旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$;

⑥ 双曲抛物面(马鞍面) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$.

4) 空间曲线投影

曲线 $\Gamma: \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 消去 z 得到关于 xOy 面的投影柱面 $H(x, y) = 0$. 曲线 Γ 在 xOy

面上的投影曲线方程为 $\begin{cases} H(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

二、常考题型的方法与技巧

题型一 建立柱面方程

【例 1】求以曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2z^2 = 1 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$ 为准线, 母线平行于 z 轴的柱面.

【解】将 $z = x^2 + y^2$ 代入 $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$ 得 $x^2 + y^2 + 2(x^2 + y^2)^2 = 1$, 即 $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ 为所要求的柱面.

【例 2】求以曲线 $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 为准线, 母线平行于直线 $x = y = z$ 的柱面方程.

【解】(方法一) 过曲线 $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 上点 (x_0, y_0, z_0) 且平行于直线 $x = y = z$ 的直线方程为

$$x - x_0 = y - y_0 = z - z_0$$

消去方程组 $\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1 \\ x_0 + y_0 + z_0 = 0 \end{cases}$ 中的 x_0, y_0, z_0 , 得

$$(2x - y - z)^2 + (2y - x - z)^2 + (2z - x - y)^2 = 9$$

化简可得 $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 3$ 为所求柱面方程.

(方法二) 由题设知所求柱面是圆柱面, 且其上任一点 (x, y, z) 到直线 $x = y = z$ 的距



离为 1. 由点到直线距离公式知

$$\frac{|(x, y, z) \times (1, 1, 1)|}{\sqrt{3}} = 1$$

则所求柱面方程为

$$(y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2 = 3$$

题型二 建立旋转面方程

【例 1】 求下列曲线绕指定的轴旋转产生的旋转面的方程:

1) $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ 分别绕 x 轴和 y 轴旋转.

2) $\begin{cases} z = y^2 \\ x = 0 \end{cases}$ 分别绕 y 轴和 z 轴旋转.

④ 1) 绕 x 轴旋转面方程: $2x^2 + y^2 + z^2 = 1$;

绕 y 轴旋转面方程: $2(x^2 + z^2) + y^2 = 1$.

2) 绕 y 轴旋转面方程: $\sqrt{x^2 + z^2} = y^2$, 即 $x^2 + z^2 = y^4$;

绕 z 轴旋转面方程: $z = y^2 + x^2$.

【例 2】 求直线 $L: \frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ 绕 z 轴旋转所得旋转面方程.

④ 设 (x, y, z) 为旋转面上任一点, 它对应曲线 L 上的点为 (x_0, y_0, z_0) , 这里 $z = z_0$, 则

$$x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2$$

又 (x_0, y_0, z_0) 满足 $\frac{x_0-1}{0} = \frac{y_0}{1} = \frac{z_0-1}{2}$, 则 $x_0 = 1, y_0 = \frac{z_0-1}{2}$, 代入上式知,

$$x^2 + y^2 = 1^2 + \left(\frac{z_0-1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{(z_0-1)^2}{4} = 1 + \frac{(z-1)^2}{4}$$

即 $x^2 + y^2 - \frac{(z-1)^2}{4} = 1$.

题型三 求空间曲线的投影曲线方程

【例】 求曲线 $L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (a > 0) \\ x^2 + y^2 = ax \end{cases}$ 在 xOy 面和 xOz 面上的投影曲线方程.

④ 曲线 L 在 xOy 面上的投影为 $x^2 + y^2 = ax$.

曲线 L 在 xOz 面上的投影为 $z^2 + ax = a^2 (0 \leq x \leq a)$.



第四节 多元微分在几何上的应用

一、考试内容要点精讲

1. 曲面的切平面与法线

1) 曲面 $F(x, y, z) = 0$,

法向量: $n = (F'_x, F'_y, F'_z)$;

2) 曲面 $z = f(x, y)$,

法向量: $n = (f'_x, f'_y, -1)$.

2. 曲线的切线与法平面

1) 曲线 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$,

切向量: $\tau = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$;

2) 曲线 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$,

切向量: $\tau = n_1 \times n_2$.

其中 $n_1 = (F'_x, F'_y, F'_z)$, $n_2 = (G'_x, G'_y, G'_z)$.

二、常考题型的方法与技巧

题型一 建立曲面的切平面和法线方程

【例 1】求曲面 $2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} = 8$ 在点 $M_0(2, 2, 1)$ 处的切平面和法线方程.

【解】令 $F(x, y, z) = 2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} - 8$, 则

$$F'_x(2, 2, 1) = \frac{1}{z} 2^{\frac{x}{z}} \ln 2 \Big|_{(2, 2, 1)} = 4 \ln 2, F'_y(2, 2, 1) = \frac{1}{z} 2^{\frac{y}{z}} \ln 2 \Big|_{(2, 2, 1)} = 4 \ln 2,$$

$$F'_z(2, 2, 1) = -\frac{1}{z^2} (x 2^{\frac{x}{z}} + y 2^{\frac{y}{z}}) \ln 2 \Big|_{(2, 2, 1)} = -16 \ln 2.$$

于是 $n = (4 \ln 2, 4 \ln 2, -16 \ln 2)$ 或取 $n = (1, 1, -4)$.

故所求切平面方程为 $(x-2) + (y-2) - 4(z-1) = 0$, 即 $x + y - 4z = 0$.

$$\text{法线方程为 } \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-4}.$$

【例 2】设直线 $l: \begin{cases} x + y + b = 0 \\ x + ay - z - 3 = 0 \end{cases}$ 在平面 Π 上, 而平面 Π 与曲面 $z = x^2 + y^2$ 相切于点 $(1, -2, 5)$, 求 a, b 的值.

【解】(方法一) 曲面 $z = x^2 + y^2$ 在点 $(1, -2, 5)$ 处的法线向量为

$$n = (2, -4, -1)$$

于是切平面方程为 $2(x-1) - 4(y+2) - (z-5) = 0$, 即

$$2x - 4y - z - 5 = 0$$

①



由 $\begin{cases} x+y+b=0 \\ x+ay-z-3=0 \end{cases}$ 得 $y=-x-b, z=x-3+a(-x-b)$, 代入 ① 式得

$$2x+4x+4b-x+3+ax+ab-5=0$$

因而有 $5+a=0, 4b+ab-2=0$, 由此得出 $a=-5, b=-2$.

(方法二) 由方法一知, Π 的方程为 $2x-4y-z-5=0$, 过 l 的平面束为

$$\lambda(x+y+b)+\mu(x+ay-z-3)=0$$

即 $(\lambda+\mu)x+(\lambda+a\mu)y-\mu z+b\lambda-3\mu=0$.

$$\text{令 } \frac{\lambda+\mu}{2} = \frac{\lambda+a\mu}{-4} = \frac{-\mu}{-1} = \frac{b\lambda-3\mu}{-5}, \text{ 则 } \lambda=\mu, a=-5, b=-2.$$

【例 3】在椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 位于第一卦限的部分上求一点 P , 使椭球面过点 P 的切平面与三个坐标面围成的四面体的体积最小.

解 (方法一) 在椭圆面位于第一卦限的部分上任取一点 $P(x, y, z)$, 过点 $P(x, y, z)$ 的切平面方程为

$$\frac{x}{a^2}(X-x) + \frac{y}{b^2}(Y-y) + \frac{z}{c^2}(Z-z) = 0$$

该切平面在 x, y, z 轴上的截距分别为 $\frac{a^2}{x}, \frac{b^2}{y}, \frac{c^2}{z}$, 该切平面与三个坐标面围成四面体的体积为

$$V = \frac{1}{6} \cdot \frac{a^2}{x} \cdot \frac{b^2}{y} \cdot \frac{c^2}{z} = \frac{a^2 b^2 c^2}{6} \frac{1}{xyz} \quad (x > 0, y > 0, z > 0)$$

$$\text{令 } F(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right), \text{ 则}$$

$$\begin{cases} F'_x = yz + \frac{2\lambda x}{a^2} = 0 \\ F'_y = xz + \frac{2\lambda y}{b^2} = 0 \\ F'_z = xy + \frac{2\lambda z}{c^2} = 0 \\ F'_\lambda = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

由上式得, $x = \frac{a}{\sqrt{3}}, y = \frac{b}{\sqrt{3}}, z = \frac{c}{\sqrt{3}}$. 于是点 $(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}})$ 是 $V(x, y, z)$ 唯一可能取得极值的点, 根据题意体积 $V(x, y, z)$ 最小值存在, 则点 $(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}})$ 为所求的点.

(方法二) 由方法一知, 四面体体积 $V = \frac{a^2 b^2 c^2}{6} \frac{1}{xyz}$, 要使 $V = \frac{a^2 b^2 c^2}{6} \frac{1}{xyz}$ 最小, 等价于

$$\frac{1}{V^2} = \frac{36}{a^2 b^2 c^2} \frac{x^2}{a^2} \cdot \frac{y^2}{b^2} \cdot \frac{z^2}{c^2} \text{ 最大. 这里 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

由不等式 $\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}$ 知 $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ 时 $\frac{1}{V^2}$ 最大, 即 V 最小. 将 $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ 代



入 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, 解得 $x = \frac{a}{\sqrt{3}}, y = \frac{b}{\sqrt{3}}, z = \frac{c}{\sqrt{3}}$.

故点 $(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}})$ 为所要求的点.

【例 4】 已知曲面 $e^{2x-z} = f(\pi y - \sqrt{2}z)$, 且 f 可微, 证明该曲面为柱面.

【证明】 要证明曲面是柱面只需证明曲面上任一点的法向量垂直于定向量.

令 $F(x, y, z) = e^{2x-z} - f(\pi y - \sqrt{2}z)$, 则

$$F'_x = 2e^{2x-z}, F'_y = -\pi f', F'_z = -e^{2x-z} + \sqrt{2}f'$$

于是曲面 $e^{2x-z} = f(\pi y - \sqrt{2}z)$ 在任一点 (x, y, z) 处的法向量为

$$n = (2e^{2x-z}, -\pi f', -e^{2x-z} + \sqrt{2}f')$$

设定向量为 $a = (l, m, p)$, 其中 $p = 1, l = \frac{1}{2}, m = \frac{\sqrt{2}}{\pi}$, 则有 $a \cdot n = 0$, 原题得证.

题型二 建立空间曲线的切线和法平面方程

【例 1】 求曲线 $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, z = 4\sin \frac{t}{2}$ 在点 $t = \frac{\pi}{2}$ 处的切线方程和法平面方程.

【解】 由于 $x' = 1 - \cos t, y' = \sin t, z' = 2\cos \frac{t}{2}$, 则曲线在 $t = \frac{\pi}{2}$ 处切线的方向向量为 $\tau = (1, 1, \sqrt{2})$, 从而所求切线方程为

$$\frac{x+1-\frac{\pi}{2}}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

法平面方程为 $(x - \frac{\pi}{2} + 1) + (y - 1) + \sqrt{2}(z - 2\sqrt{2}) = 0$, 即 $x + y + \sqrt{2}z - \frac{\pi}{2} - 4 = 0$.

【例 2】 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 在点 $(1, -2, 1)$ 处的切线和法平面方程.

【解】 曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ 在点 $(1, -2, 1)$ 处的法向量为 $n_1 = (1, -2, 1)$, 曲面 $x + y + z = 0$ 在点 $(1, -2, 1)$ 处的法向量为 $n_2 = (1, 1, 1)$, 则

$$\tau = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3i + 3k$$

故原曲线在 $(1, -2, 1)$ 处切线方程为 $\frac{x-1}{-3} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-1}{3}$.

法平面方程为 $-3(x-1) + 3(z-1) = 0$, 即 $x - z = 0$.



第五节 方向导数与梯度

一、考试内容要点精讲

1. 方向导数

1) 定义

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta) - f(x_0, y_0)}{t}$$

2) 计算

若 $z = f(x, y)$ 可微, 则 $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta$.

2. 梯度

设函数 $z = f(x, y)$ 有连续一阶偏导数, 则函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 处的梯度为

$$\text{grad} z = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j$$

【注】 梯度 $\text{grad} z$ 是一个向量, 它的方向是函数在这点方向导数最大的方向, 它的模等于方向导数的最大值.

二、常考题型的方法与技巧

题型一 方向导数与梯度的计算

【例 1】 函数 $u = \ln(x + \sqrt{y^2 + z^2})$ 在点 $A(1, 0, 1)$ 处沿 A 指向 $B(3, -2, 2)$ 方向的方向导数为_____.

$$\textcircled{\text{解}} \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(1, 0, 1)} = \frac{1}{x + \sqrt{y^2 + z^2}} \bigg|_{(1, 0, 1)} = \frac{1}{2},$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(1, 0, 1)} = \frac{\frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}}}{x + \sqrt{y^2 + z^2}} \bigg|_{(1, 0, 1)} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{(1, 0, 1)} = \frac{\frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}}}{x + \sqrt{y^2 + z^2}} \bigg|_{(1, 0, 1)} = \frac{1}{2},$$

$$\overrightarrow{AB} = \{2, -2, 1\},$$

则所求的方向导数为 $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + 0 \times \frac{-2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$.

【例 2】 函数 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在点 $(0, 0)$ 处

(A) 不连续.



- (B) 偏导数存在.
 (C) 沿任一方向的方向导数不存在.
 (D) 沿任一方向的方向导数均存在.

解 应选(D).

显然 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在 $(0,0)$ 点连续, 而 $z(x,0) = |x|$ 在 $x=0$ 处不可导, 则 $z'_x(0,0)$ 不存在. 同理 $z'_y(0,0)$ 也不存在, 则 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在点 $(0,0)$ 处偏导数不存在.

设 l 方向的方向余弦为 $\cos \alpha, \cos \beta$, 由方向导数定义知

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial z}{\partial l} \right|_{(0,0)} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t \cos \alpha, t \cos \beta) - f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{t^2 \cos^2 \alpha + t^2 \cos^2 \beta}}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{t} = 1 \end{aligned}$$

则 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在 $(0,0)$ 点处沿任一方向的方向导数都存在, 故应选(D).

【例 3】 设 $f_x(0,0) = 1, f_y(0,0) = 2$, 则

(A) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续.

(B) $df(x,y) \Big|_{(0,0)} = dx + 2dy$.

(C) $\frac{\partial f}{\partial l} \Big|_{(0,0)} = \cos \alpha + 2 \cos \beta$, 其中 $\cos \alpha, \cos \beta$ 为任一方向 l 的方向余弦.

(D) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点沿 x 轴负方向的方向导数为 -1 .

解 应选(D).

笔记:

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



【例 4】在椭球面 $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ 上求一点, 使函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在该点沿 $l = (1, -1, 0)$ 方向的方向导数最大.

解 在椭球面 $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ 上任取一点 (x, y, z) , 则函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在该点沿 l 方向的方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial l} = 2x \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 2y \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}(x - y)$$

令 $F(x, y, z, \lambda) = x - y + \lambda(2x^2 + 2y^2 + z^2 - 1)$, 则

$$\begin{cases} F'_x = 1 + 4\lambda x = 0 \\ F'_y = -1 + 4\lambda y = 0 \\ F'_z = 2\lambda z = 0 \\ F'_\lambda = 2x^2 + 2y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

由上式得

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ y_1 = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_2 = -\frac{1}{2} \\ y_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)} = \sqrt{2}, \frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)} = -\sqrt{2}$$

则函数 u 在点 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$ 处沿 l 方向的方向导数最大.

【例 5】设 $f(x, y)$ 是全平面上的一个可微函数, 且 $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \alpha > 0$, 其中 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, α 为常数, 试证明 $f(x, y)$ 在全平面上有最小值.

证明 因为 $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \alpha > 0$, 由极限保号性知, 存在 $R > 0$, 当 $\rho \geq R$ 时 (即 $x^2 + y^2 \geq R^2$ 时) 有

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} > 0$$

从而有

$$\frac{x}{\rho} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y}{\rho} \frac{\partial f}{\partial y} > 0 \quad ①$$

若用 r 表示点 (x, y) 处极径方向, 则 $\frac{x}{\rho} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y}{\rho} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r}$.

这里 $\frac{\partial f}{\partial r}$ 为 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 处沿极径方向的方向导数, 由 ① 式知 $\frac{\partial f}{\partial r} > 0$, 则 $f(x, y)$

在区域 $x^2 + y^2 \geq R^2$ 上任一点沿极径方向为增函数. 由 $f(x, y)$ 可微性知, $f(x, y)$ 连续, 则 $f(x, y)$ 在有界闭域 $x^2 + y^2 \leq R^2$ 上有最小值, 又 $f(x, y)$ 在 $x^2 + y^2 \geq R^2$ 上任一点沿极径方向为增函数, 则 $f(x, y)$ 在 $x^2 + y^2 \leq R^2$ 上的最小值也是 $f(x, y)$ 在全平面上的最小值, 故原题得证.



第九章 多元积分学及其应用

考试内容	考试要求
	数一
三重积分的概念 两类曲线积分的概念	理解
重积分的性质 两类曲线积分的性质及两类曲线积分的关系 两类曲面积分的概念、性质及两类曲面积分的关系 散度与旋度的概念	了解
计算两类曲线积分的方法 格林公式并会运用平面曲线积分与路径无关的条件 计算两类曲面积分的方法 用高斯公式计算曲面积分的方法	掌握
三重积分(直角坐标、柱面坐标、球面坐标) 二元函数全微分的原函数 用斯托克斯公式计算曲线积分 散度与旋度 用重积分、曲线积分及曲面积分求一些几何量与物理量(平面图形的面积、体积、曲面面积、弧长、质量、质心、形心、转动惯量、引力、功及流量等)	会计算

第一节 三重积分与线面积分

一、考试内容要点精讲

(一) 三重积分

1. 定义

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \xi_k) \Delta v_k$$

2. 性质

与二重积分类似.

3. 计算

1) 直角坐标

① 先一后二(先单后重).

设平行于 z 且穿过闭区域 Ω 内部的直线与 Ω 的边界曲面 S 最多两个交点. Ω 在 xOy 面上的投影域为 D_{xy} (如图 9-1), 则

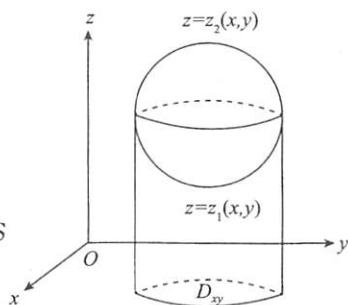


图 9-1



$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iint_{D_{xy}} d\sigma \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

② 先二后一(先重后单).

设空间区域 $\Omega = \{(x, y, z) | (x, y) \in D_z, c_1 \leq z \leq c_2\}$, 其中 D_z 是垂直于 z 轴的平面截闭区域 Ω 所得的平面闭区域(如图 9-2), 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \int_{c_1}^{c_2} dz \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy$$

2) 柱坐标

柱坐标与直角坐标的关系为

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, & 0 \leq r < +\infty, \\ y = r \sin \theta, & 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ z = z, & -\infty < z < +\infty. \end{cases}$$

体积微元 $dv = r dr d\theta dz$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iiint_{\Omega} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz$$

3) 球坐标

球坐标与直角坐标的关系为

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta, & 0 \leq r < +\infty, \\ y = r \sin \varphi \sin \theta, & 0 \leq \varphi \leq \pi, \\ z = r \cos \varphi, & 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

体积微元 $dv = r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iiint_{\Omega} f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$$

笔记:

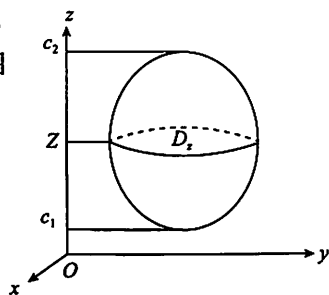


图 9-2

微信公众账号【顶尖考研】
(ID: djky66)



4) 利用奇偶性

若积分域 Ω 关于 xOy 坐标面对称, $f(x, y, z)$ 关于 z 有奇偶性, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \begin{cases} 2 \iiint_{\Omega_{z \geq 0}} f(x, y, z) dv, & f(x, y, z) \text{ 关于 } z \text{ 是偶函数} \\ 0, & f(x, y, z) \text{ 关于 } z \text{ 是奇函数} \end{cases}$$

【注】若积分域关于 xOz 或 yOz 坐标面对称有相应结论.

5) 利用变量的对称性.

笔记:

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

(二) 对弧长的线积分(第一类线积分)

1. 定义

$$\int_L f(x, y) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$$

2. 性质

$$\int_{L(AB)} f(x, y) ds = \int_{L(BA)} f(x, y) ds \quad (\text{与积分路径方向无关})$$

3. 计算(平面)

1) 直接法

① 若 $L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} (a \leq t \leq \beta)$, 则

$$\int_L f(x, y) ds = \int_a^\beta f(x(t), y(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$$

② 若 $L: y = y(x) (a \leq x \leq b)$, 则

$$\int_L f(x, y) ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx$$

③ 若 $L: r = r(\theta) (a \leq \theta \leq \beta)$, 则

$$\int_L f(x, y) ds = \int_a^\beta f(r \cos \theta, r \sin \theta) \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta$$

2) 利用奇偶性



① 若积分曲线 L 关于 y 轴对称, 则

$$\int_L f(x, y) ds = \begin{cases} 2 \int_{L, x \geq 0} f(x, y) ds, & \text{当 } f(x, y) \text{ 关于 } x \text{ 为偶函数} \\ 0, & \text{当 } f(x, y) \text{ 关于 } x \text{ 为奇函数} \end{cases}$$

② 若积分曲线 L 关于 x 轴对称, 则

$$\int_L f(x, y) ds = \begin{cases} 2 \int_{L, y \geq 0} f(x, y) ds, & \text{当 } f(x, y) \text{ 关于 } y \text{ 为偶函数} \\ 0, & \text{当 } f(x, y) \text{ 关于 } y \text{ 为奇函数} \end{cases}$$

3) 利用对称性

若积分曲线关于直线 $y = x$ 对称, 则 $\int_L f(x, y) ds = \int_L f(y, x) ds$. 特别地 $\int_L f(x) ds = \int_L f(y) ds$.

对空间曲线积分 $\int_L f(x, y, z) ds$, 通常化为定积分计算, 即

若曲线 L 的方程为: $x = x(t), y = y(t), z = z(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$, 则

$$\int_L f(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt$$

(三) 对坐标的线积分(第二类线积分)

1. 定义

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i]$$

2. 性质

$$\int_{L(\widehat{AB})} P dx + Q dy = - \int_{L(\widehat{BA})} P dx + Q dy \quad (\text{与积分路径方向有关})$$

3. 计算方法(平面)

1) 直接法

设有光滑曲线 $L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} t \in [\alpha, \beta]$, 其起点和终点分别对应参数 $t = \alpha$ 和 $t = \beta$, $P(x, y), Q(x, y)$ 在 L 上连续, 则

$$\int_L P dx + Q dy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t)) y'(t)] dt$$

2) 格林公式

设闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 围成, 函数 $P(x, y), Q(x, y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数, 则有

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma$$

其中 L 为 D 取正向的边界曲线.

3) 补线用格林公式

4) 利用线积分与路径无关



(1) 线积分与路径无关的判定

定理 设函数 $P(x, y), Q(x, y)$ 在单连通域 D 上有一阶连续偏导数, 则以下四条等价:

① 线积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 与路径无关;

② $\oint_L Pdx + Qdy = 0$, 其中 L 为 D 中任一分段光滑闭曲线;

③ $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \forall (x, y) \in D$;

④ $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dF(x, y)$.

(2) 计算

a) 改换路径计算

一般是沿平行于坐标轴的直线积分, 即

$$\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} Pdx + Qdy = \int_{x_1}^{x_2} P(x, y_1)dx + \int_{y_1}^{y_2} Q(x_2, y)dy$$

或 $\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} Pdx + Qdy = \int_{y_1}^{y_2} Q(x_1, y)dy + \int_{x_1}^{x_2} P(x, y_2)dx$

b) 利用原函数计算

设 $Pdx + Qdy = dF(x, y)$, 即 $F(x, y)$ 为 $Pdx + Qdy$ 的原函数, 则

$$\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} Pdx + Qdy = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1)$$

求原函数方法: ① 偏积分; ② 凑微分.

4. 两类线积分的联系

$$\oint_L Pdx + Qdy = \oint_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)ds$$

5. 计算方法(空间)

1) 直接法

设分段光滑的曲线 L 由参数方程 $x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [\alpha, \beta]$ 给出, 其起点和终点分别对应参数 $t = \alpha$ 和 $t = \beta$, P, Q, R 在 L 上连续, 则

$$\int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} \{P[x(t), y(t), z(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t), z(t)]y'(t) + R[x(t), y(t), z(t)]z'(t)\}dt.$$

2) 斯托克斯公式

设 L 为空间分段光滑的有向闭曲线, Σ 是以 L 为边界的分片光滑曲面, L 的方向与 Σ 的法方向符合右手法则, 函数 P, Q, R 在 Σ 上具有一阶连续偏导数, 则有

$$\begin{aligned} & \oint_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz \\ &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS \end{aligned}$$



$$= \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

(四) 对面积的面积分(第一类面积分)

1. 定义

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$$

2. 性质

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{-\Sigma} f(x, y, z) dS \quad (\text{与积分曲面的方向无关})$$

3. 计算

1) 直接法

设曲面 $\Sigma: z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f[x, y, z(x, y)] \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy$$

若曲面由方程 $x = x(y, z)$ 或 $y = y(z, x)$ 给出, 也可类似地把对面积的面积分化为相应的二重积分.

2) 利用奇偶性

若曲面 Σ 关于 xOy 面对称, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \begin{cases} 2 \iint_{z \geq 0} f(x, y, z) dS, & \text{当 } f(x, y, z) \text{ 关于 } z \text{ 为偶函数,} \\ 0, & \text{当 } f(x, y, z) \text{ 关于 } z \text{ 为奇函数.} \end{cases}$$

3) 利用对称性

(五) 对坐标的面积分(第二类面积分)

1. 定义

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dxdy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{xy}$$

2. 性质

$$\iint_{\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dxdy = - \iint_{-\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dxdy \quad (\text{与积分曲面的方向有关})$$

3. 计算

1) 直接法

(1) 设有向曲面 $\Sigma: z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$, 则

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dxdy = \pm \iint_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)] dxdy$$

若有向曲面 Σ 的法线向量与 z 轴正向夹角为锐角, 即曲面的上侧, 上式中取正号, 否则取负号;

(2) 设有向曲面 $\Sigma: x = x(y, z), (y, z) \in D_{yz}$, 则



$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz = \pm \iint_{D_{yz}} P[x(y, z), y, z] dydz$$

若有向曲面 Σ 的法线向量与 x 轴正向夹角为锐角, 即曲面的前侧, 上式中取正号, 否则取负号;

(3) 设有向曲面 $\Sigma: y = y(z, x), (z, x) \in D_{zx}$, 则

$$\iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dzdx = \pm \iint_{D_{zx}} Q[x, y(z, x), z] dzdx$$

若有向曲面 Σ 的法线向量与 y 轴正向夹角为锐角, 即曲面的右侧, 上式中取正号, 否则取负号.

2) 高斯公式

设空间闭区域 Ω 由分片光滑闭曲面 Σ 所围成, 函数 $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ 在 Ω 上具有一阶连续偏导数, 则有

$$\oiint_{\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dx dy = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv$$

3) 补面用高斯公式

4. 两类面积分的联系

$$\iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS = \iint_{\Sigma} (P dydz + Q dzdx + R dx dy)$$

二、常考题型的方法与技巧

题型一 计算三重积分

1. 直角坐标(先后二或先二后一)

2. 柱坐标

3. 球坐标

4. 奇偶性

5. 变量对称性

【例 1】 计算积分 $\iiint_{\Omega} z^2 dv$, 其中 Ω 由曲面 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 与 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz (R > 0)$

所围成的闭区域.

解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^{\frac{R}{2}} dz \iint_{x^2+y^2 \leq 2Rz-z^2} z^2 dx dy + \int_{\frac{R}{2}}^R dz \iint_{x^2+y^2 \leq R^2-z^2} z^2 dx dy \\ &= \int_0^{\frac{R}{2}} \pi z^2 (2Rz - z^2) dz + \int_{\frac{R}{2}}^R \pi z^2 (R^2 - z^2) dz = \frac{59}{480} \pi R^5. \end{aligned}$$

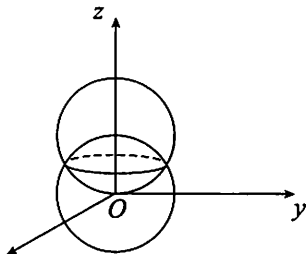


图 9-3

【例 2】 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} z dv$, 其中 Ω 由曲面 $x^2 + y^2 + z^2 \geq z$ 和 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$ 所围成的闭区域.



④ (方法一) 原式 = $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\cos \varphi}^{2\cos \varphi} r \cos \varphi r^2 \sin \varphi dr = \frac{5}{4}\pi$.

(方法二) 设 $\Omega_1: x^2 + y^2 + z^2 \leq z, \Omega_2: x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$, 则

$$\iiint_{\Omega} z dv = \iiint_{\Omega_2} z dv - \iiint_{\Omega_1} z dv$$

由于 $\iiint_{\Omega_2} z dv$ 与 $\iiint_{\Omega_1} z dv$ 的计算方法完全一样, 以下仅以 $\iiint_{\Omega_2} z dv$ 说明其三种较简单的计算方法:

【方法 1】 直角坐标下先二后一:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega_2} z dv &= \int_0^2 dz \iint_{D_z} z dx dy \quad (\text{其中 } D_z: x^2 + y^2 \leq 2z - z^2) \\ &= \int_0^2 \pi z (2z - z^2) dz = \frac{4}{3}\pi. \end{aligned}$$

【方法 2】 由形心计算公式得

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega_2} z dv &= \bar{z} \cdot V \quad (\text{其中 } \bar{z} \text{ 为 } \Omega_2 \text{ 的形心 } z \text{ 坐标}) \\ &= 1 \cdot \frac{4}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi. \quad (V \text{ 为 } \Omega_2 \text{ 的体积}) \end{aligned}$$

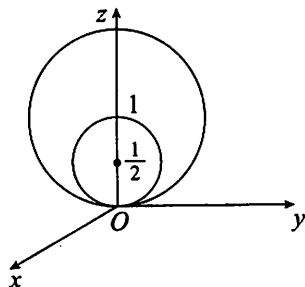


图 9-4

【方法 3】 利用奇偶性.

注意 Ω_2 关于平面 $z = 1$ 上下对称, 则 $\iiint_{\Omega_2} (z - 1) dv = 0$, 从而有

$$\iiint_{\Omega_2} z dv = \iiint_{\Omega_2} [(z - 1) + 1] dv = \iiint_{\Omega_2} dv = \frac{4}{3}\pi$$

【例 3】 计算 $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv$, 其中 Ω 由曲线 $\begin{cases} y^2 = 2z \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋

转一周而成的曲面和平面 $z = 2, z = 8$ 所围的立体.

④ (方法一) $I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 dr \int_2^8 r^3 dz + \int_0^{2\pi} d\theta \int_2^4 dr \int_{\frac{r^2}{2}}^8 r^3 dz = 336\pi$.

(方法二) $I = \int_2^8 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2z}} r^3 dr = 336\pi$.

【例 4】 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} (mx + ly + nz)^2 dv$, 其中 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$.

$$\begin{aligned} \text{④ } \iiint_{\Omega} (mx + ly + nz)^2 dv &= \iiint_{\Omega} (m^2 x^2 + l^2 y^2 + n^2 z^2) dv && (\text{奇偶性}) \\ &= \frac{m^2 + l^2 + n^2}{3} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv && (\text{变量对称性}) \\ &= \frac{m^2 + l^2 + n^2}{3} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^a r^4 \sin \varphi dr \\ &= \frac{4\pi a^5}{15} (m^2 + l^2 + n^2). \end{aligned}$$

【例 5】 设 $f(t)$ 连续, $F(t) = \iiint_{\Omega} [z^2 + f(x^2 + y^2)] dv$, 其中 Ω 由 $x^2 + y^2 \leq t^2, 0 \leq z \leq h$

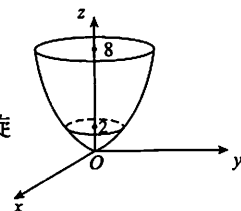


图 9-5



所确定. 求 $\frac{dF}{dt}, \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t)}{t^2}$.

$$\textcircled{\text{解}} F(t) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t dr \int_0^h [z^2 + f(r^2)] r dz = 2\pi \int_0^t [\frac{1}{3}h^3 + hf(r^2)] r dr,$$

$$F'(t) = \frac{2\pi h^3}{3} t + 2\pi h t f(t^2),$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(t)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2\pi}{3} h^3 t + 2\pi h t f(t^2)}{2t} = \frac{\pi}{3} h^3 + \pi h f(0).$$

题型二 更换三重积分次序

这里常见的是两种问题, 一种是累次积分交换次序, 另一种是计算累次积分, 计算累次积分通常也是通过交换累次积分次序来进行. 交换三重累次积分次序本应像二重累次积分一样, 先画域, 然后再重新定限, 然而, 这里画域往往比较困难, 通常利用二重积分交换次序逐步实现三重累次积分交换次序.

【例】 计算 $I = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y \frac{\sin z}{(1-z)^2} dz$.

【解】 先交换 y 和 z 的次序, 则

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \int_0^x dz \int_z^x \frac{\sin z}{(1-z)^2} dy = \int_0^1 dx \int_0^x \frac{(x-z)\sin z}{(1-z)^2} dz \\ &= \int_0^1 dz \int_z^1 \frac{(x-z)\sin z}{(1-z)^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \sin z dz = \frac{1}{2} (1 - \cos 1). \end{aligned}$$

题型三 计算对弧长的线积分

常用方法:

1. 平面线积分

1) 直接法

2) 奇偶性

3) 对称性

2. 空间线积分

1) 直接法

2) 变量对称性

【例 1】 设 L 是椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 其周长为 a , 则 $\oint_L (2xy + 3x^2 + 4y^2) ds =$ _____.

$$\textcircled{\text{解}} \oint_L (2xy + 3x^2 + 4y^2) ds = \oint_L (3x^2 + 4y^2) ds \quad (\text{奇偶性})$$

$$= 12 \oint_L \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} \right) ds = 12a.$$



【例 2】 计算 $I = \oint_L [x^2 + (y+1)^2] ds$, 其中 L 为曲线 $x^2 + y^2 = Rx$ ($R > 0$).

解 $I = \oint_L (x^2 + y^2 + 2y + 1) ds = R \oint_L x ds + \pi R = \frac{\pi R^3}{2} + \pi R$,

其中计算积分 $\oint_L x ds$ 可以用直接法, 以下介绍两种简单方法.

(方法一) $\oint_L x ds = \oint_L [(x - \frac{R}{2}) + \frac{R}{2}] ds = \frac{R}{2} \oint_L ds$ (奇偶性)
 $= \frac{\pi R^2}{2}.$

(方法二) $\oint_L x ds = \bar{x} \cdot l$ (形心公式)
 $= \frac{\pi R^2}{2}.$

【例 3】 计算 $I = \oint_L |y| ds$, 其中 L 为双纽线 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ ($a > 0$).

解 双纽线 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ ($a > 0$) 的极坐标方程为 $r^2 = a^2 \cos 2\theta$.

$$I = 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta d\theta = 4a^2(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$$

【例 4】 计算 $I = \oint_L x^2 ds$, 其中 L 为 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$.

解 (方法一) 直接法

利用曲线方程 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 消去 z 得投影曲线方程

$$x^2 + xy + y^2 = \frac{R^2}{2}$$

配方得

$$\frac{3}{4}x^2 + \left(y + \frac{x}{2}\right)^2 = \frac{R^2}{2}$$

即

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{3}}\right)^2} + \frac{\left(y + \frac{x}{2}\right)^2}{\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$$

令

$$x = \sqrt{\frac{2}{3}}R \cos t, y + \frac{x}{2} = \frac{R}{\sqrt{2}} \sin t$$

则参数方程为: $x = \sqrt{\frac{2}{3}}R \cos t, y = \frac{R}{\sqrt{2}} \sin t - \frac{R}{\sqrt{6}} \cos t, z = -\frac{R}{\sqrt{2}} \sin t - \frac{R}{\sqrt{6}} \cos t,$

$$I = \oint_L x^2 ds = \frac{2R^3}{3} \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \frac{2\pi R^3}{3}$$

(方法二) 对称性

$$I = \oint_L x^2 ds = \frac{1}{3} \oint_L (x^2 + y^2 + z^2) ds \quad (\text{对称性})$$



$$= \frac{1}{3} \oint_L R^2 ds = \frac{2\pi R^3}{3}$$

【注】 类似的可以计算下列线积分

设 L 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线, 则 $\oint_L xy ds = \underline{\hspace{2cm}} \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right)$

题型四 计算对坐标的线积分

常用方法:

1. 平面线积分

1) 直接法

2) 格林公式

3) 补线用格林公式

4) 利用线积分与路径无关

2. 空间线积分

1) 直接法

2) 斯托克斯公式

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

【例 1】 计算线积分 $I = \int_L ye^{y^2} dx + (xe^{y^2} + 2xy^2e^{y^2}) dy$, 其中 L 为 $y = \sqrt[3]{x}$ 从 $O(0,0)$ 到 $A(1,1)$ 的曲线段.

【分析】 由于

$$\frac{\partial}{\partial y}(ye^{y^2}) = \frac{\partial}{\partial x}(xe^{y^2} + 2xy^2e^{y^2}) = e^{y^2} + 2y^2e^{y^2}$$

则本题中的线积分与路径无关.

【解】 (方法一) 改换路径, B 点为 $(1,0)$ 点.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_{OB} ye^{y^2} dx + (xe^{y^2} + 2xy^2e^{y^2}) dy + \int_{BA} ye^{y^2} dx + (xe^{y^2} + 2xy^2e^{y^2}) dy \\ &= 0 + \int_0^1 (e^{y^2} + 2y^2e^{y^2}) dy \\ &= ye^{y^2} \Big|_0^1 - \int_0^1 2y^2e^{y^2} dy + \int_0^1 2y^2e^{y^2} dy = e. \end{aligned}$$

也可将路径改换为另一折线 $\overline{OC}, \overline{CA}$, 其中 C 点为 $(0,1)$ 点, 则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_{\overline{OC}} ye^{y^2} dx + (xe^{y^2} + 2xy^2e^{y^2}) dy + \int_{\overline{CA}} ye^{y^2} dx + (xe^{y^2} + 2xy^2e^{y^2}) dy \\ &= 0 + \int_0^1 e dx = e. \end{aligned}$$

(方法二) 利用原函数, 由于

$$ye^{y^2} dx + (xe^{y^2} + 2xy^2e^{y^2}) dy = (ye^{y^2}) dx + x d(ye^{y^2}) = d(xye^{y^2})$$

则

$$F(x, y) = xye^{y^2}$$

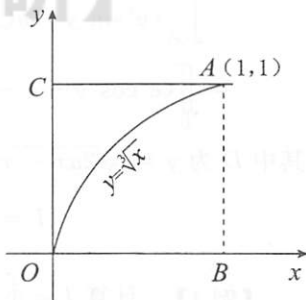


图 9-6



故
$$\int_L y e^{y^2} dx + (x e^{y^2} + 2xy^2 e^{y^2}) dy = x y e^{y^2} \Big|_{(0,0)}^{(1,1)} = e$$

【例 2】 设 L 为椭圆 $4x^2 + y^2 = 8x$ 沿逆时针方向, 则 $\oint_L (e^{y^2} dx + (x + y^2) dy) =$ _____.

解 由格林公式得

$$\oint_L e^{y^2} dx + (x + y^2) dy = \iint_D (1 - 2ye^{y^2}) d\sigma = \iint_D d\sigma = S$$

其中 D 是由 $4x^2 + y^2 = 8x$ 围成的椭圆域, S 为其面积.

该椭圆方程可改写为 $(x-1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$, 则其面积 $S = 2\pi$. 故

$$\oint_L e^{y^2} dx + (x + y^2) dy = 2\pi$$

【例 3】 计算 $I = \oint_L (e^x \sin y - b(x+y)) dx + (e^x \cos y - ax) dy$, 其中 a, b 为正常数, L

为从点 $A(2a, 0)$ 沿曲线 $y = \sqrt{2ax - x^2}$ 到点 $O(0, 0)$ 的弧.

解 补线段 $\overline{OA}$, 则

$$\begin{aligned} I &= \oint_{L+\overline{OA}} (e^x \sin y - b(x+y)) dx + (e^x \cos y - ax) dy - \\ &\quad \int_{\overline{OA}} (e^x \sin y - b(x+y)) dx + (e^x \cos y - ax) dy \\ &= \iint_D (e^x \cos y - a - e^x \cos y + b) d\sigma - \int_0^{2a} (-bx) dx, \end{aligned}$$

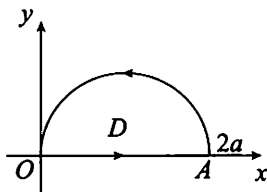


图 9-7

其中 D 为 $y = \sqrt{2ax - x^2}$ 与 $\overline{OA}$ 围成的半圆域, 则

$$I = \iint_D (b-a) d\sigma + b \int_0^{2a} x dx = \frac{\pi a^2}{2} (b-a) + 2a^2 b$$

【例 4】 计算 $I = \oint_C \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}$, 其中

(1) C 为 $x^2 + y^2 - 2y = -\frac{1}{2}$ 沿逆时针方向;

(2) C 为 $4x^2 + y^2 - 8x = 4$ 沿逆时针方向.

解 (1) $C: x^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{2}$, 由格林公式得

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma \quad (\text{其中 } D \text{ 为曲线 } C \text{ 所围圆域}) \\ &= \iint_D \left(\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) d\sigma = 0. \end{aligned}$$

(2) $C: \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$, 此时不能直接用格林公式, 因为在 $(0, 0)$ 点条件不满足. 因此,

作以点 $(0, 0)$ 为中心的圆 $L: x^2 + y^2 = \epsilon^2 (\epsilon > 0)$ 且取顺时针方向, 在 L 和 C 围成的环形域上

用格林公式得

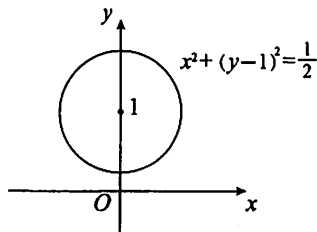


图 9-8

$$\oint_{L+C} \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = \iint_D \left(\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) d\sigma = 0,$$

即 $\oint_L \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} + \oint_C \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = 0.$

则 $I = \oint_C \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = \oint_{-L} \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$

$$= \frac{1}{\epsilon^2} \oint_{-L} ydx - xdy$$

$$= \frac{1}{\epsilon^2} \iint_{D_1} (-1 - 1) d\sigma$$

(这里用了格林公式)

$$= \frac{-1}{\epsilon^2} 2\pi\epsilon^2 = -2\pi.$$

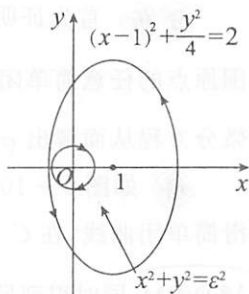


图 9-9

【注】 由本题可看出, 对线积分 $\int_L \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$, $P = \frac{y}{x^2 + y^2}$, $Q = \frac{-x}{x^2 + y^2}$, 除原点 $(0, 0)$ 外, P, Q 有连续一阶偏导数, 且 $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$, $(x, y) \neq (0, 0)$. 此时有以下结论:

1) 沿任何一条不包含原点在内的分段光滑闭曲线的积分为零.

2) 沿任何一条包含原点在内的分段光滑闭曲线的积分均相等.

事实上, 线积分 $\oint_L \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2 + y^2}$; $\int_L \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$; $\int_L \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2}$; $\int_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ 都属于这个类型.

【例 5】 计算 $I = \oint_L \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2}$, 其中 L 是以 $(1, 0)$ 为中心, R 为半径的圆周 ($R \neq 1$) 取逆时针方向.

解 本题中的 $P = \frac{-y}{4x^2 + y^2}$, $Q = \frac{x}{4x^2 + y^2}$, 除原点 $(0, 0)$ 外, P 和 Q 都有连续一阶偏导数, 且 $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - 4x^2}{(4x^2 + y^2)^2}$. 由例 4 的讨论知, 以下应分 $(0, 0)$ 点在曲线 L 所围区域之内和之外两种情况进行计算.

(1) 若 $R < 1$, 则 $(0, 0)$ 点不在曲线 L 围成区域内, 则 $I = 0$.

(2) 若 $R > 1$, 则 $(0, 0)$ 点在曲线 L 所围区域内, 由例 4 中的讨论知, 此时沿绕原点的任一分段光滑闭曲线的积分相等, 根据本题被积函数分母的特点, 我们选 L 为椭圆 $4x^2 + y^2 = 1$ 且取逆时针方向, 则

$$\begin{aligned} I &= \oint_L \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2} = \oint_L \frac{xdy - ydx}{1} = \oint_L xdy - ydx \\ &= \iint_D (1 + 1) d\sigma = 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} = \pi \end{aligned}$$

【例 6】 已知曲线积分 $\int_L \frac{xdy - ydx}{\varphi(x) + y^2} = A$ (常数), 其中 $\varphi(x)$ 有连续导数且 $\varphi(1) = 1$, L 是绕 $(0, 0)$ 一周的任一分段光滑正向闭曲线, 试求 $\varphi(x)$ 及 A .



分析 首先证明不包围原点的任意简单闭路上的积分为零,从而得到该线积分在不包围原点的任意简单闭路围成的单连通域上与路径无关,从而有 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} (x^2 + y^2 \neq 0)$, 可得微分方程从而解出 $\varphi(x)$, 然后取 L 为 $x^2 + y^2 = 1$ 可计算 A 的值.

解 如图 9-10 所示, 设 C 是不包含 $(0,0)$ 点在任一分段光滑简单闭曲线, 在 C 上任意取定两点 M, N , 作围绕原点的闭曲线 $\overline{MQNRM}$, 同时得到另一围绕原点的闭曲线 $\overline{MQNPM}$. 根据题设可知

$$\oint_{\overline{MQNRM}} \frac{x dy - y dx}{\varphi(x) + y^2} - \oint_{\overline{MQNPM}} \frac{x dy - y dx}{\varphi(x) + y^2} = 0$$

从而有

$$\begin{aligned} \oint_{\overline{NRM}} \frac{x dy - y dx}{\varphi(x) + y^2} &= \oint_{\overline{NPM}} \frac{x dy - y dx}{\varphi(x) + y^2} \\ \oint_{\overline{NRMPN}} \frac{x dy - y dx}{\varphi(x) + y^2} &= \int_C \frac{x dy - y dx}{\varphi(x) + y^2} = 0 \end{aligned}$$

由此可知, 该线积分在不包围原点的任意简单闭路围成的单连通域上与路径无关.

设 $P = \frac{-y}{\varphi(x) + y^2}, Q = \frac{x}{\varphi(x) + y^2}$, 则有 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} (x, y) \neq (0, 0)$.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\varphi(x) + y^2 - x\varphi'(x)}{[\varphi(x) + y^2]^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-[\varphi(x) + y^2] + 2y^2}{[\varphi(x) + y^2]^2} = \frac{-\varphi(x) + y^2}{[\varphi(x) + y^2]^2} \quad (2)$$

比较 ①, ② 两式的右端, 得

$$x\varphi'(x) = 2\varphi(x)$$

则 $\varphi(x) = Cx^2$, 又 $\varphi(1) = 1$, 所以 $C = 1, \varphi(x) = x^2$.

取 L 为单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的正向, 则

$$A = \oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \oint_L x dy - y dx = \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} (1 + 1) d\sigma = 2\pi$$

【例 7】 设 $f(x)$ 有二阶连续导数, $f(1) = f'(1) = 1$, 且

$$\oint_L \left[\frac{y^2}{x} + xf\left(\frac{y}{x}\right) \right] dx + \left[y - xf'\left(\frac{y}{x}\right) \right] dy = 0$$

其中 L 是右半平面 $x > 0$ 内任一分段光滑简单闭曲线, 求 $f(x)$.

解 由题设条件知, 在 $x > 0$ 处

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{y^2}{x} + xf\left(\frac{y}{x}\right) \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[y - xf'\left(\frac{y}{x}\right) \right]$$

即

$$2\frac{y}{x} + f'\left(\frac{y}{x}\right) = -f'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x}f''\left(\frac{y}{x}\right)$$

令 $\frac{y}{x} = t$, 则 $tf''(t) - 2f'(t) = 2t$, 即 $f''(t) - \frac{2}{t}f'(t) = 2$. 这是关于 $f'(t)$ 的一阶线性

方程, 由通解公式知

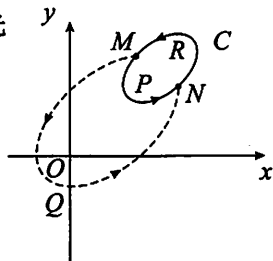


图 9-10

$$f'(t) = t^2 \left[-\frac{2}{t} + C_1 \right] = -2t + C_1 t^2$$

由 $f'(1) = 1$ 知, $C_1 = 3$. 于是

$$f'(t) = 3t^2 - 2t, f(t) = t^3 - t^2 + C_2$$

由 $f(1) = 1$ 知, $C_2 = 1$, 则 $f(x) = x^3 - x^2 + 1$.

【例 8】 计算 $I = \int_{\widehat{AMB}} [\varphi(y) \cos x - \pi y] dx + [\varphi'(y) \sin x - \pi] dy$, 其中 $\widehat{AMB}$ 弧为连结 $A(\pi, 2)$ 与点 $B(3\pi, 4)$ 的线段 $\overline{AB}$ 的下方的任意分段光滑简单曲线, 且该曲线与线段 $\overline{AB}$ 所围图形面积为 2.

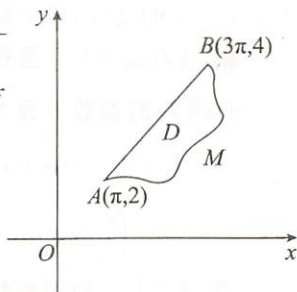


图 9-11

解 (方法一) 补线段 $\overline{BA}$, 则

$$I = \int_{\widehat{AMB}} = \int_{\widehat{AMB}} + \int_{\overline{BA}} - \int_{\overline{BA}} = \oint_{\widehat{AMBA}} - \int_{\overline{BA}},$$

$$\oint_{\widehat{AMBA}} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma = \pi \iint_D d\sigma = 2\pi.$$

直线 $\overline{BA}$ 的方程为: $y = \frac{x}{\pi} + 1$, 则

$$\int_{\overline{BA}} = \int_{3\pi}^{\pi} \left[\varphi\left(\frac{x}{\pi} + 1\right) \cos x - \pi\left(\frac{x}{\pi} + 1\right) \right] dx + \left[\varphi'\left(\frac{x}{\pi} + 1\right) \sin x - \pi \right] \frac{1}{\pi} dx$$

$$= 2\pi(1 + 3\pi),$$

故 $I = 2\pi - 2\pi(1 + 3\pi) = -6\pi^2$.

(方法二) $I = \int_{\widehat{AMB}} \varphi(y) \cos x dx + \varphi'(y) \sin x dy - \pi \int_{\widehat{AMB}} y dx + dy$

其中

$$\int_{\widehat{AMB}} \varphi(y) \cos x dx + \varphi'(y) \sin x dy = \varphi(y) \sin x \Big|_{(\pi, 2)}^{(3\pi, 4)} = 0$$

$$\int_{\widehat{AMB}} y dx + dy = \oint_{\widehat{AMB} + \overline{BA}} y dx + dy - \int_{\overline{BA}} y dx + dy$$

$$= - \iint_D dx dy - \int_{3\pi}^{\pi} \left(\frac{x}{\pi} + 1 \right) dx + \frac{1}{\pi} dx = 6\pi^2$$

故 $I = -6\pi^2$.

【例 9】 设 L 是圆周 $(x-a)^2 + (y-a)^2 = 1 (a > 0)$ 的逆时针方向, $f(x)$ 为连续正值函数, 试证: $\oint_L [x^2 + xf(y)] dy - [y^2 + \frac{y}{f(x)}] dx \geq 2\pi(1 + 2a)$.

证明 由格林公式知

$$\oint_L [x^2 + xf(y)] dy - [y^2 + \frac{y}{f(x)}] dx = \iint_D [2x + 2y + f(y) + \frac{1}{f(x)}] dx dy$$

$$\iint_D (2x + 2y) dx dy = 2\bar{x}S + 2\bar{y}S \quad (\text{形心计算公式})$$

$$= 2a\pi + 2a\pi = 4a\pi$$

由于区域 D 关于 $y = x$ 对称, 则 $\iint_D f(x) dx dy = \iint_D f(y) dx dy$, 于是



$$\iint_D \left[f(y) + \frac{1}{f(x)} \right] dx dy = \iint_D \left[f(x) + \frac{1}{f(x)} \right] dx dy \geq 2 \iint_D \sqrt{f(x) \cdot \frac{1}{f(x)}} dx dy = 2\pi$$

原题得证.

【例 10】 计算曲线积分 $I = \oint_L xz dx + x dy + \frac{y^2}{2} dz$, 其中 L 是柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $z = x + y$ 的交线, 从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向.

解 (方法一) 直接法

曲线 L 的参数方程为: $x = \cos t, y = \sin t, z = \cos t + \sin t$, 则

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos t (\cos t + \sin t) (-\sin t) + \cos^2 t + \frac{\sin^2 t}{2} (-\sin t + \cos t) \right] dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t dt = 2 \int_0^{\pi} \cos^2 t dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \pi \end{aligned}$$

(方法二) 利用斯托克斯公式

记平面 $z = x + y$ 包含在柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 内的部分上侧为 Σ , 则由斯托克斯公式得

$$I = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & x & \frac{y^2}{2} \end{vmatrix} dS$$

Σ 的法线向量的方向余弦为 $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \cos \beta = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$, 则

$$I = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} (1 - x - y) dS = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (1 - x - y) d\sigma = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} d\sigma = \pi$$

(方法三) 化为平面线积分

将 $z = x + y$ 代入原积分得

$$\begin{aligned} I &= \oint_C x(x+y) dx + x dy + \frac{y^2}{2} (dx + dy) \quad (C \text{ 为 } x^2 + y^2 = 1 \text{ 沿逆时针方向}) \\ &= \oint_C \left[x(x+y) + \frac{y^2}{2} \right] dx + \left[x + \frac{y^2}{2} \right] dy \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (1 - x - y) d\sigma \quad (\text{格林公式}) \\ &= \pi \end{aligned}$$

【注】 类似的可以计算下列线积分

(1) 计算 $I = \oint_L 2y dx + xz dy - yz^2 dz$, 其中 $L: \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 4 \end{cases}$. 从 z 轴正向看, L 取逆时针方向. (8\pi)

(2) 计算曲线积分 $I = \oint_L y dx + z dy + x dz$, 其中 L 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线, 从 x 轴正向往 x 轴负向看去为逆时针方向. (-\sqrt{3}\pi a^2)

题型五 计算对面积的面积分

常用的方法: 1) 直接法

2) 奇偶性

3) 变量对称性

【例 1】 设曲面 $\Sigma: |x| + |y| + |z| = 1$, 则 $\oiint_{\Sigma} (x + |y|) dS =$ _____.

解 (方法一) 原式 $= 8 \iint_{\Sigma_1} y dS$ (奇偶性, Σ_1 为 Σ 在第一卦限的部分)

计算积分 $\iint_{\Sigma_1} y dS$ 有以下三种方法:

【方法 1】 $\iint_{\Sigma_1} y dS = \iint_D y \sqrt{3} dx dy = \sqrt{3} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} y dy = \frac{\sqrt{3}}{6}.$

【方法 2】 $\iint_{\Sigma_1} y dS = \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} (x + y + z) dS = \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} dS = \frac{\sqrt{3}}{6}.$

【方法 3】 $\iint_{\Sigma_1} y dS = \bar{y} \cdot S$

$$= \frac{1}{3} S = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

则原式 $= \frac{4\sqrt{3}}{3}.$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

(核心公式)

(方法二) 由于 x 是奇函数, 曲面 $\Sigma: |x| + |y| + |z| = 1$ 关于 yOz 面前后对称, 则

$$\oiint_{\Sigma} x dS = 0$$

再由变量对称性知

$$\begin{aligned} \oiint_{\Sigma} |y| dS &= \frac{1}{3} \oiint_{\Sigma} (|x| + |y| + |z|) dS \\ &= \frac{1}{3} \oiint_{\Sigma} 1 dS = \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

【例 2】 计算 $\iint_{\Sigma} (xy + yz + zx) dS$, 其中 Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被圆柱面 $x^2 + y^2 = 2ax$ 所截下的部分 ($a > 0$).

解 $\iint_{\Sigma} (xy + yz + zx) dS = \iint_{\Sigma} zx dS$ (奇偶性)

$$dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dx dy = \sqrt{2} dx dy$$

则 $\iint_{\Sigma} zx dS = \iint_D x \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{2} dx dy \quad (D: x^2 + y^2 \leq 2ax)$

$$= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} r^3 \cos \theta dr = \frac{64}{15} \sqrt{2} a^4.$$



【例 3】 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{dS}{x^2 + y^2 + z^2}$, 其中 Σ 为柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 夹在 $z = 0$ 和 $z = H (H > 0)$ 之间的部分.

解 (方法一) $\iint_{\Sigma} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dS = 2 \iint_{\Sigma_1} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dS$ (奇偶性)

其中 Σ_1 为 Σ 在 yOz 面前侧的部分, 方程为 $x = \sqrt{R^2 - y^2}$, 则

$$dS = \sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2} dydz = \sqrt{1 + \frac{y^2}{R^2 - y^2}} dydz = \frac{R}{\sqrt{R^2 - y^2}} dydz$$

$$\begin{aligned} \text{则 } \iint_{\Sigma_1} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dS &= \iint_D \frac{1}{R^2 + z^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - y^2}} dydz \quad (D: 0 \leq z \leq H, -R \leq y \leq R) \\ &= R \int_{-R}^R dy \int_0^H \frac{1}{R^2 + z^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2 - y^2}} dz = \pi \arctan \frac{H}{R}. \end{aligned}$$

$$\text{故 } \iint_{\Sigma} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dS = 2\pi \arctan \frac{H}{R}.$$

(方法二) 这里 dS 取为柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 夹在两平面 $z = z$ 与 $z = z + dz$ 之间部分的面积积分, 则

$$\iint_{\Sigma} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dS = \iint_{\Sigma} \frac{1}{R^2 + z^2} dS = \int_0^H \frac{2\pi R dz}{R^2 + z^2} = 2\pi \arctan \frac{H}{R}$$

【例 4】 计算 $\iint_{\Sigma} (ax + by + cz + d)^2 dS$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

$$\begin{aligned} \text{解 } \iint_{\Sigma} (ax + by + cz + d)^2 dS &= \iint_{\Sigma} (a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2) dS + \iint_{\Sigma} d^2 dS \\ &= \iint_{\Sigma} (a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2) dS + 4\pi R^2 d^2 \\ &= (a^2 + b^2 + c^2) \iint_{\Sigma} x^2 dS + 4\pi R^2 d^2 \\ &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS + 4\pi R^2 d^2 \\ &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \iint_{\Sigma} R^2 dS + 4\pi R^2 d^2 \\ &= \frac{4\pi}{3} (a^2 + b^2 + c^2) R^4 + 4\pi R^2 d^2. \end{aligned}$$

【例 5】 计算 $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2az (a > 0)$.

$$\text{解 } \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS = \iint_{\Sigma} 2az dS = 2a \iint_{\Sigma} z dS.$$

由于球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ 关于平面 $z = a$ 对称, 则

$$\iint_{\Sigma} (z - a) dS = 0$$

$$\iint_{\Sigma} z dS = \iint_{\Sigma} [(z - a) + a] dS = \iint_{\Sigma} a dS = 4\pi a^3$$



$$\text{从而} \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS = 8\pi a^4.$$

事实上, 计算 $\iint_{\Sigma} z dS$ 还有一个较为简单的方法, 利用形心计算公式得

$$\iint_{\Sigma} z dS = \bar{z} \cdot S = a \cdot 4\pi a^2 = 4\pi a^3$$

题型六 计算对坐标的面积分

常用的方法: 1) 直接法 2) 高斯公式 3) 补面用高斯公式

【例 1】 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} \frac{x dy dz + z^2 dx dy}{x^2 + y^2 + z^2}$, 其中 Σ 是由曲面 $x^2 + y^2 = R^2$ 及平面 $z = R, z = -R (R > 0)$ 所围成立体表面外侧.

解 设 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ 依次为 Σ 的上、下底和圆柱面部分, 则

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_1} \frac{x dy dz}{x^2 + y^2 + z^2} &= \iint_{\Sigma_2} \frac{x dy dz}{x^2 + y^2 + z^2} = 0, \\ \iint_{\Sigma_3} \frac{x dy dz}{x^2 + y^2 + z^2} &= \iint_{D_{yz}} \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{R^2 + z^2} dy dz - \iint_{D_{yz}} \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{R^2 + z^2} dy dz \\ &= 2 \iint_{D_{yz}} \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{R^2 + z^2} dy dz = 2 \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - y^2} dy \int_{-R}^R \frac{dz}{R^2 + z^2} = \frac{\pi^2}{2} R, \end{aligned}$$

$$\iint_{\Sigma_1 + \Sigma_2} \frac{z^2 dx dy}{x^2 + y^2 + z^2} = \iint_{D_{xy}} \frac{R^2 dx dy}{x^2 + y^2 + R^2} - \iint_{D_{xy}} \frac{R^2 dx dy}{x^2 + y^2 + R^2} = 0,$$

$$\iint_{\Sigma_3} \frac{z^2 dx dy}{x^2 + y^2 + z^2} = 0,$$

故原式 $= \frac{\pi^2}{2} R$.

【例 2】 计算 $I = \iint_{\Sigma} 2x^3 dy dz + 2y^3 dz dx + 3(z^2 - 1) dx dy$, 其中 Σ 是曲面 $z = 1 - x^2 - y^2 (z \geq 0)$ 的上侧.

解 取 Σ_1 为圆域 $x^2 + y^2 \leq 1$ 的下侧, 记 Ω 为由 Σ 和 Σ_1 所围成的区域, 则

$$I = \oiint_{\Sigma + \Sigma_1} 2x^3 dy dz + 2y^3 dz dx + 3(z^2 - 1) dx dy - \iint_{\Sigma_1} 2x^3 dy dz + 2y^3 dz dx + 3(z^2 - 1) dx dy.$$

由高斯公式得

$$\begin{aligned} &\oiint_{\Sigma + \Sigma_1} 2x^3 dy dz + 2y^3 dz dx + 3(z^2 - 1) dx dy \\ &= \iiint_{\Omega} (6x^2 + 6y^2 + 6z) dv = 6 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_0^{1-r^2} (z + r^2) r dz \end{aligned}$$

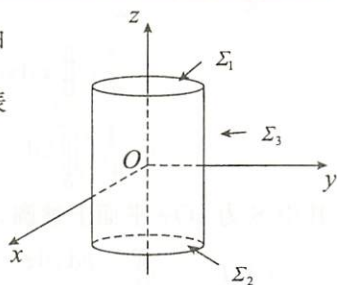


图 9-12

$$= 12\pi \int_0^1 \left[\frac{1}{2}r(1-r^2)^2 + r^3(1-r^2) \right] dr = 2\pi$$

$$\text{而} \quad \iint_{\Sigma_1} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1) dxdy = - \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (-3) dxdy = 3\pi$$

$$\text{故 } I = 2\pi - 3\pi = -\pi.$$

【例 3】 计算 $I = \iint_{\Sigma} \frac{x dydz + y dzdx + z dxdy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$, 其中

(1) Σ 为 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧;

(2) Σ 为上半椭球面 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1 (z \geq 0)$ 的上侧.

解 (1) $I = \iint_{\Sigma} \frac{x dydz + y dzdx + z dxdy}{a^3}$

$$= \frac{1}{a^3} \left[\iint_{\Sigma+\bar{S}} x dydz + y dzdx + z dxdy - \iint_{\bar{S}} x dydz + y dzdx + z dxdy \right]$$

$$= \frac{1}{a^3} \left[\iiint_{\Omega} 3dv - 0 \right] = \frac{3}{a^3} \cdot \frac{2}{3} \pi a^3 = 2\pi,$$

其中 S 为 xOy 平面上被圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 所围部分的下侧.

(2) $I = \iint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2} \frac{x dydz + y dzdx + z dxdy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \iint_{\Sigma_1} \frac{x dydz + y dzdx + z dxdy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} -$

$$\iint_{\Sigma_2} \frac{x dydz + y dzdx + z dxdy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= \iiint_{\Omega} 0dv - \iint_{\Sigma_1} \frac{x dydz + y dzdx + z dxdy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - 0 = 2\pi,$$

其中 Σ_1 为上半球面 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 的下侧, Σ_2 为 xOy 面上介于 $x^2 + y^2 = 1$ 与 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 之间的平面域的下侧.

【例 4】 设 $f(u)$ 有连续一阶导数, 计算

$$I = \iint_{\Sigma} x^3 dydz + \left[\frac{1}{z} f\left(\frac{y}{z}\right) + y^3 \right] dzdx + \left[\frac{1}{y} f\left(\frac{y}{z}\right) + z^3 \right] dxdy$$

其中 Σ 为由 $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ 所确定区域 Ω 表面外侧.

解 由高斯公式得

$$I = \iiint_{\Omega} \left(3x^2 + \frac{1}{z^2} f'\left(\frac{y}{z}\right) + 3y^2 - \frac{1}{z^2} f'\left(\frac{y}{z}\right) + 3z^2 \right) dv = 3 \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv$$

$$= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_1^2 r^2 \cdot r^2 \sin \varphi dr = \frac{93}{5} \pi (2 - \sqrt{2}).$$

【例 5】 设 Σ 为曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2} (1 \leq x^2 + y^2 \leq 4)$ 的下侧, $f(x)$ 是连续函数, 计算

$$I = \iint_{\Sigma} [xf(xy) + 2x - y] dydz + [yf(xy) + 2y + x] dzdx + [zf(xy) + z] dxdy$$

分析 本题不能补面用高斯公式, 因为这里 $f(x)$ 是连续函数, 而高斯公式要求 $f(x)$ 有



连续一阶导数,如果直接化二重积分算,三项都不易计算,因此化二型曲面积分为一型曲面积分计算.

解 因为 Σ 的方程可改写为 $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, 则其法向量为 $(x, y, -z)$, 所以法向量的方向余弦为

$$\begin{aligned}(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) &= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{-z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \\&= \left(\frac{x}{\sqrt{2(x^2 + y^2)}}, \frac{y}{\sqrt{2(x^2 + y^2)}}, \frac{-z}{\sqrt{2(x^2 + y^2)}} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I &= \iint_{\Sigma} \frac{1}{\sqrt{2(x^2 + y^2)}} [(x^2 + y^2 - z^2)f(xy) + 2x^2 + 2y^2 - z^2] dS \\&= \frac{\sqrt{2}}{2} \iint_{\Sigma} \sqrt{x^2 + y^2} dS\end{aligned}$$

记 $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$,

又 $\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} = \sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + 1} = \sqrt{2}$, 所以

$$I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 r^2 dr = \frac{14\pi}{3}$$

【例 6】 设半空间 $x > 0$ 内任意的光滑有向封闭曲面 Σ 都有

$$\oiint_{\Sigma} x f(x) dy dz - xy f(x) dz dx - e^{2x} z dx dy = 0$$

其中函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内具有连续一阶导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$, 求 $f(x)$.

解 由题设及高斯公式得

$$\begin{aligned}0 &= \oiint_{\Sigma} x f(x) dy dz - xy f(x) dz dx - e^{2x} z dx dy \\&= \pm \iiint_{\Omega} (x f'(x) + f(x) - x f(x) - e^{2x}) dv\end{aligned}$$

其中 Ω 是由 Σ 围成的有界闭区域. 由 Σ 的任意性知

$$x f'(x) + f(x) - x f(x) - e^{2x} = 0 \quad (x > 0)$$

即 $f'(x) + \left(\frac{1}{x} - 1\right)f(x) = \frac{1}{x}e^{2x} (x > 0)$, 于是

$$f(x) = \frac{e^x}{x} (e^x + C)$$

由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x} + Ce^x}{x} = 1$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{2x} + Ce^x) = 0$, 即 $C + 1 = 0, C = -1$. 故

$$f(x) = \frac{e^x}{x} (e^x - 1)$$



第二节 多元积分应用

一、考试内容要点精讲

多元积分应用一览表

几何 形(体) 所求量	平面域	空间体	曲线段	曲面片
几何度量	面积: $S = \iint_D d\sigma$	体积: $V = \iiint_{\Omega} dv$	弧长 $L = \int_C ds$	面积 $S = \iint_{\Sigma} dS$
质量	$m = \iint_D \rho(x, y) d\sigma$	$m = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dv$	$m = \int_C f(x, y, z) ds$	$m = \iint_{\Sigma} \rho(x, y, z) dS$
质心	$\bar{x} = \frac{\iint_D x\rho(x, y) d\sigma}{\iint_D \rho(x, y) d\sigma}$	$\bar{x} = \frac{\iiint_{\Omega} x\rho(x, y, z) dv}{\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dv}$	$\bar{x} = \frac{\int_C x\rho(x, y, z) ds}{\int_C \rho(x, y, z) ds}$	$\bar{x} = \frac{\iint_{\Sigma} x\rho(x, y, z) dS}{\iint_{\Sigma} \rho(x, y, z) dS}$
转动惯量	$I_x = \iint_D y^2 \rho(x, y) d\sigma$	$I_x = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dv$	$I_x = \int_C (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) ds$	$I_x = \iint_{\Sigma} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dS$

1. 变力作功

力: $F = Pi + Qj + Rk$.

功: $W = \int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$.

2. 通量

向量场: $U(x, y, z) = Pi + Qj + Rk$.

通量: $\Phi = \iiint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy$.

二、常考题型的方法与技巧

题型一 求几何量

【例 1】 计算曲面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 和 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所围立体体积.

解 (方法一) 利用二重积分计算

$$V = \iint_D [\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2}] dx dy \quad (D: x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}R^2)$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} [\sqrt{R^2 - r^2} - r] r dr = \frac{\pi R^3}{3} (2 - \sqrt{2}).$$

(方法二) 利用三重积分

$$V = \iiint_{\Omega} 1 dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^R r^2 \sin \varphi dr = \frac{\pi R^3}{3} (2 - \sqrt{2})$$

【例2】求柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 夹在平面 $x - z = 0$ 与 $z = 0$ 之间部分的面积.

【分析】由对称性知, 只要求出第一卦限的面积 S_1 , 则总面积 $S = 4S_1$.

【解】(方法一) 利用面积分

在第一卦限, 由 $x^2 + y^2 = a^2$ 知, $y = \sqrt{a^2 - x^2}$,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = 0$$

则

$$dS = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} dz dx = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dz dx$$

$$S = 4 \int_0^a dx \int_0^x \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dz = 4a^2$$

(方法二) 利用线积分

$$S_1 = \int_L z ds \quad (L \text{ 为圆 } x^2 + y^2 = a^2 \text{ 在第一卦限的部分})$$

$$= \int_L x ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos \theta d\theta = a^2$$

则 $S = 4a^2$.

【例3】设半径为 R 的球面 Σ 的球心在定球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (a > 0)$ 上, 问当 R 为何值时, 球面 Σ 在定球面内部的那部分面积最大?

【解】设球面的方程为 $x^2 + y^2 + (z - a)^2 = R^2$, 则两球面交线在 xOy 面上的投影曲线方程为
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 - \frac{R^4}{4a^2}, & \text{令 } R^2 - \frac{R^4}{4a^2} = b^2 (b < 0), \text{ 则球面 } \Sigma \text{ 在定球面内部的那部分面积为} \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S(R) &= \iint_{x^2 + y^2 \leq b^2} \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy \\ &= \iint_{x^2 + y^2 \leq b^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} d\sigma \\ &= 2\pi R^2 - \frac{\pi R^3}{a} \end{aligned}$$

$S'(R) = 4\pi R - \frac{3\pi R^2}{a}$, 令 $S'(R) = 0$ 得, $R = \frac{4}{3}a$, 且 $S''(\frac{4a}{3}) < 0$, 故 $R = \frac{4}{3}a$ 是极大值

点. 又极值点唯一, 故当 $R = \frac{4}{3}a$ 时, 球面 Σ 在定球面内部的那部分面积最大.



题型二 计算物理量

【例 1】 设均匀平面薄板 D 由 $x^2 \leq y \leq 1$ 的确定, 求该薄板关于过 D 的重心和点 $(1, 1)$ 的直线的转动惯量.

解 设 D 的重心为 $(\bar{x}, \bar{y})$, 则 $\bar{x} = 0$,

$$\bar{y} = \frac{\iint_D y d\sigma}{\iint_D d\sigma} = \frac{\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 y dy}{\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 dy} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{5}$$

过点 $(0, \frac{3}{5})$ 和 $(1, 1)$ 的直线方程为 $5y - 2x - 3 = 0$. 点 (x, y) 到直线 $5y - 2x - 3 = 0$ 的距离为

$$d = \frac{|5y - 2x - 3|}{\sqrt{25 + 4}}$$

则 D 关于直线 $5y - 2x - 3 = 0$ 的转动惯量为

$$I = \iint_D \frac{(5y - 2x - 3)^2}{29} d\sigma = \frac{1}{29} \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 (5y - 2x - 3)^2 dy = \frac{352}{3045}$$

【例 2】 设有半径为 R 的球体, P_0 是球表面上的一个定点, 球体上任一点的密度与该点到 P_0 距离的平方成正比 (比例系数 $k > 0$), 求球体质心位置.

解 设所考虑的球体 Ω 的球心为 O , 坐标为 $(0, 0, R)$, P_0 点为原点, 则球面方程为 $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$, 设 Ω 的质心位置为 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, 由对称性知 $\bar{x} = \bar{y} = 0$, 且

$$\bar{z} = \frac{\iiint_{\Omega} kz(x^2 + y^2 + z^2) dv}{\iiint_{\Omega} k(x^2 + y^2 + z^2) dv}$$

$$\text{而} \quad \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2R\cos\varphi} r^4 \sin\varphi dr = \frac{32}{15} \pi R^5$$

$$\iiint_{\Omega} z(x^2 + y^2 + z^2) dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2R\cos\varphi} r^5 \sin\varphi \cos\varphi dr = \frac{8}{3} \pi R^6$$

$$\text{故} \bar{z} = \frac{5}{4} R.$$

【例 3】 设 Ω 是由锥面 $x^2 + (y - z)^2 = (1 - z)^2$ ($0 \leq z \leq 1$) 与平面 $z = 0$ 围成的锥体, 求 Ω 的形心坐标.

解 设 Ω 的形心坐标为 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, 因为 Ω 关于 yOz 平面对称, 所以 $\bar{x} = 0$.

对于 $0 \leq z \leq 1$, 记 $D_z = \{(x, y) | x^2 + (y - z)^2 \leq (1 - z)^2\}$

$$\text{因为} V = \iiint_{\Omega} dx dy dz = \int_0^1 dz \iint_{D_z} dx dy = \int_0^1 \pi (1 - z)^2 dz = \frac{\pi}{3}$$

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} y dx dy dz &= \int_0^1 dz \iint_{D_z} y dx dy \\&= \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1-z} (z + r \sin \theta) r dr \\&= \int_0^1 \pi z (1-z)^2 dz = \frac{\pi}{12}\end{aligned}$$

$$\iiint_{\Omega} z dx dy dz = \int_0^1 dz \iint_{D_z} z dx dy = \int_0^1 \pi z (1-z)^2 dz = \frac{\pi}{12}$$

$$\text{所以 } \bar{y} = \frac{\iiint_{\Omega} y dx dy dz}{V} = \frac{1}{4}, \bar{z} = \frac{\iiint_{\Omega} z dx dy dz}{V} = \frac{1}{4}.$$

故 Ω 的形心坐标为 $(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

【例 4】求底半径为 R , 高为 H , 密度为 μ 的均匀柱体对底面圆直径的转动惯量.

解 (方法一)
$$\begin{aligned}I_y &= \iiint_{\Omega} \mu (x^2 + z^2) dv = \mu \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R dr \int_0^H (r^2 \cos^2 \theta + z^2) r dz \\&= \mu \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R (Hr^3 \cos^2 \theta + \frac{1}{3} H^3 r) dr \\&= \mu \int_0^{2\pi} (\frac{1}{4} HR^4 \cos^2 \theta + \frac{1}{6} H^3 R^2) d\theta \\&= \frac{\pi \mu HR^2}{12} (3R^2 + 4H^2).\end{aligned}$$

(方法二)

$$I_y = \iiint_{\Omega} \mu (x^2 + z^2) dv$$

而
$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} x^2 dv &= \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R dr \int_0^H r^3 dz = \frac{\pi HR^4}{4} \\ \iiint_{\Omega} z^2 dv &= \int_0^H \pi R^2 z^2 dz = \frac{\pi R^2 H^2}{3}\end{aligned}$$

故
$$I_y = \frac{\pi \mu HR^2}{12} (3R^2 + 4H^2)$$

【例 5】设位于点 $(0, 1)$ 的质点 A 对质点 M 的引力大小为 $\frac{k}{r^2}$ ($k > 0, r$ 为质点 A 与 M 之间的距离), 质点 M 沿曲线 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 自 $B(2, 0)$ 运动到 $O(0, 0)$, 求在此运动过程中质点 A 对质点 M 的引力所作的功.

解
$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \frac{k}{r^2} \frac{\overrightarrow{MA}}{|\overrightarrow{MA}|} = k \frac{-xi + (1-y)j}{[x^2 + (1-y)^2]^{3/2}} \\ W &= -k \int_{BO} \frac{x dx - (1-y) dy}{[x^2 + (1-y)^2]^{3/2}} = k(1 - \frac{1}{\sqrt{5}})\end{aligned}$$

【例 6】在变力 $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ 的作用下, 质点由原点沿直线运动到椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 上第一卦限点 $M(\xi, \eta, \zeta)$, 问当 ξ, η, ζ 取何值时, 力 $\mathbf{F}$ 所作的功 W 最大? 并求 W 的



最大值.

解 $W = \int_{\partial M} yz dx + zx dy + xy dz = \xi\eta\zeta.$

要使 xyz 最大, 只要 $(\frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b} \cdot \frac{z}{c})^2$ 最大, 又 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, 当且仅当

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

时, $(\frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b} \cdot \frac{z}{c})^2$ 最大, 即 $\xi = \frac{a}{\sqrt{3}}, \mu = \frac{b}{\sqrt{3}}, \zeta = \frac{c}{\sqrt{3}}$, 从而

$$W_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{9} abc$$

第三节 场论初步

一、考试内容要点精讲

1. **梯度**: 设 $u(x, y, z)$ 具有一阶连续偏导数, 则

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k$$

2. **散度**: 设有向量场 $A(x, y, z) = \{P, Q, R\}$, 其中 P, Q, R 均具有一阶连续偏导数, 则

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

3. **旋度**: 设有向量场 $A(x, y, z) = \{P, Q, R\}$, 其中 P, Q, R 均具有一阶连续偏导数, 则

$$\operatorname{rot} A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

二、常考题型的方法与技巧

题型一 梯度、散度、旋度计算

【例 1】 函数 $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ 在点 $M(1, 2, -2)$ 处的梯度 $\operatorname{grad} u \Big|_M =$ _____.

解 $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(1,2,-2)} = \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2} \Big|_{(1,2,-2)} = \frac{2}{9},$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(1,2,-2)} = \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2} \Big|_{(1,2,-2)} = \frac{4}{9},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{(1,2,-2)} = \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2} \Big|_{(1,2,-2)} = -\frac{4}{9},$$



则 $\text{grad}u \Big|_{(1,2,-2)} = \frac{2}{9}\mathbf{i} + \frac{4}{9}\mathbf{j} - \frac{4}{9}\mathbf{k} = \frac{2}{9}\{1, 2, -2\}.$

【例2】 向量场 $u(x, y, z) = xy^2\mathbf{i} + ye^z\mathbf{j} + x\ln(1+z^2)\mathbf{k}$ 在点 $P(1, 1, 0)$ 处的散度 $\text{div}u =$ _____.

解 $P = xy^2, Q = ye^z, R = x\ln(1+z^2),$

$$\frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{(1,1,0)} = y^2 \Big|_{(1,1,0)} = 1, \frac{\partial Q}{\partial y} \Big|_{(1,1,0)} = e^z \Big|_{(1,1,0)} = 1,$$

$$\frac{\partial R}{\partial z} \Big|_{(1,1,0)} = \frac{2xz}{1+z^2} \Big|_{(1,1,0)} = 0,$$

$$\text{div}u = 1 + 1 + 0 = 2.$$

【例3】 设函数 $u(x, y, z)$ 有二阶连续偏导数, 试证明 $\text{rot}(\text{grad}u) = 0.$

证明 $\text{grad}u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k},$

$$\text{rot}(\text{grad}u) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)\mathbf{k} = 0.$$

【例4】 设 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, f(u)$ 有二阶连续导数, $\text{div}[\text{grad}f(r)] = 0$, 试求 $f(u).$

解 $\text{grad}f(r) = \frac{x}{r}f'(r)\mathbf{i} + \frac{y}{r}f'(r)\mathbf{j} + \frac{z}{r}f'(r)\mathbf{k},$

$$\begin{aligned} \text{div}[\text{grad}f(r)] &= \frac{x^2}{r^2}f''(r) + \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right)f'(r) + \frac{y^2}{r^2}f''(r) + \left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3}\right)f'(r) + \\ &\quad \frac{z^2}{r^2}f''(r) + \left(\frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3}\right)f'(r) \\ &= f''(r) + \frac{2}{r}f'(r), \end{aligned}$$

从而有 $f''(r) + \frac{2}{r}f'(r) = 0$

即 $r^2 f''(r) + 2r f'(r) = 0$

于是 $\frac{d}{dr}(r^2 f'(r)) = 0, r^2 f'(r) = C_1$

$$f'(r) = \frac{C_1}{r^2}, f(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2$$



附 录

2021 年考研数学 —— 高等数学试题

数学一

一、选择题

- (1) 函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处
- (A) 连续且取得极大值. (B) 连续且取得极小值.
(C) 可导且导数等于零. (D) 可导且导数不为零.
- (2) 设函数 $f(x, y)$ 可微, 且 $f(x+1, e^x) = x(x+1)^2$, $f(x, x^2) = 2x^2 \ln x$, 则 $df(1, 1) =$
- (A) $dx + dy$. (B) $dx - dy$.
(C) dy . (D) $-dy$.
- (3) 设函数 $f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$ 在 $x = 0$ 处的 3 次泰勒多项式为 $ax + bx^2 + cx^3$, 则
- (A) $a = 1, b = 0, c = -\frac{7}{6}$. (B) $a = 1, b = 0, c = \frac{7}{6}$.
(C) $a = -1, b = -1, c = -\frac{7}{6}$. (D) $a = -1, b = -1, c = \frac{7}{6}$.
- (4) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 则 $\int_0^1 f(x) dx =$
- (A) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \frac{1}{2n}$. (B) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \frac{1}{n}$.
(C) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k-1}{2n}\right) \frac{1}{n}$. (D) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{2n}\right) \frac{2}{n}$.

二、填空题

- (11) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (12) 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 2e^t + t + 1, \\ y = 4(t-1)e^t + t^2 \end{cases}$ 确定, 则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0} = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (13) 欧拉方程 $x^2 y'' + xy' - 4y = 0$ 满足条件 $y(1) = 1, y'(1) = 2$ 的解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (14) 设 Σ 为空间区域 $\{(x, y, z) \mid x^2 + 4y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 2\}$ 表面的外侧, 则曲面积分 $\iint_{\Sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + z dx dy = \underline{\hspace{2cm}}$.



三、解答题

(17) (本题满分 10 分)

$$\text{求极限 } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \int_0^x e^{t^2} dt}{e^x - 1} - \frac{1}{\sin x} \right).$$

(18) (本题满分 12 分)

$$\text{设 } u_n(x) = e^{-nx} + \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} (n = 1, 2, \cdots), \text{ 求级数 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ 的收敛域及和函数.}$$

(19) (本题满分 12 分)

$$\text{已知曲线 } C: \begin{cases} x^2 + 2y^2 - z = 6, \\ 4x + 2y + z = 30, \end{cases} \text{ 求 } C \text{ 上的点到 } xOy \text{ 坐标面距离的最大值.}$$

(20) (本题满分 12 分)

设 $D \subset \mathbf{R}^2$ 是有界单连通闭区域, $I(D) = \iint_D (4 - x^2 - y^2) dx dy$ 取得最大值的积分区域

记为 D_1 .

(I) 求 $I(D_1)$ 的值;

(II) 计算 $\int_{\partial D_1} \frac{(xe^{x^2+4y^2} + y)dx + (4ye^{x^2+4y^2} - x)dy}{x^2 + 4y^2}$, 其中 ∂D_1 是 D_1 的正向边界.



数学二

一、选择题

(1) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\int_0^x (e^t - 1) dt$ 是 x^7 的

(A) 低阶无穷小.

(B) 等价无穷小.

(C) 高阶无穷小.

(D) 同阶但非等价无穷小.

(2) 函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处

(A) 连续且取得极大值.

(B) 连续且取得极小值.

(C) 可导且导数等于零.

(D) 可导且导数不为零.

(3) 有一圆柱体底面半径与高随时间变化的速率分别为 2 cm/s , -3 cm/s , 当底面半径为 10 cm , 高为 5 cm 时, 圆柱体的体积与表面积随时间变化的速率分别为

(A) $125\pi \text{ cm}^3/\text{s}$, $40\pi \text{ cm}^2/\text{s}$.

(B) $125\pi \text{ cm}^3/\text{s}$, $-40\pi \text{ cm}^2/\text{s}$.

(C) $-100\pi \text{ cm}^3/\text{s}$, $40\pi \text{ cm}^2/\text{s}$.

(D) $-100\pi \text{ cm}^3/\text{s}$, $-40\pi \text{ cm}^2/\text{s}$.

(4) 设函数 $f(x) = ax - b \ln x (a > 0)$ 有 2 个零点, 则 $\frac{b}{a}$ 的取值范围是

(A) $(e, +\infty)$.

(B) $(0, e)$.

(C) $(0, \frac{1}{e})$.

(D) $(\frac{1}{e}, +\infty)$.

(5) 设函数 $f(x) = \sec x$ 在 $x = 0$ 处的 2 次泰勒多项式为 $1 + ax + bx^2$, 则

(A) $a = 1, b = -\frac{1}{2}$.

(B) $a = 1, b = \frac{1}{2}$.

(C) $a = 0, b = -\frac{1}{2}$.

(D) $a = 0, b = \frac{1}{2}$.

(6) 设函数 $f(x, y)$ 可微, 且 $f(x+1, e^x) = x(x+1)^2$, $f(x, x^2) = 2x^2 \ln x$, 则 $df(1, 1) =$

(A) $dx + dy$.

(B) $dx - dy$.

(C) dy .

(D) $-dy$.

(7) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 则 $\int_0^1 f(x) dx =$

(A) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \frac{1}{2n}$.

(B) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \frac{1}{n}$.

(C) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k-1}{2n}\right) \frac{1}{n}$.

(D) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{2n}\right) \frac{2}{n}$.



二、填空题

(11) $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| 3^{-x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

(12) 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 2e^t + t + 1, \\ y = 4(t-1)e^t + t^2 \end{cases}$ 确定, 则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(13) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $(x+1)z + y \ln z - \arctan(2xy) = 1$ 确定, 则 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(0,2)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(14) 已知函数 $f(t) = \int_1^{t^2} dx \int_{\sqrt{x}}^t \sin \frac{x}{y} dy$, 则 $f'(\frac{\pi}{2}) = \underline{\hspace{2cm}}.$

(15) 微分方程 $y''' - y = 0$ 的通解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}.$

三、解答题

(17) (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \int_0^x e^t dt}{e^x - 1} - \frac{1}{\sin x} \right).$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

(18) (本题满分 12 分)

已知 $f(x) = \frac{x|x|}{1+x}$, 求曲线 $y = f(x)$ 的凹凸区间及渐近线.

(19) (本题满分 12 分)

设函数 $f(x)$ 满足 $\int \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{6}x^2 - x + C$, L 为曲线 $y = f(x)$ ($4 \leq x \leq 9$). 记 L 的长度为 s , L 绕 x 轴旋转所成旋转曲面的面积为 A , 求 s 和 A .

(20) (本题满分 12 分)

设 $y = y(x)$ ($x > 0$) 是微分方程 $xy' - 6y = -6$ 满足条件 $y(\sqrt{3}) = 10$ 的解.

(I) 求 $y(x)$.

(II) 设 P 为曲线 $y = y(x)$ 上一点, 记曲线 $y = y(x)$ 在点 P 处的法线在 y 轴上的截距为 I_P , 当 I_P 最小时, 求点 P 的坐标.

(21) (本题满分 12 分)

设平面区域 D 由曲线 $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ ($x \geq 0, y \geq 0$) 与 x 轴围成, 计算二重积分

$$\iint_D xy dx dy.$$



数学三

一、选择题

(1) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\int_0^x (e^t - 1) dt$ 是 x^7 的

(A) 低阶无穷小.

(B) 等价无穷小.

(C) 高阶无穷小.

(D) 同阶但非等价无穷小.

(2) 函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处

(A) 连续且取得极大值.

(B) 连续且取得极小值.

(C) 可导且导数等于零.

(D) 可导且导数不为零.

(3) 设函数 $f(x) = ax - b \ln x (a > 0)$ 有 2 个零点, 则 $\frac{b}{a}$ 的取值范围是

(A) $(e, +\infty)$. (B) $(0, e)$. (C) $(0, \frac{1}{e})$. (D) $(\frac{1}{e}, +\infty)$.

(4) 设函数 $f(x, y)$ 可微, 且 $f(x+1, e^x) = x(x+1)^2$, $f(x, x^2) = 2x^2 \ln x$, 则 $df(1, 1) =$

(A) $dx + dy$. (B) $dx - dy$. (C) dy . (D) $-dy$.

二、填空题

(11) 若 $y = \cos e^{-\sqrt{x}}$, 则 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=1} =$ _____.

(12) $\int_{\sqrt{5}}^5 \frac{x}{\sqrt{|x^2 - 9|}} dx =$ _____.

(13) 设平面区域 D 由曲线段 $y = \sqrt{x} \sin \pi x (0 \leq x \leq 1)$ 与 x 轴围成, 则 D 绕 x 轴旋转所成旋转体的体积为 _____.

(14) 差分方程 $\Delta y_t = t$ 的通解为 $y_t =$ _____.

三、解答题

(17) (本题满分 10 分)

已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[a \arctan \frac{1}{x} + (1 + |x|)^{\frac{1}{x}} \right]$ 存在, 求 a 的值.



(18) (本题满分 12 分)

求函数 $f(x, y) = 2\ln |x| + \frac{(x-1)^2 + y^2}{2x^2}$ 的极值.

(19) (本题满分 12 分)

设有界区域 D 是圆 $x^2 + y^2 = 1$ 和直线 $y = x$ 以及 x 轴在第一象限围成的部分. 计算二重积分 $\iint_D e^{(x+y)^2} (x^2 - y^2) dx dy$.

(20) (本题满分 12 分)

设 n 为正整数, $y = y_n(x)$ 是微分方程 $xy' - (n+1)y = 0$ 满足条件 $y_n(1) = \frac{1}{n(n+1)}$ 的解.

(I) 求 $y_n(x)$;

(II) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n(x)$ 的收敛域及和函数.



数学一答案

一、选择题

(1)D. (2)C. (3)A. (4)B.

二、填空题

(11) $\frac{\pi}{4}$. (12) $\frac{2}{3}$. (13) x^2 . (14) 4π .

三、解答题

(17) $\frac{1}{2}$.(18) 收敛域为 $(0, 1]$. $S(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^x - 1} + (1-x)\ln(1-x) + x, & x \in (0, 1) \\ \frac{e}{e-1}, & x = 1 \end{cases}$.(19) 曲线 C 上的点到 xOy 坐标面距离的最大值为 66.(20) (I) 8π . (II) $-\pi$.

数学二答案

一、选择题

(1)C. (2)D. (3)C. (4)A. (5)D. (6)C. (7)B.

二、填空题

(11) $\frac{1}{\ln 3}$. (12) $\frac{2}{3}$. (13) 1. (14) $\frac{\pi}{2} \cos \frac{2}{\pi}$.(15) $C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 e^{-\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x$ (其中 C_1, C_2, C_3 为任意常数).

三、解答题

(17) $\frac{1}{2}$.(18) $(-1, 0)$ 为曲线 $y = f(x)$ 的凸区间, $(-\infty, -1), (0, +\infty)$ 为曲线 $y = f(x)$ 的凹区间. 曲线 $y = f(x)$ 有铅直渐近线 $x = -1$, 有两条斜渐近线 $y = x - 1$ 和 $y = 1 - x$.(19) $S = \frac{22}{3}, A = \frac{425}{9}\pi$. (20) (I) $y = \frac{1}{3}x^6 + 1 (x > 0)$. (II) $P\left(1, \frac{4}{3}\right)$. (21) $\frac{1}{48}$.

数学三答案

一、选择题

(1)C. (2)D. (3)A. (4)C.

二、填空题

(11) $\frac{1}{2e} \sin \frac{1}{e}$. (12) 6. (13) $\frac{\pi}{4}$. (14) $C + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t$ (其中 C 为任意常数).

三、解答题

(17) $a = \frac{e^{-1} - e}{\pi}$. (18) $f\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 是函数 $f(x, y)$ 的极小值, 极小值为 2. (19) $\frac{1}{8}(e-1)^2$.(20) (I) $y_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$.(II) 收敛域为 $[-1, 1]$, 和函数 $S(x) = \begin{cases} (1-x)\ln(1-x) + x, & x \in [-1, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$.

金榜时代图书·书目

考研数学系列

书名	作者	出版时间
数学复习全书·基础篇(数学一、二、三通用)	刘喜波等	2020年3月
数学复习全书·基础篇(数学一、二、三通用)	李永乐等	2020年6月
数学基础过关660题(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2020年8月
数学历年真题全精解析·基础篇(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2020年10月
数学复习全书(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2020年12月
数学历年真题全精解析(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2021年1月
数学强化通关330题(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2021年2月
高等数学辅导讲义	刘喜波 曹显兵	2021年2月
高等数学辅导讲义	武忠祥	2021年2月
高等数学解题密码·选填题	武忠祥	2021年6月
线性代数辅导讲义	李永乐	2021年2月
概率论与数理统计辅导讲义	王式安	2021年2月
线性代数满分过关150	姜晓千	2021年4月
概率论与数理统计满分过关15	姜晓千	2021年7月
数学压轴大题满分过关150	姜晓千	2021年9月
数学核心知识点乱序高效记忆手册	宋浩	2021年9月
数学决胜冲刺6套卷(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2021年10月
数学临阵磨枪(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2021年10月
经济类联考数学复习全书	李永乐等	2021年4月
经济类联考数学通关无忧题	薛威	2021年4月
农学门类联考数学复习全书	李永乐等	2021年4月

大学数学系列

书名	作者	出版时间
大学数学线性代数辅导	李永乐	2018年12月
大学数学高等数学辅导	章纪民	2021年5月
大学数学概率论与数理统计辅导	刘喜波	2021年5月

线性代数期末高效复习笔记	宋浩	2021 年 7 月
高等数学期末高效复习笔记	宋浩	2021 年 7 月
概率论与数理统计期末高效复习笔记	宋浩	2021 年 7 月

考研政治系列

书名	作者	出版时间
思想政治理论大纲命题解析	米鹏	2021 年 5 月
思想政治理论精雕细刻 1000 题	米鹏	2021 年 5 月
思想政治理论大串讲	米鹏	2021 年 10 月
思想政治理论最后 20 天必背 20 题	米鹏	2021 年 10 月
考研政治高分秘训 900 题	桑宏斌	2021 年 5 月
考研政治冲刺密押题	全国考研政治金榜命题研究中心	2021 年 11 月

考研英语系列

书名	作者	出版时间
考研英语词汇源来如此	全国考研英语金榜命题研究中心	2020 年 10 月
考研英语语法和长难句实战突破 18 讲	全国考研英语金榜命题研究中心	2020 年 10 月
考研英语阅读理解精雕细刻 80 篇	全国考研英语金榜命题研究中心	2021 年 4 月
考研词伙	李超	2019 年 3 月
考研句伙	李超	2019 年 3 月
考研英语阅卷人写作高分万能模板	方妍	2018 年 11 月
考研英语语法长难句拆分攻略	欧阳荣天	2021 年 2 月
考研英语实用语法与疑难句精讲笔记	白子墨	2020 年 12 月
考研英语写作精讲笔记	白子墨	2021 年 6 月
词维风暴	姜晗	2019 年 9 月
考研英语长难句核心语法	高维 赵亮	2021 年 2 月
考研英语核心词汇	赵亮 高维	2021 年 7 月
考研英语词汇通关“密”籍	许密杉	2021 年 5 月
考研英语阅读通关“密”籍	许密杉	2021 年 6 月

专业硕士系列

书名	作者	出版时间
写作复习指南	房文学	2021 年 1 月
逻辑复习指南	房文学	2021 年 3 月

逻辑精练 900 题	房文学	2021 年 3 月
逻辑真题全解	房文学	2021 年 3 月

医师资格考试系列

书名	作者	出版时间
贺银成国家临床执业医师资格考试辅导讲义(上、下册)	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业医师资格考试辅导讲义同步练习	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业医师资格考试全真模拟试题卷及精析	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业及助理医师资格考试历年考点精析(上、下册)	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业及助理医师资格考试实践技能应试指南	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业助理医师资格考试辅导讲义(上、下册)	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业助理医师资格考试辅导讲义同步练习	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业助理医师资格考试全真模拟试题卷及精析	贺银成	2020 年 12 月
国家临床执业及助理医师资格考试抢分速记定心丸	高鑫	2021 年 3 月
刘应科中医执业(助理)医师实践技能通关掌中宝	刘应科	2021 年 4 月
刘应科中医执业(助理)医师综合笔试通关掌中宝	刘应科	2021 年 4 月

考研西医系列

书名	作者	出版时间
贺银成考研西医临床医学综合能力辅导讲义(上、下册)	贺银成	2021 年 3 月
贺银成考研西医临床医学综合能力辅导讲义同步练习	贺银成	2021 年 3 月
贺银成考研西医临床医学综合能力全真模拟试题卷及精析	贺银成	2021 年 3 月
贺银成考研西医临床医学综合能力历年真题精析	贺银成	2021 年 3 月

考研中医系列

书名	作者	出版时间
刘应科考研中医综合教材	刘应科	2021 年 3 月
刘应科考研中医综合教材同步练习 3000 题	刘应科	2021 年 3 月
刘应科考研中医综合历年真题精析及复习思路	刘应科	2021 年 3 月
刘应科考研中医综合终极预测试卷	刘应科	2021 年 9 月

中外名著系列

书名	作者	出版时间
小王子	[法]安托万·德·圣-埃克苏佩里	2018年12月
飞鸟集	[印]泰戈尔	2018年12月
瓦尔登湖	[美]亨利·戴维·梭罗	2018年12月
了不起的盖茨比	[美]弗·司各特·菲茨杰拉德	2018年12月
简·爱	[英]夏洛蒂·勃朗特	2018年12月
老人与海	[美]海明威	2018年12月
月亮和六便士	[英]威廉·萨默塞特·毛姆	2018年12月
呼啸山庄	[英]艾米莉·简·勃朗特	2018年12月
傲慢与偏见	[英]简·奥斯丁	2018年12月
双城记	[英]查尔斯·狄更斯	2019年3月
朝花夕拾·呐喊	鲁迅	2018年4月
呼兰河传	萧红	2018年4月
骆驼祥子	老舍	2018年4月
我这一辈子	老舍	2018年4月
茶馆	老舍	2018年4月

以上图书书名及出版时间仅供参考,以实际出版物为准,均属金榜时代(北京)教育科技有限公司

微信公众号:金榜图书考研



@金榜图书官方微博



天猫
时代巨流图书专营店





乡村艺术 Ke 梦想社

音体美教师 志愿者招募

不要被摩天大厦挡个正着

去青瓦淡墨乡间

用我们的方式热爱这个时代



TEACH FOR CHINA

招募：乡村小学音体美青年教师志愿者

项目 简介

乡村艺术Ke梦想社创办于2017年，旨在改善乡村音体美教师紧缺现状，让乡村儿童感受音体美艺术之美，让更多的孩子，无论出身，都能获得同等的优质教育。梦想社创立之初，便启动了“助力乡村学校音体美课堂”行动计划，截止目前，该计划已牵手近300余名青年志愿者，落地学校已达10所。（详情敬请关注公众号“乡村艺术ke梦想社”）为善益众，求贤若渴，我们，正在远方，等着如诗般的你！

成为志愿者你将获得

- 服务学校包吃包住
- 每月1500元补助
- 志愿者服务期间的短期保障保险
- 方寸天地得享人生意趣，大美原乡遍寻香径落花

我们希望你

- 品行端正，有爱心，有耐心
- 身体健康，能适应艰苦乡村环境
- 受过良好教育且有音体美专业特长
- 认真负责，充满正能量，支教有清晰规划
- 吃苦耐劳，乐于助人，有良好的团队合作精神

报名方式

Step 1.

请以“**报名2020乡村艺术Ke梦想社音体美教师志愿者**”为邮件标题，发送邮件至：

CountryClass@126.com

Step 2.

邮件内容：正文简要介绍你

对社会公益的理解，
参加本次活动的原
因及您的一技之长；

附件1：支教课程设计（包括
3节课以上的教案或
课件）

附件2：个人简历（Word格式）



书名	出版时间	适用阶段
数学公式的奥秘	2020年3月	全程复习
数学复习全书·基础篇	2020年6月	夯实基础
数学基础过关660题	2020年8月	夯实基础
数学历年真题全精解析·基础篇	2020年10月	夯实基础
数学复习全书	2020年12月	全程复习
数学历年真题全精解析	2021年1月	全程复习
高等数学辅导讲义	2021年2月	强化提高
线性代数辅导讲义	2021年2月	强化提高
概率论与数理统计辅导讲义	2021年2月	强化提高
数学强化通关330题	2021年2月	强化提高
数学决胜冲刺6套卷	2021年10月	冲刺预测
数学临阵磨枪	2021年10月	冲刺预测

G20210097



微信扫一扫
解锁更多精彩内容



责任编辑/张培茹 贺彦峰

ISBN 978-7-5693-1325-3



9 787569 1313253

定价: 69.80元