

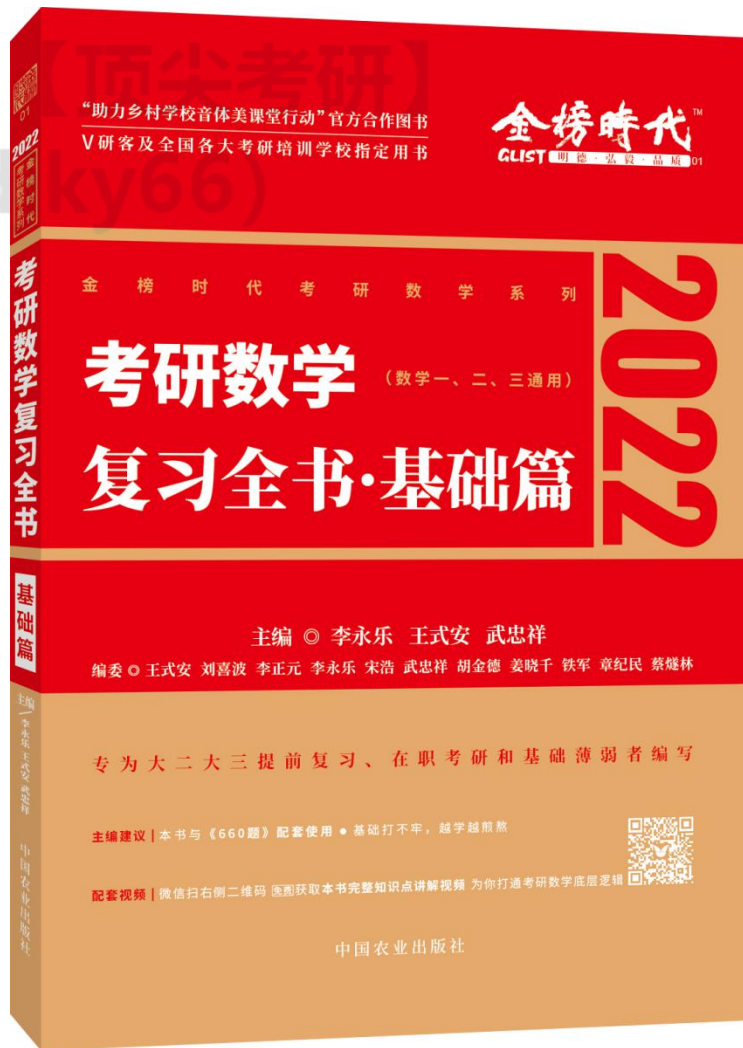
微信公众号【顶尖考研】

2022年研究生入学考试

高等数学(微积分)基础班

2020年10月

微信公众号
(ID: dky66)



微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

高等数学（微 积 分）

数学是一棵大树

初等数学是树根

名目繁多的数学分支是树枝

微积分是树干的主要部分

微积分的创立，与其说是数学史上，不如说是人类历史上的一件大事。

时至今日，它的重要性就像望远镜之于天文学，显微镜之于生物学。

微积分的创立

- 庄子（约前369年—前286年）

一尺之棰，日截其半，万世不竭。

- 刘徽（割圆术，约225年—295年）

割之弥细，所失弥少。割之又割，以至于不可割，则与圆周合体，而无所失矣。

微积分的创立

- 牛顿 (1642-1727)
- 莱布尼兹 (1646-1716)

考试内容及试题类型(新大纲)

类型	内容	选择题		填空题		解答题		百分比	合计	总分
		个数	分数	个数	分数	个数	分数			
数学一	高数	6	30	4	20	4	40	60%	90	150
	线代	2	10	1	5	1	15	20%	30	
	概统	2	10	1	5	1	15	20%	30	
数学二	高数	8	40	5	25	5	55	80%	120	150
	线代	2	10	1	5	1	15	20%	30	
数学三	高数	6	30	4	20	4	40	60%	90	150
	线代	2	10	1	5	2	15	20%	30	
	概统	2	10	1	5	2	15	20%	30	

	(ID: d1566) 共有	独有
数一	1.函数、极限、连续	数一
数二	2.导数与微分	1.级数(数项级数、幂级数、付里叶级数)
数三	3.一元函数微分学的应用	2.向量代数与空间解析几何
	4.不定积分	3.三重积分
	5.定积分	4.曲线曲面积分
	6.定积分的应用	数三
	7.常微分方程	1.级数(数项级数.幂级数)
	8.多元函数微分学	2.差分方程
	9.二重积分	

井左

数
一
数
二
数
三

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

第一章 函数 极限 连续

2009-2020 年函数极限连续分数分布

	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
一	4	4	10	4	4	10	14	4	14	14	14	8
二	17	13	18	18	18	18	18	18	28	23	18	18
三	12	18	18	14	18	18	18	18	24	20	18	18

对象—函数

工具—极限

主要考试题型

一、求极限（函数及数列的极限）

二、极限的反问题

已知极限，求待定的参数、函数、新的极限等

三、无穷小阶的比较

四、函数间断点类型的判定

预备知识【顶尖考研】

一、集合论

二、三角公式

积化和差、和差化积、倍角公式、半角公式、诱导公式等

三、重要的不等式

四、极坐标

常见曲线-直线、圆、形心线、阿基米德螺线、双纽线、三叶玫瑰线

考试要求

1. 理解函数的概念，**掌握**函数的表示方法，**会**建立简单应用问题的函数关系。
2. 了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性。
3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念
4. **掌握**基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念。
5. 理解极限的概念，理解函数左、右极限的概念以及极限存在与左、右极限之间的关系。
6. **掌握**极限的性质及四则运算法则。
7. **掌握**极限存在的两个准则，并**会**利用它们求极限，**掌握**利用两个重要极限求极限的方法。
8. 理解无穷小、无穷大的概念，**掌握**无穷小的比较方法，**会**用等价无穷小求极限。
9. 理解函数连续性的概念（含左连续与右连续），**会**判别函数间断点的类型。
10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值和最小值定理、介值定理），并**会**应用这些性质。

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

第一节 函数

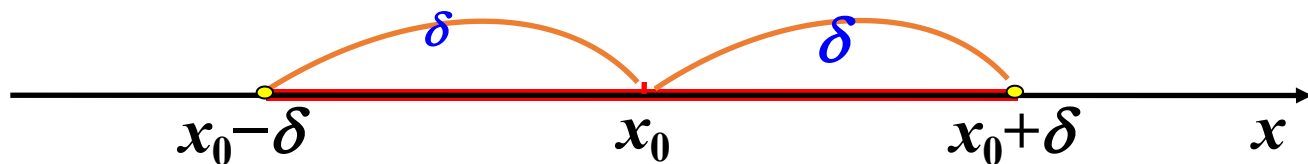
一个概念

邻域

设 $x_0 \in \mathbb{R}$, 且 $\delta > 0$, 则称实数集
 $\{x \mid |x - x_0| < \delta\}$ 为点 x_0 的 δ 邻域,

x_0 称为邻域的中心, δ 称为邻域的半径,

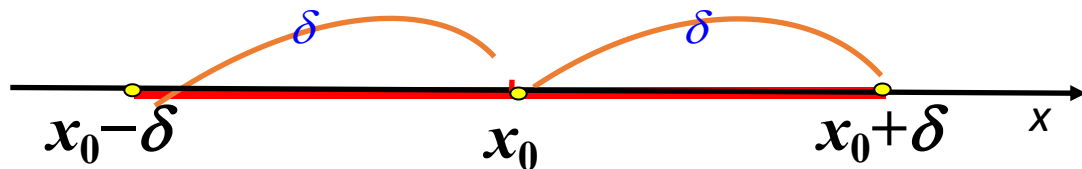
$$\begin{aligned}\text{记作 } U(x_0, \delta) &= U_\delta(x_0) = \{x \mid |x - x_0| < \delta\} \\ &= \{x \mid x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\} \\ &= (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\end{aligned}$$



即

点 x_0 的去心(空心) δ 邻域, 记作 $\dot{U}(x_0, \delta)$,

$$\dot{U}(x_0, \delta) = \{ x \mid 0 < |x - x_0| < \delta \}$$

 $x \neq x_0$ 

{ 开区间 $(x_0 - \delta, x_0)$ 称为点 x_0 的左 δ 邻域,
开区间 $(x_0, x_0 + \delta)$ 称为点 x_0 的右 δ 邻域,

两个符号

逻辑符号 在逻辑推理过程中最常用的两个逻辑记号

“ $\forall$ ”表示 “任取 ” 或 “任意给定” .

“ $\exists$ ”表示 “存在 ” , “至少存在一个”
或 “能够找到” .

一. 函数的概念及常见的函数

1. 函数的定义

设 x, y 是两个变量, D 是一个非空实数集, 若对 $\forall x \in D$, 按照一定的对应法则 f , 都有唯一确定的值 y 与之对应, 则称 f 为定义在 D 上的一个函数关系, 或称变量 y 是变量 x 的函数.

$$y = f(x), \quad x \in D \quad \text{记 } D(f) = D$$

因变量

自变量

定义域

$y = f(x_0)$ 称为函数 f 在 x_0 处的函数值.

函数值全体组成的集合称为函数 f 的值域,
记作 R_f 或 $f(D)$, 即 $R_f = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$.

2. 函数的表示法

(1) 公式法: 显式法 如
隐式法

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$
$$x^2 + \sin y = 1$$

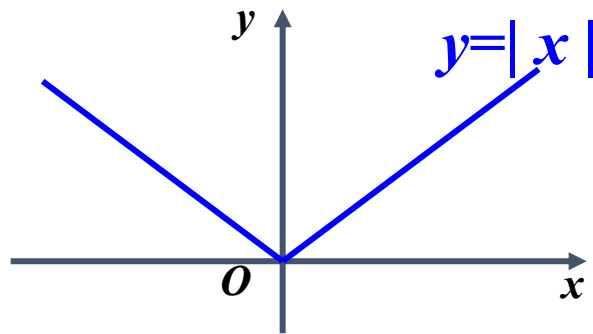
(2) 表格法

(3) 图形法

3. 几个常出现的具体函数

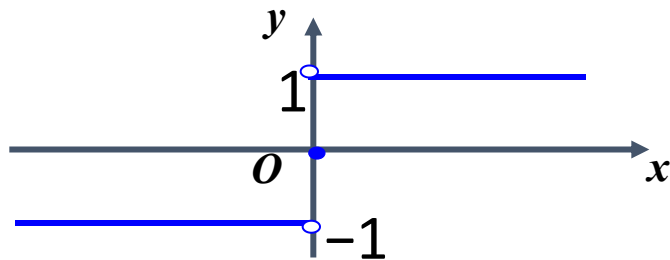
(1) 绝对值函数

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$



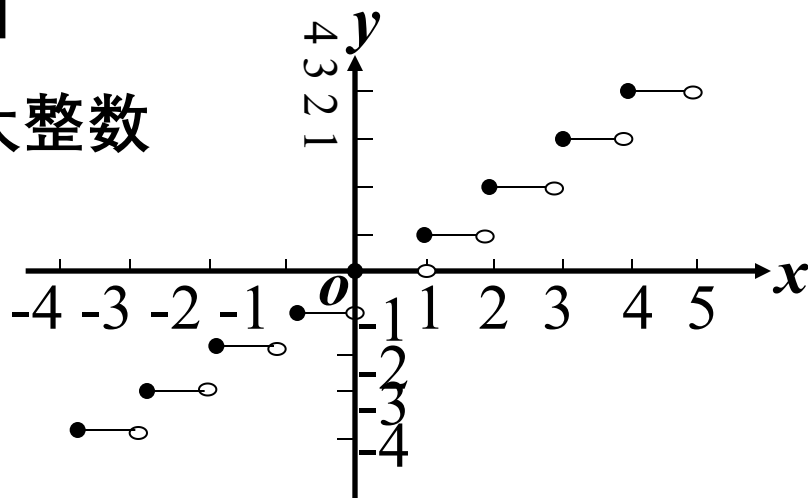
(2) 符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$



(3) 取整函数 $y=[x]$

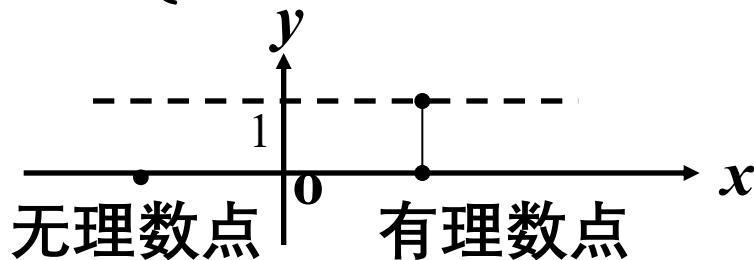
$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数



阶梯曲线

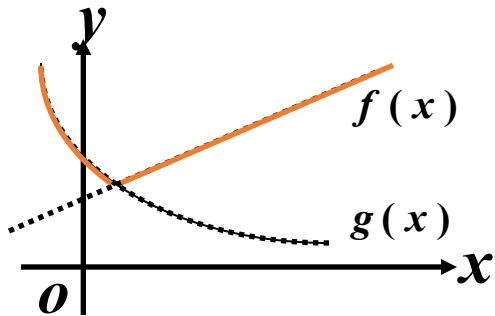
(4) 狄利克雷函数

$$y = D(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } x \text{ 是有理数时} \\ 0 & \text{当 } x \text{ 是无理数时} \end{cases}$$

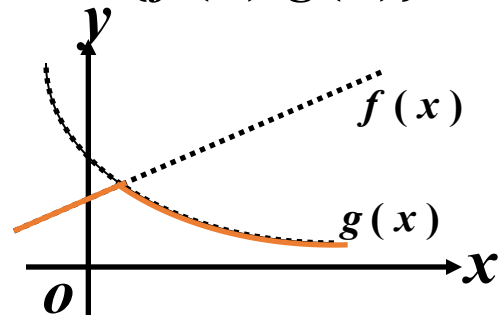


(4) 最值函数

$$y = \max\{f(x), g(x)\}$$



$$y = \min\{f(x), g(x)\}$$

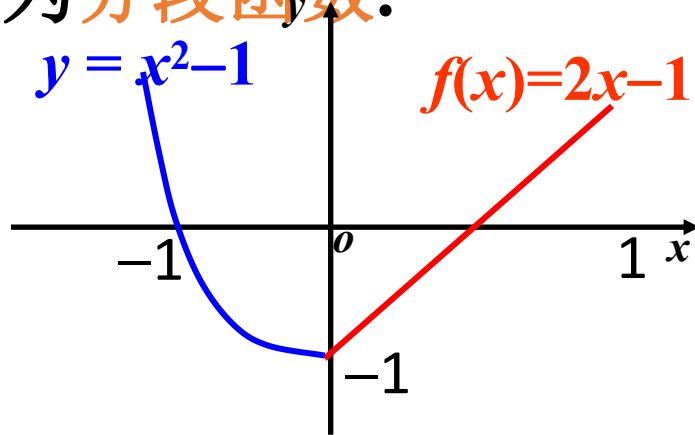


4. 分段函数

在自变量的不同变化范围中, 对应法则用不同的式子来表示的函数, 称为**分段函数**.

例如

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x > 0 \\ x^2-1, & x \leq 0 \end{cases}$$



5. 复合函数

设 $y=f(u)$ 的定义域 D_f , 而 $u=\varphi(x)$ 的值域 R_φ , 若 $D(f) \cap R_\varphi \neq \emptyset$, 则称 $y=f[\varphi(x)]$ 为 x 的复合函数.

$x \rightarrow$ 自变量, $y \rightarrow$ 因变量, $u \rightarrow$ 中间变量.

$$\text{设 } y=f(u)=\sqrt{u+1} \quad D_f=[-1, +\infty),$$

$$u=\varphi(x)=2-x^2, \quad R_\varphi=(-\infty, 2],$$

$$\text{则 } y=f[\varphi(x)]=\sqrt{\varphi(x)+1}=\sqrt{3-x^2}$$

例 1、设 $\forall x > 0$ ，函数值 $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2}$ ，
求函数 $y = f(x)$ ($x > 0$) 的解析表达式。

分析： $\frac{1}{x} = u$

$$f(u) = \frac{1}{u} + \sqrt{1 + \frac{1}{u^2}} = \frac{1 + \sqrt{1+u^2}}{u},$$

$$f(x) = \frac{1 + \sqrt{1+x^2}}{x}. \quad (x > 0)$$

微信公众号【顶尖考研】
例 2、(08-3) 函数 $f(x + \frac{1}{x}) = \frac{x + x^3}{1 + x^4}$,

则积分 $\int_2^{2\sqrt{2}} f(x) dx = \frac{\frac{1}{x} + x}{\frac{1}{x} + x}$.

【分析】 $f(x + \frac{1}{x}) = \frac{x + x^3}{1 + x^4} = \frac{\frac{1}{x} + x}{(\frac{1}{x} + x)^2 - 2}$,

$$\int_2^{2\sqrt{2}} f(x) dx = \int_2^{2\sqrt{2}} \frac{x}{x^2 - 2} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2) \Big|_2^{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \ln 3.$$

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

例3 (2001-2) 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$, 则 $f\{f[f(x)]\} =$

(A) 0

(B) 1

(C) $\begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$

(D) $\begin{cases} 0, & |x| \leq 1 \\ 1, & |x| \geq 1 \end{cases}$

答案: B

例 4、设 $g(x) = \begin{cases} 2-x, & x \leq 0, \\ x+2, & x > 0, \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ -x, & x \geq 0, \end{cases}$ 则 $g[f(x)]$ 为 【 】.

$$(A) \begin{cases} 2+x^2, & x < 0, \\ 2-x, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$(B) \begin{cases} 2-x^2, & x < 0, \\ 2+x, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$(C) \begin{cases} 2-x^2, & x < 0, \\ 2-x, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$(D) \begin{cases} 2+x^2, & x < 0, \\ 2+x, & x \geq 0. \end{cases}$$

【分析】

$$g[f(x)] = \begin{cases} 2-f(x), & f(x) \leq 0, \\ f(x)+2, & f(x) > 0 \end{cases} = \begin{cases} 2-(-x), & x \geq 0, \\ 2+x^2, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2+x^2, & x < 0, \\ 2+x, & x \geq 0. \end{cases}$$

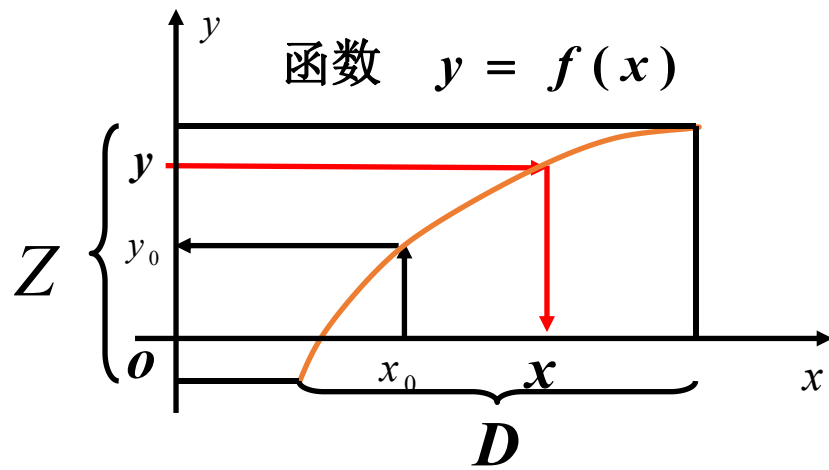
答案： D

6. 反函数 【顶尖考研】

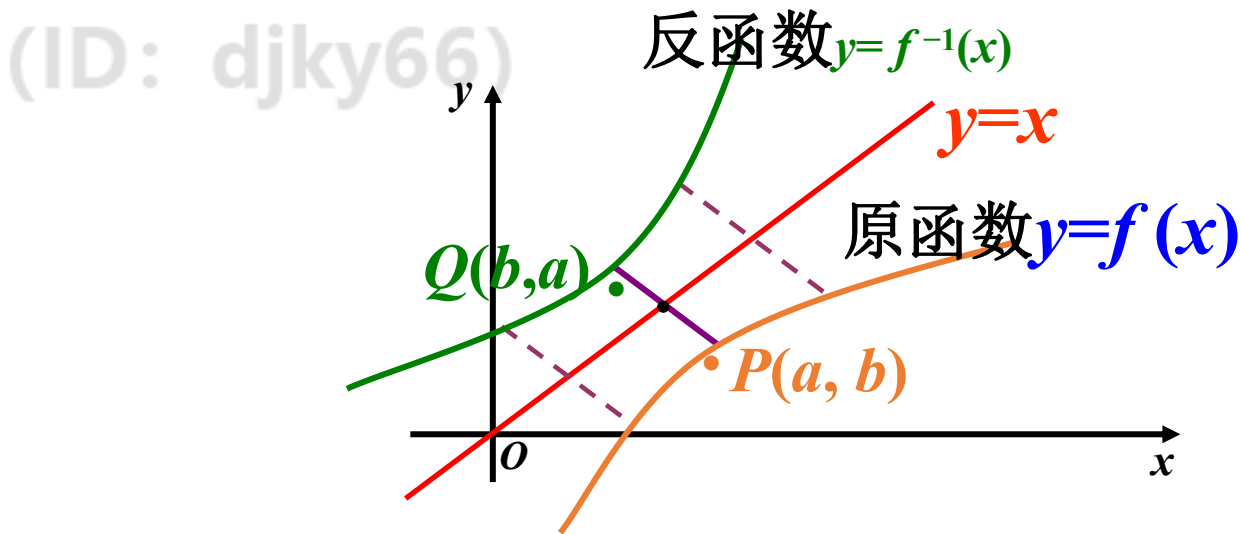
定义 设 $y=f(x)$ 是定义在 $D(f)$ 上的一个函数, 值域为 R_f . 如果对 $\forall y \in R_f$, 通过 $y=f(x)$ 只有唯一确定的值 $x \in D(f)$ 与它对应, 其对应规则记为 f^{-1} , 这个定义在 R_f 上的函数 $x=f^{-1}(y)$ 称为 $y=f(x)$ 的反函数, 或称它们互为反函数.

将 $x=f^{-1}(y)$ 改写为 $y=f^{-1}(x)$

说 $y=f^{-1}(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数.



原函数 $y=f(x)$ 与反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称。



反函数存在定理

单调递增(减)的函数, 必存在反函数, 且反函数也是单调递增(减).

求反函数的步骤

- (1) 从方程 $y=f(x)$ 中用 y 表示 x 得: $x=f^{-1}(y)$;
- (2) 互换上表达式中的 x 与 y , 得 $y=f^{-1}(x)$.
- (3) 求原函数的值域得反函数的定义域.

例5、求双曲正弦函数 $y = shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 的反函数.

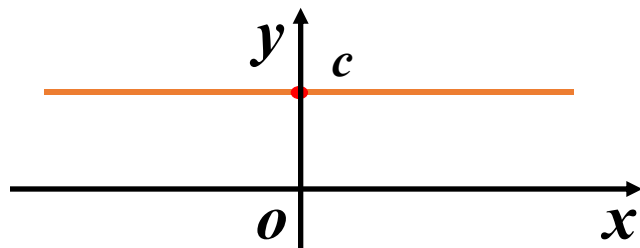
$$y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$$

7. 初等函数

(1) 基本初等函数

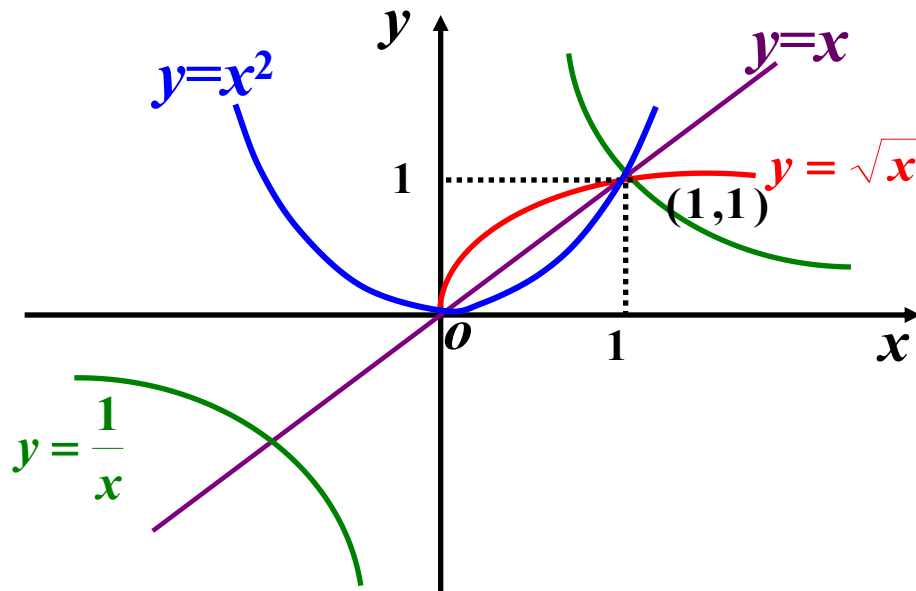
1) 常量函数

$$y = c \quad (c \text{ 为常数})$$



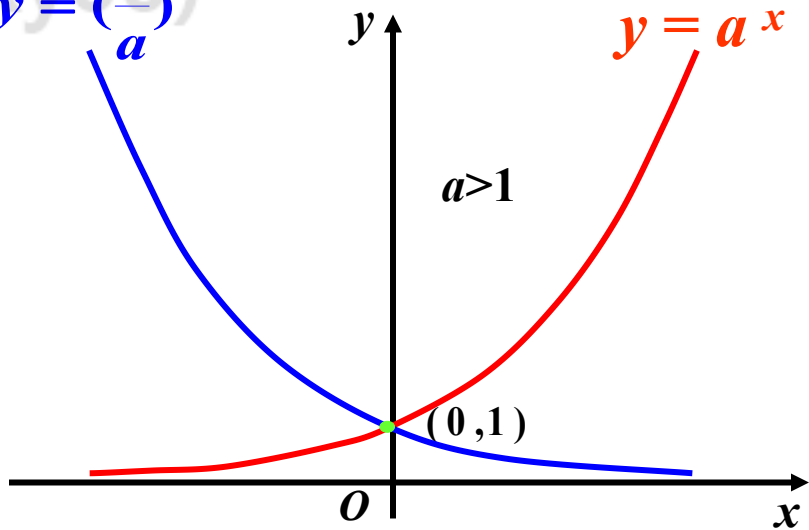
2) 幂函数

$$y = x^\alpha \quad (\alpha \text{ 为常数})$$



2) 指数函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)

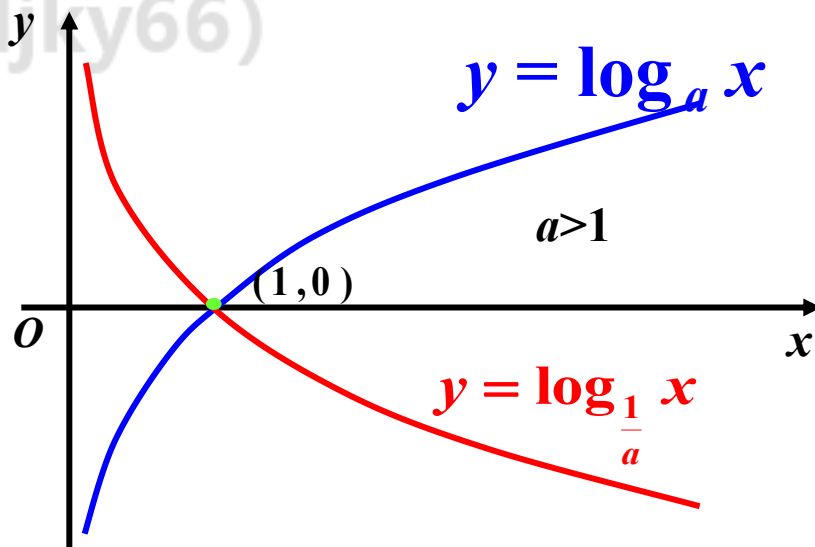
$$y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$$



$$y = e^x$$

3) 对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)

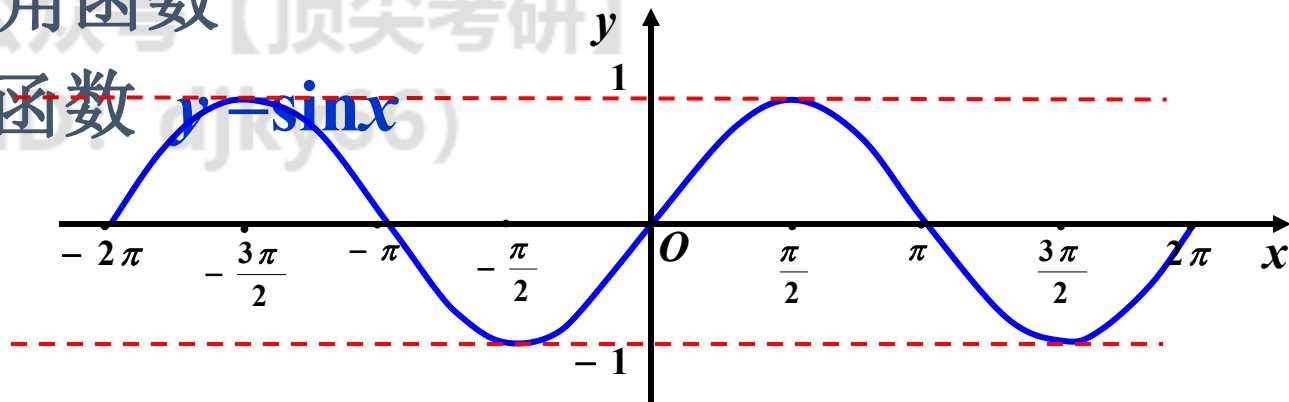
(ID: dky66)



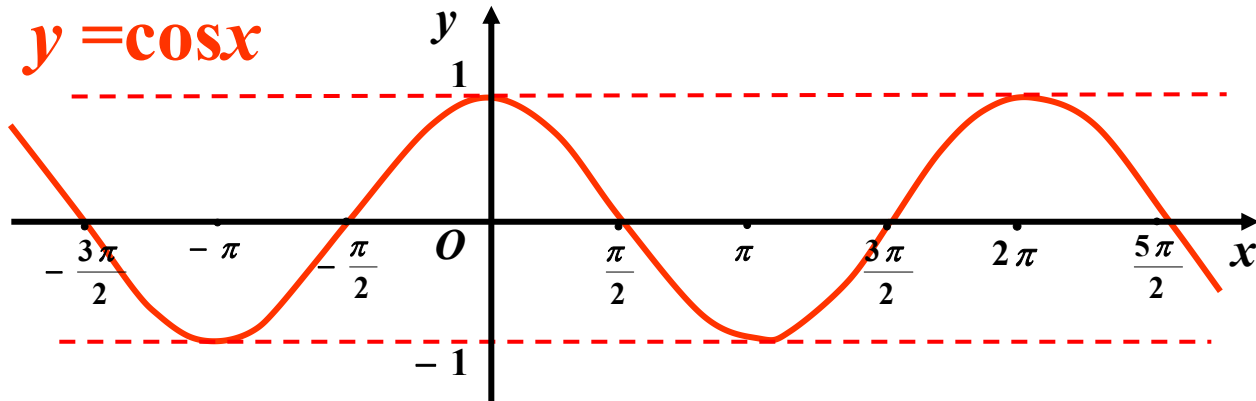
$$y = \ln x$$

4) 三角函数

正弦函数 $y = \sin x$

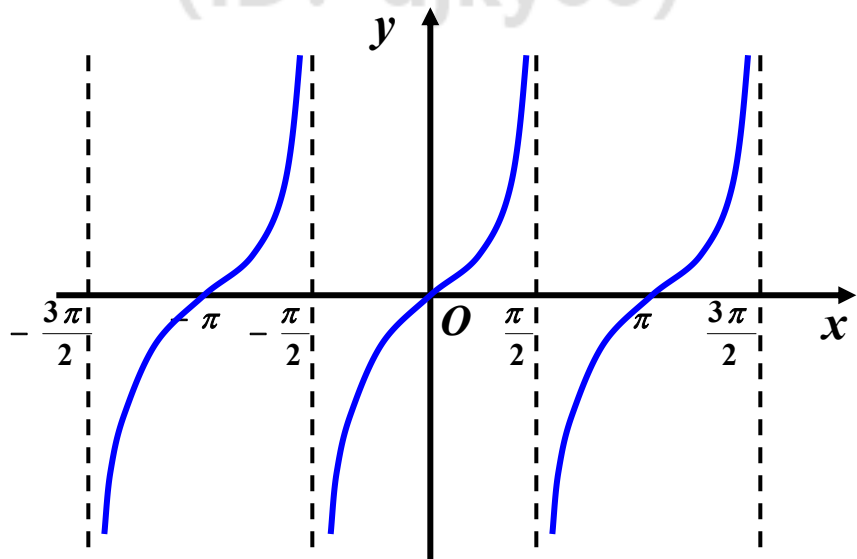


余弦函数 $y = \cos x$

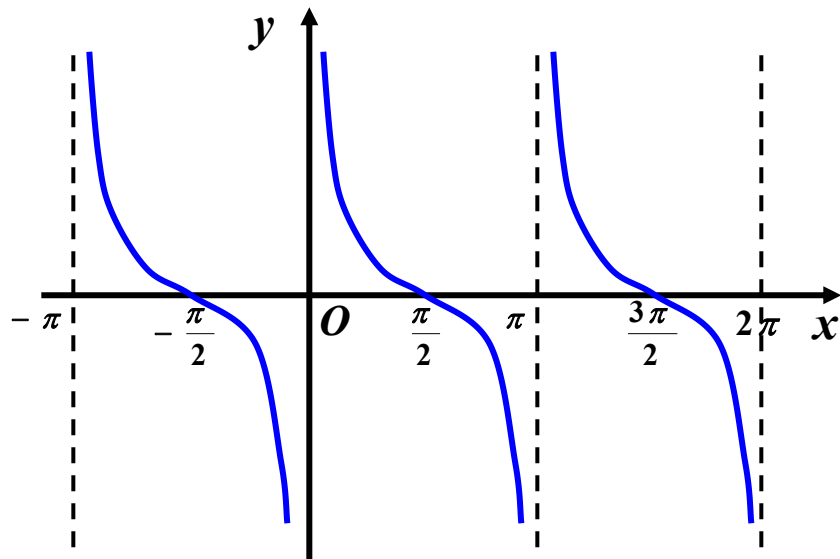


正切函数 $y = \tan x$

(ID: djky66)



余切函数 $y = \cot x$



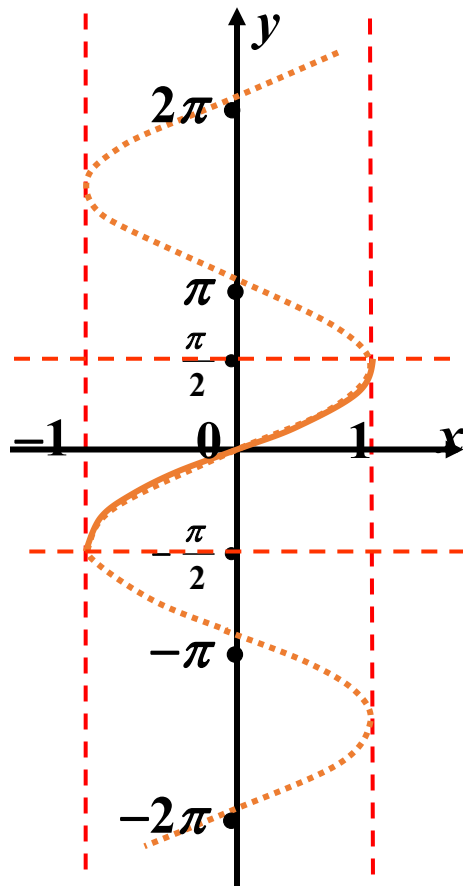
5) 反三角函数

反正弦函数 $y = \text{Arcsin} x$

主值 $y = \arcsin x$

定义域 $[-1, 1]$

值域

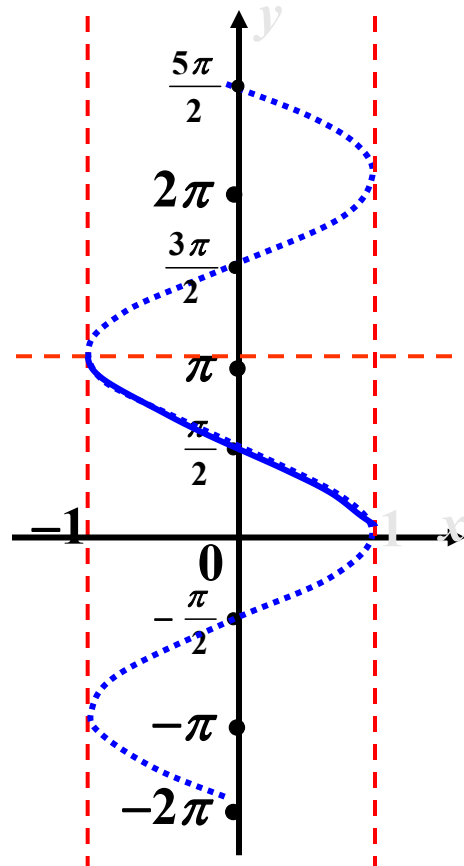


反余弦函数 $y = \text{Arccos} x$

主值 $y = \arccos x$

定义域 $[-1, 1]$

值域 $[0, \pi]$

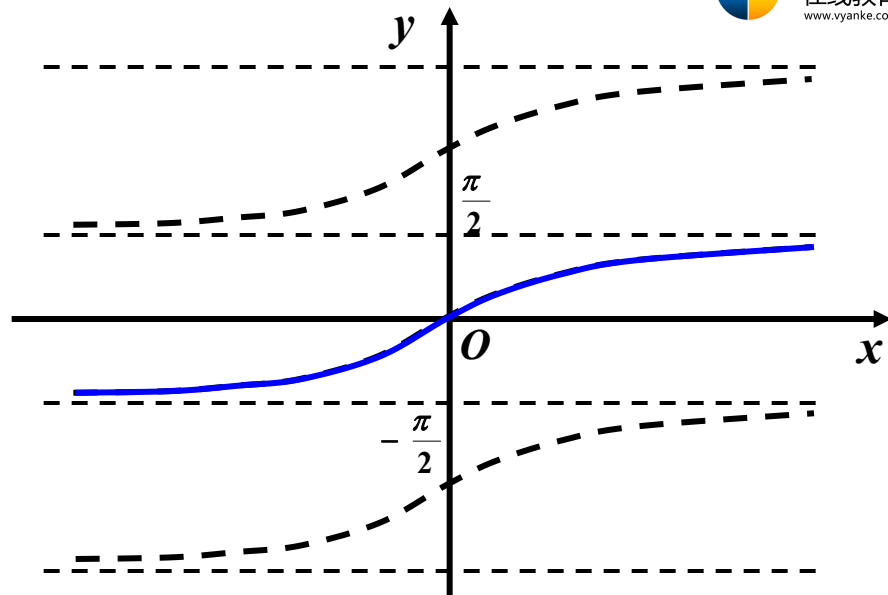


反正切函数 $y = \operatorname{Arctan} x$

主值 $y = \arctan x$

定义域: $(-\infty, +\infty)$,

值域 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

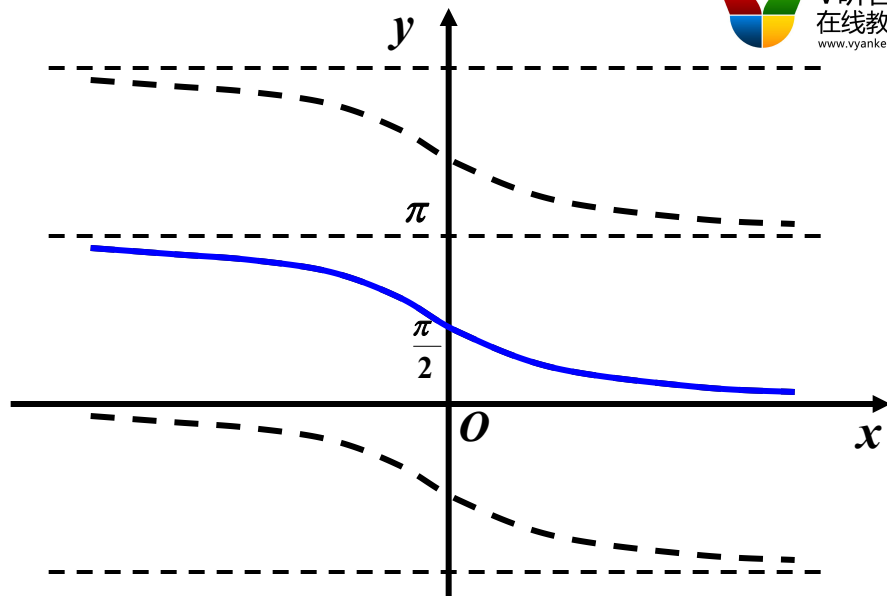


反余切函数 $y = \operatorname{Arccot} x$

主值 $y = \operatorname{arccot} x$

定义域: $(-\infty, +\infty)$

值域: $(0, \pi)$



常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数**。

(2) 初等函数

由**基本初等函数**经过有限次四则运算(加、减、乘、除)和有限次函数复合步骤所构成并可**用一个式子**表示的函数,称为**初等函数**

$$y = \sqrt{1 + \ln(3 + \sqrt{x})}$$

$$y = 3 \sin x^2 + 8a^{-x^2} + \ln(1 + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{\sin(e^x - 1)}{\ln[\arctan(1 + x^2)]}}$$

都是初等函数.

8. 隐函数 【顶尖考研】

设有关关系式 $F(x, y) = 0$, 若对 $\forall x \in D$, 存在惟一确定的 y 满足 $F(x, y) = 0$ 与 x 相对应, 由此确定的 y 与 x 的函数关系 $y = y(x)$ 称为由方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的隐函数.

9. 参数方程确定的函数

由
$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta$$
 确定的函数 $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$.

10. 幂指数函数

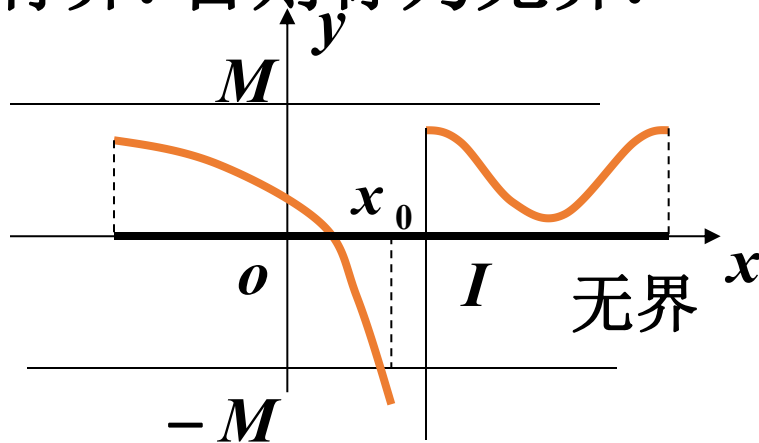
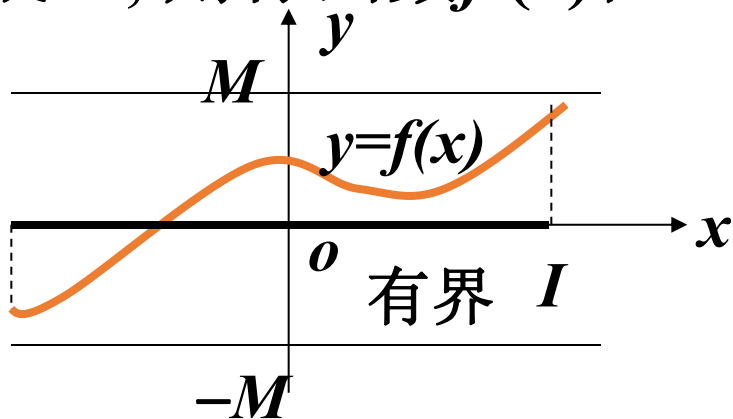
$y = u(x)^{v(x)}$, 其中 $u(x) > 0$.

幂指数函数的讨论常利用恒等式 $u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \ln u(x)}$.

二. 函数的特性

1 函数的有界性:

设函数 $f(x)$ 定义域为 D , 若 $I \subset D$, $\exists M > 0$, 对 $\forall x \in I$, 恒有 $|f(x)| \leq M$ 成立, 则称函数 $f(x)$ 在 I 上有界. 否则称为无界.



例 6、 $y = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上是否有界.

【解】取 $x = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$ 时,有

$$y = (2n\pi + \frac{\pi}{2}) \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow +\infty .$$

故函数是无界的.

判别方法：【顶尖考研】

方法一：直接法：定义本身就是判定 $f(x)$ 是否有界的一种有效方法。

即对 $f(x)$ ，若存在 $M > 0$ ，使得 $|f(x)| \leq M$ ，则 $f(x)$ 有界，否则无界

方法二：间接法：

(1) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有界。

(2) 若 $f(x)$ 在 (a, b) 连续，且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 存在， $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 (a, b) 有界。

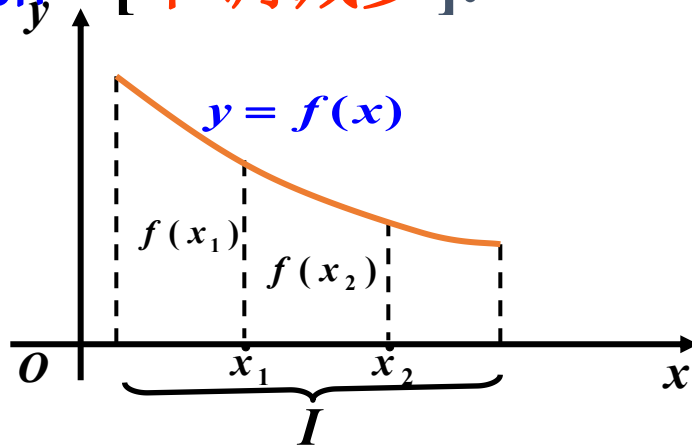
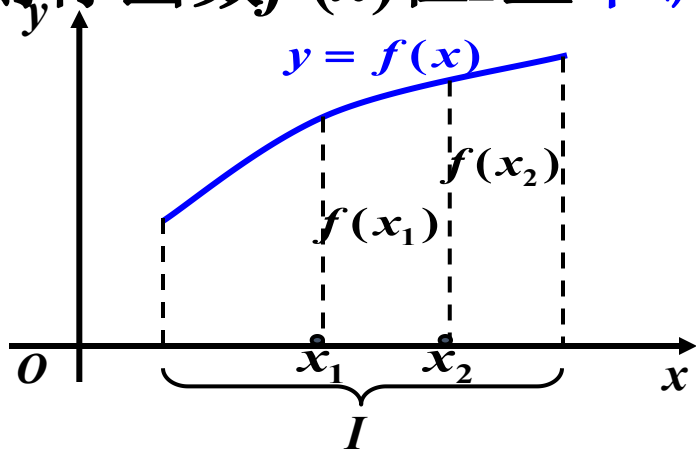
方法三：性质

有界+有界=有界，有界+无界=无界，有界*有界=有界，有界*无界=不确定

2 函数的单调性:

设函数 $f(x)$ 定义域为 D , 区间 $I \subset D$, 如果对 $\forall x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时恒有

则称函数 $f(x)$ 在 I 上 $f(x_1) < f(x_2)$ [$f(x_1) > f(x_2)$]
单调增加 [单调减少].



判别方法:

方法一: 利用定义: 设 $x_1 > x_2$, 计算并判断 $f(x_1) - f(x_2)$ 的符号, 若它大于零, 则单调增加; 若它小于零, 则单调减小.

方法二: 利用导数: 对可导函数 $y = f(x)$, 求 $y' = f'(x)$, 若 $y' > 0$, 则 y 单调增加; 若 $y' < 0$, 则 y 单调减小.

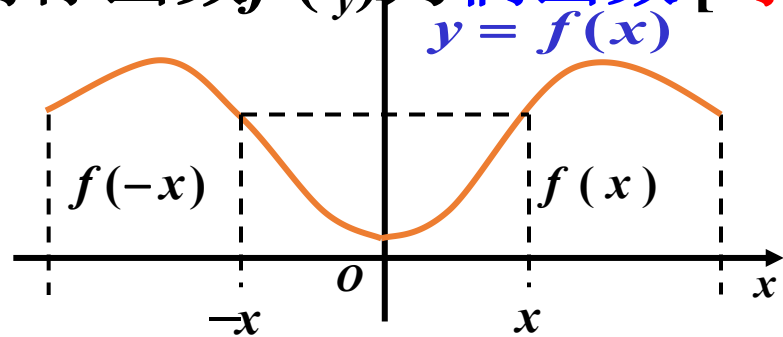
方法三: 利用单调函数复合的性质

(3) 函数的奇偶性:

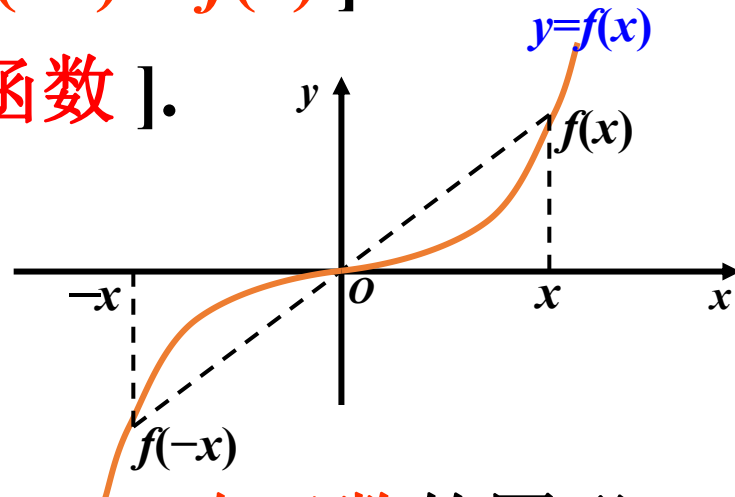
设函数 $f(x)$ 定义域 D 关于原点对称, 若对 $\forall x \in D$, 有

$$f(-x)=f(x) \text{ [} f(-x)=-f(x) \text{]}$$

则称函数 $f(x)$ 为偶函数 [奇函数].



偶函数的图形



奇函数的图形

判别方法:

方法一: 计算 $f(-x) = f(x)$ (或 $-f(x)$), 则 $f(x)$ 是偶(奇)函数.

方法二: 利用运算性质:

奇函数 $\pm$ 奇函数 = 奇函数; 偶函数 $\pm$ 偶函数 = 偶函数

奇函数 $\times$ 偶函数 = 奇函数; 偶函数 $\times$ 偶函数 = 偶函数;

奇函数 $\times$ 奇函数 = 偶函数

复合运算

方法三: 利用导函数与原函数奇偶性:

微信公众号【顶尖考研】

例7 判别下列函数的奇偶性.

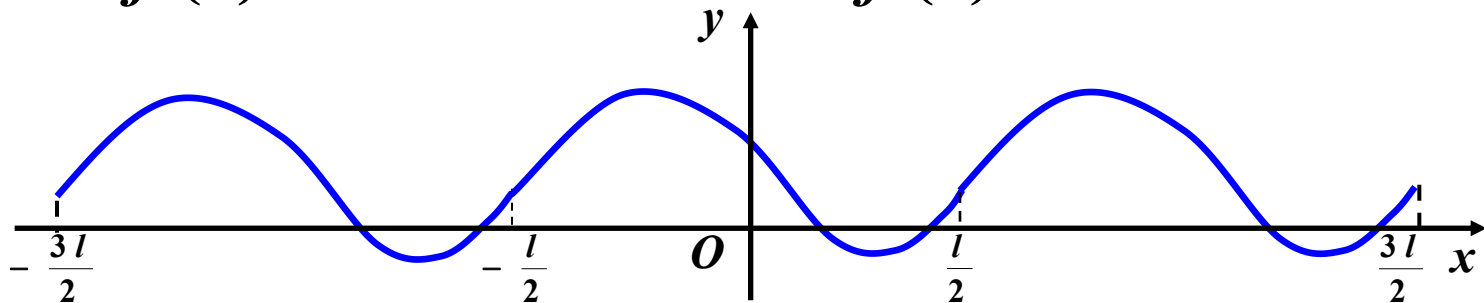
$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

4 函数的周期性:

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在一个正数 l , 使得对 $\forall x \in D$, 有 $(x \pm l) \in D$, 且总有

$$f(x+l)=f(x)$$

则称 $f(x)$ 是周期函数. l 称为 $f(x)$ 的周期.



周期为 l 的周期函数

通常称周期函数的周期是指最小正周期.

判别方法：

方法一：利用定义：计算 $f(x+T)=f(x)$ ，则 $f(x)$ 是以 T 为周期的函数。

方法二：间接法：利用常见周期函数的周期进行判别和计算。

$$f(x+T)=f(x) \Rightarrow f(\omega(x+\frac{T}{\omega}))=f(\omega x+T)=f(\omega x),$$

如，由 $\sin x, \cos x$ 的周期为 2π ，推知：

$|\sin x|, |\cos x|, \sin 2x, \cos 2x$ 的周期为 π ；

由 $\tan x, \cot x$ 的周期为 π ，推知：

$|\tan x|, |\cot x|$ 的周期为 π ， $\tan \frac{x}{2}, \cot \frac{x}{2}$ 的周期为 2π 。

有关函数特性的重要结论

1、可导奇(偶)函数的导函数为偶(奇)函数。

特别：若 $f(x)$ 为偶函数且 $f'(0)$ 存在，则 $f'(0) = 0$

2、若 $f(x)$ 为连续的偶函数，则 $\int_0^x f(t)dt$ 为奇函数；
若 $f(x)$ 为连续的奇函数，则 $\int_a^x f(t)dt$ 为偶函数；

3、可导周期函数的导函数为周期函数。

特别：设 $f(x)$ 以 T 为周期且 $f'(x_0)$ 存在，则

$$f'(x_0 + T) = f'(x_0)。$$

4、设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数，则

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx = \int_{-T/2}^{T/2} f(x)dx ,$$

$$\int_0^{nT} f(x)dx = n \int_0^T f(x)dx$$

5、 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$;
 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$

6、 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续且 $f(a+), f(b-)$ 存在，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界。

常规题型及典型例题

例8 (1990-4)、设 $f(x) = x \tan x e^{\sin x}$, 则 $f(x)$ 是

- (A) 偶函数 (B) 无界函数
(C) 周期函数 (D) 单调函数

答案：B

例 9、对下列函数(1) $\frac{\sin x}{x^2}$ (2) $\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{1-x}}$ (3)

$\arctan \frac{|x|}{x \ln(1-x)}$ 在 $(0,1)$ 内有界的有()个

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

答案： B

(0434)

例10、函数 $f(x) = \frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界

(A) $(-1, 0)$

(B) $(0, 1)$

(C) $(1, 2)$

(D) $(2, 3)$

分析: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$, B、C、D 不对

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\frac{\sin 2}{4}$$

答案: A

例 11、(0534)

以下四个命题中正确的是 ()

- (A) 若 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内连续, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界
- (B) 若 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内连续, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界
- (C) 若 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界
- (D) 若 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界, 则在 $f'(x)$ $(0, 1)$ 内有界

分析: $f(x) = \frac{1}{x}$, (A)、(B) 不正确

$f(x) = \sqrt{x}$, (D) 不正确

答案: C

68

第二节 极限

$$\lim y = A \Leftrightarrow \text{对 } \forall \varepsilon, \exists \text{ 某 } x_0 \mid \\ \text{当 } x > x_0 \text{ 时 } |y - A| < \varepsilon$$

一、极限的概念

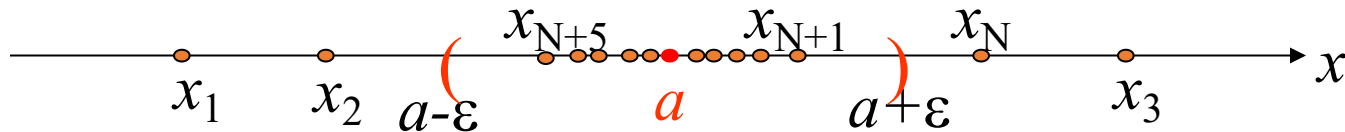
1、数列的极限

定义：设 $\{x_n\}$ 是一个数列， a 是一个常数，
若 $\forall \varepsilon > 0$ ， $\exists$ 自然数 N ，使得当 $n > N$ 时，
都有 $|x_n - a| < \varepsilon$ ，则称 a 是数列 $\{x_n\}$ 当 n 无
限增大时的极限，或称 $\{x_n\}$ 收敛于 a ，

记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ，或 $x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$

这时，也称 $\{x_n\}$ 的极限存在，否则，称 $\{x_n\}$ 的
极限不存在，或称 $\{x_n\}$ 是发散的。

几何意义：由于 $|x_n - a| < \underline{\underline{\varepsilon}} \Leftrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow$
 $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = U(a, \varepsilon)$. 因此, 所谓
所有项 x_n 以 a 为极限, 就是对任何以 a 为心,
以任意小的正数 ε 为半径的 ε 邻域,
总能找到一个 N , 从第 $N+1$ 项开始,
以后各项都落在邻域 $U(a, \varepsilon)$ 内,
而只有有限项落在 $U(a, \varepsilon)$ 外部.



$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k+1} = a$$

例 1 (2006-3-第 1 题) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{(-1)^n} =$

【分析】(1)讨论奇偶；(2)夹逼准则；(3)将其对数恒等化 $N = e^{\ln N}$ 求解。

偶数项 $x_n = \frac{n+1}{n} \rightarrow 1$. 奇数项 $x_n = \left(\frac{n+1}{n} \right)^{-1} \rightarrow 1$

② $\left(\frac{n+1}{n} \right)^{-1} \leq \left(\frac{n+1}{n} \right)^{(-1)^n} \leq \left(\frac{n+1}{n} \right)^1 \rightarrow 1$

【解】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{(-1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln \left(\frac{n+1}{n} \right)^{(-1)^n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \ln \left(\frac{n+1}{n} \right)} = 1$

例2 试证数列 $y_n = 1 + (-1)^{n-1}$ 发散

证 因数列 $\{y_n\} = \{2, 0, 2, 0, 2, 0, \dots, 1 + (-1)^{n-1}, \dots\}$

其奇子数列为: $2, 2, 2, \dots$

收敛于 2 ,

而偶子数列为: $0, 0, 0, \dots$

收敛于 0 ,

$2 \neq 0$, 所以数列 $y_n = 1 + (-1)^{n-1}$ 发散.

数列 $\{y_n\}$ 的奇子数列 $\{y_{2k-1}\}$ 和偶子数列 $\{y_{2k}\}$ 均收敛于同一常数 A 时, 则数列 $\{y_n\}$ 也收敛于 A .

2、函数的极限

自变量趋向无穷大时函数的极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$$

定义 设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义,

草稿 如果存在常数 A , 对于任意给定的正数 ε , 总存在正数 M , 使得当 $|x| > M$ 时, $|f(x) - A| < \varepsilon$.

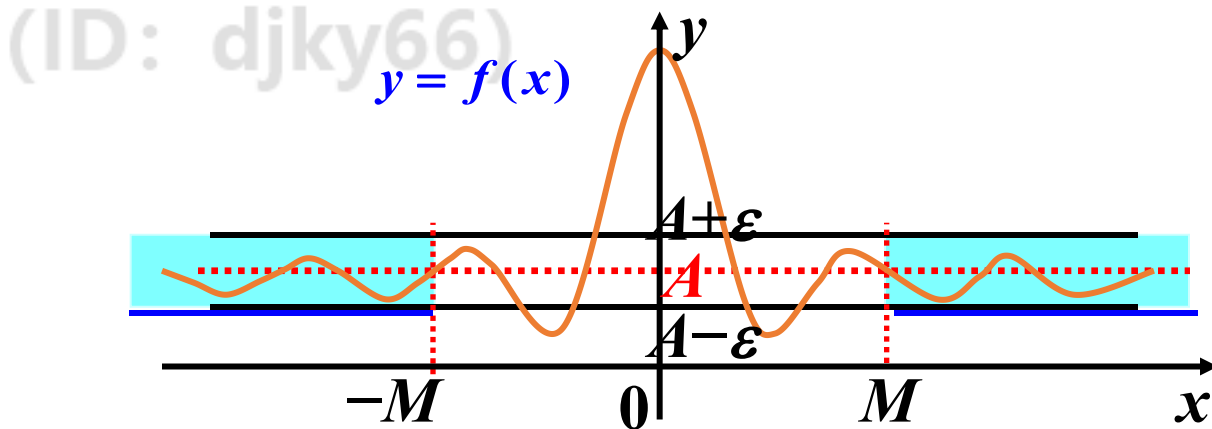
恒成立. 则称当 x 趋于无穷大时, 函数 $f(x)$ 以常数 A 为**极限**. 记作 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow \infty)$.

“ $\varepsilon - M$ ” 定义

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, \text{当 } |x| > M \text{ 时, 恒有}$$

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \underline{f(x)} = A$ 的几何意义



当 $x < -M$ 或 $x > M$ 时, 函数 $y = f(x)$ 的图形完全落在以直线 $y = A$ 为中心线, 宽为 2ε 的带形区域内.

$x \rightarrow +\infty$ 情形

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, \text{当 } \underline{x > M} \text{ 时, 恒有}$$

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

$x \rightarrow -\infty$ 情形

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, \text{当 } x < -M \text{ 时, 恒有}$$

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \underline{f(x)} = A \Leftrightarrow \lim_{\underline{x \rightarrow -\infty}} f(x) = \lim_{\underline{x \rightarrow +\infty}} f(x) = A$$

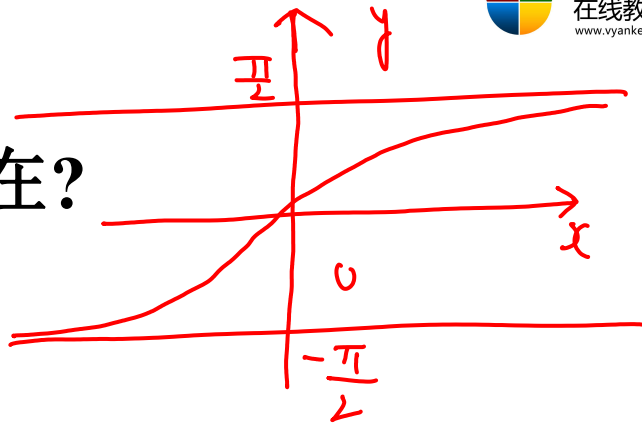
例3 讨论极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$ 是否存在？

解 显然有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2},$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x$ 和 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x$ 虽然都存在，

但它们不相等. 故 $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$ 不存在.



例4 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$ = $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$

~~(A)~~ 等于1 $\xrightarrow{x \rightarrow -\infty}$

(B) 等于-1

(C) 为无穷大

~~(D)~~ 不存在

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = 1 \quad \not\equiv \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}) = -1$$

答案：D

自变量趋向有限值时函数的极限 x_0 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

定义 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 某去心邻域内有定义, 如果存在常数 A , 对于任意给定的正数 ε , 总存在正数 δ , 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|f(x) - A| < \varepsilon$.

恒成立. 则称当 x 趋于 x_0 时, 函数 $f(x)$ 以常数 A 为极限. 记作 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 或 $f(x) \rightarrow A$ ($x \rightarrow x_0$).

“ $\varepsilon - \delta$ ” 定义

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$x \neq x_0$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的几何意义

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$\forall \varepsilon > 0$, 作出带形区域

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon.$$

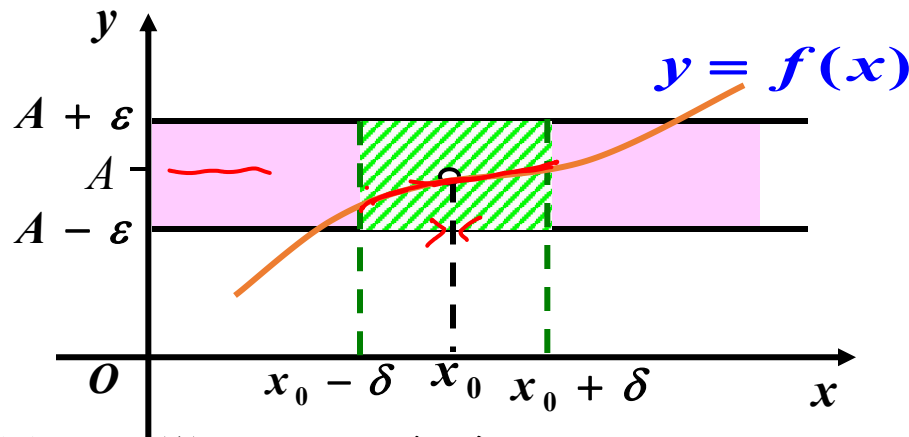
必存在 x_0 的去心邻域

$$0 < |x - x_0| < \delta,$$

对于此邻域内的 x ,

对应的函数图形位于这一带形区域内.

定义中 $0 < |x - x_0|$ 表示 $x \neq x_0$, 所以当 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 有没有极限与 $f(x)$ 在点 x_0 是否有定义并无关系.



微左、右极限(单侧极限)

定义 如果当 x 从 x_0 的左侧趋于 x_0 时,函数 $f(x)$ 越来越接近常数 A ,则称 A 为 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 的左极限.

记为 $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A$

或 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ 或 $f(\underline{x_0 - 0}) = A$ 或 $f(\underline{x_0^-}) = A$.

“ $\varepsilon - \delta$ ”定义

$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 - 0 \\ (x \rightarrow x_0^-)}} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{使当 } \underline{x_0 - \delta} < x < x_0$
时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.



右极限 “ $\varepsilon-\delta$ ” 定义

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0+0 \\ (x \rightarrow x_0^+)}} f(x) = A \text{ 或 } f(\underline{x_0+0}) = A \text{ 或 } f(\underline{x_0^+}) = A.$$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时, 恒有

分取 ε 与 δ 的关系 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

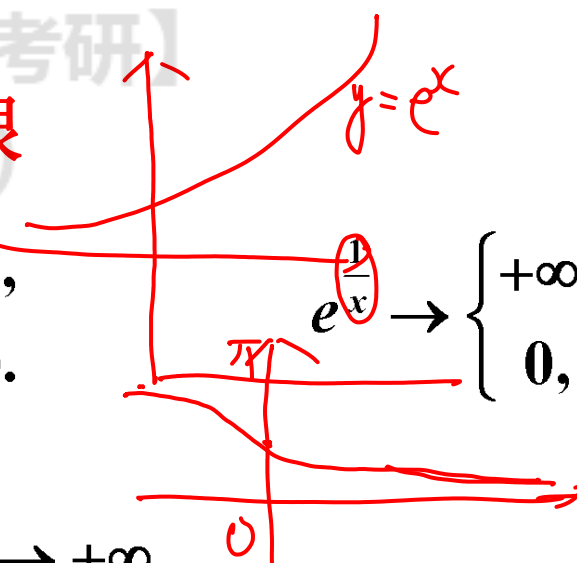
结论

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \underline{f(x_0-0) = f(x_0+0) = A}.$$

几个常见的单侧极限

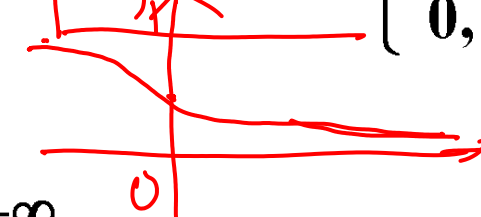
1. $e^x \rightarrow \begin{cases} +\infty, & x \rightarrow +\infty, \\ 0, & x \rightarrow -\infty. \end{cases}$

$e^{\frac{1}{x}} \rightarrow \begin{cases} +\infty, & x \rightarrow 0^+, \\ 0, & x \rightarrow 0^-. \end{cases}$



2. $\arctan x \rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x \rightarrow +\infty, \\ -\frac{\pi}{2}, & x \rightarrow -\infty. \end{cases}$

$\operatorname{arccot} x \rightarrow \begin{cases} 0, & x \rightarrow +\infty, \\ \pi, & x \rightarrow -\infty. \end{cases}$



$\lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$
 0^-

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

例 5 (1992-123) 当 $x \rightarrow 1$ 时, 函数 $\frac{x^2-1}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限

(A) 等于 2. (B) 等于 0. (C) 为 ∞ . (D) 不存在但不为 ∞ .

【详解】 因为 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$, 而 $\lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{1}{x-1}} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$,

故有 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$,

可见, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}}$ 不存在且不为 ∞ . 选(D).

二、极限的性质

1、有界性

(收敛数列的有界性) 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 那么数列 $\{x_n\}$ 一定有界,

即存在常数 $M > 0$, 使得, 对 $\forall n$, 有 $|x_n| \leq M$.

(函数极限的局部有界性) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 那么 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域 $U(x_0, \delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$ 内有界, 即存在常数 $M > 0$ 和 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| \leq M$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \Rightarrow \exists M > 0 \ \exists X > 0 \text{ s.t. } |f(x)| \leq M$$

2、保号性

(收敛数列的保号性) 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 且 $a > 0$ (或 $a < 0$), 那么 $\exists$

正整数 N , 当 $n > N$ 时, 都有 $x_n > 0$ (或 $x_n < 0$). ~~$\frac{a}{2}$~~ , $\frac{a}{2}$

(函数极限的局部保号性) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 而且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 那么存在常数 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$). 如果在 x_0 的某去心邻域内 $f(x) \geq 0$ (或 $f(x) \leq 0$), 而且

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 那么 $A \geq 0$ (或 $A \leq 0$)

1. $f(x) > 0 \nrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$

3、其他性质

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = A$$

(收敛数列与其子数列间的关系) 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a ，那么它的任一子数列也收敛，且极限也是 a 。

(函数极限与数列极限的关系) 如果极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 存在， $\{x_n\}$ 为函数 $f(x)$ 的定义域内任一收敛于 x_0 的数列，且满足： $x_n \neq x_0$ ，那么相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 必收敛，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 。

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$ ，其中 $\alpha(x)$ 是此极限过程下的无穷小量。

例 6 (1995-2) 设 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2} = -1$, 则函数 $f(x)$ 在点 $x = a$ 处

~~(A)~~ 可导, 且 $f'(a) \neq 0$.

(B) 取得极大值.

(C) 取得极小值.

~~(D)~~ 不可导. 【 】

【详解】 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2} \cdot (x - a) = 0,$

即 $f(x)$ 在 $x = a$ 可导 $f'(a) = 0$.

又 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2} = -1$, 由极限的局部保号性得 $\exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x - a| < \delta$ 时

有 $\frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2} < 0$, 即 $f(x) - f(a) < 0$. 故 $f(x)$ 在 $x = a$ 取极大值. 因此选 (B).

【另解】排除法 $f(x) = -(x - a)^2$

$$f'(a) = 0$$

例 7、求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{n} \right)$

分析：令 $x = \frac{1}{n}$

$1 + \alpha(x)$

" 1^∞ "

$$\ln(f(x))^{g(x)} = A^B$$

答案 $e^4 e^4$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + 2x \right) \right]^{\frac{1}{x}} \quad (1^\infty) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{\tan(\frac{\pi}{4} + 2x) - 1}{1} \right)^{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{\tan(\frac{\pi}{4} + 2x) - 1}{x} \cdot x \right)^{\frac{1}{x}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan(\frac{\pi}{4} + 2x) - 1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} 2 \sec^2(\frac{\pi}{4} + 2x)} = e^4 \end{aligned}$$

三、极限的存在准则

1. 夹逼准则 (迫敛性定理)

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \quad U(x_0)$$
$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$$

如果在某个变化过程中, 三个变量 x, y, z 满足:

(1) $y \leq x \leq z$;

(2) $\lim y = \lim z = A$.

则 $\lim x = A$.

数列的夹逼

2. 单调有界准则

单调有界数列必有极限.

数列的单调有界

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$
$$a = f(a)$$
$$x_{n+1} = f(x_n)$$

1° $x_1 < x_2 < x_3$

2° $x_n \leq a$

例8 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right).$

解 $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$

又 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1,$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1,$

由夹逼定理得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1.$$

例9 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \right) = 1$

$$1 \leftarrow \frac{n^2}{n^2+n} \leq \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \leq \frac{n^2}{n^2+1} \rightarrow 1$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

$$x - 1 < [x] \leq x$$

例10 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \left[\frac{2022}{x} \right] = 2022$$

$$\underbrace{1-x}_{\downarrow} = x \left(\frac{1}{x} - 1 \right) < x \left[\frac{1}{x} \right] \leq x \cdot \frac{1}{x} = 1$$

例11 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$

法三、利用收敛级数

法一、夹逼准则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0}{n!} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \quad \underline{\underline{4.222}}$$

$$0 < \frac{2^n}{n!} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2}{1 \times 2 \times 3 \cdots \times n} = \frac{2}{1} \times \frac{2 \times 2 \times \cdots \times 2}{2 \times 3 \cdots \times (n-1)} \times \frac{2}{n} < \frac{4}{n} \rightarrow 0$$

法二、单调有界准则

$$x_n = \frac{2^n}{n!}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2}{n+1} < 1$$

$$\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2}{n+1} \cdot \frac{2^n}{n!}$$

$$x_{n+1} = \frac{2}{n+1} x_n$$

$\{x_n\} \downarrow$

$$Q = 0 \cdot a = 0$$

$$x_n > 0$$

四、无穷小量 (定义 + 例子)

1、定义

$\frac{1}{n} \rightarrow 0$ 极限为零的变量称为无穷小量. 简称为无穷小.
即: $\forall \varepsilon > 0, \exists$ 某个时刻, 从此时刻后, 不等式

$$|y - 0| < \varepsilon$$

恒成立, 则称 y 为无穷小量. 记作 $\lim y = 0$

无穷小量通常用希腊字母: $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ 表示.

$$\begin{aligned} & \text{当 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } x^2 \rightarrow 0 \text{ 为无穷小} \\ & \text{当 } x \rightarrow 1 \text{ 时, } x^2 \rightarrow 1 \end{aligned}$$

2、无穷小量的阶

设 α, β 是同一过程中的两个无穷小量, 且 $\alpha \neq 0$

- (1) 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 就说 β 是比 α 高阶的无穷小量;
- (2) 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$, 就说 β 是比 α 低阶的无穷小量;
- (3) 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = C (C \neq 0)$, 就说 β 与 α 是同阶无穷小量;

特别, 当 $C=1$ 时, 称 β 与 α 是等价无穷小量,

记作 $\alpha \sim \beta$

- (4) 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = C (C \neq 0, k > 0)$

就说 β 是关于 α 的 k 阶无穷小.

例 11(1989-45) 设 $f(x) = 2^x + 3^x - 2$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时

- (A) $f(x)$ 与 x 是等价无穷小量. (B) $f(x)$ 与 x 是同阶但非等价无穷小量.
(C) $f(x)$ 是比 x 高阶的无穷小量. (D) $f(x)$ 是比 x 低阶的无穷小量.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x + 3^x - 2}{x} = \frac{0}{0} \\ & \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} (2^x \ln 2 + 3^x \ln 3) \\ & = \ln 6 \neq 0 \end{aligned}$$

答案: B

3、无穷小量的运算性质：

在同一变化过程中，

有限个无穷小量的代数和仍是无穷小量.

有限个无穷小量的乘积仍是无穷小量.

有界变量与无穷小量的乘积是无穷小量.

五、无穷大量 (15)

1、定义

绝对值无限增大的变量称为无穷大量. 简称无穷大.

即: $\forall E > 0$ (不论它多大), 变量 y 在其变化过程中, 总 $\exists$ 某个时刻, 从此时刻后, 恒有

$$|y| > E. \quad y > E \quad (y < -E)$$

则称 y 为无穷大量, 或称 y 趋于无穷大. 记作 $\lim y = \infty$

特殊情形: 正无穷大, 负无穷大.

记作 $\lim y = +\infty$, 或 $\lim y = -\infty$.

2、常见无穷大量的比较

(ID: djky66)

当 $x \rightarrow +\infty$ (或 $n \rightarrow \infty$) 时, 下列函数(数列)趋于正无穷大的速度越来越快, 或者说越来越大:

($\beta > 0$) $\ln x, x^\alpha (\alpha > 0), a^x (a > 1), x^x$.

或数列 $\ln n, n^\alpha (\alpha > 0), a^n (a > 1), n!, n^n$

于是, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \quad (\alpha > 0), \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad (a > 1), \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty.$

例 12 (2010-3) 设 $f(x) = \ln^{10} x$, $g(x) = x$, $h(x) = e^{\frac{x}{10}}$, 则当 x 充分大时有

(A) $g(x) < h(x) < f(x)$. (B) $h(x) < g(x) < f(x)$.

(C) $f(x) < g(x) < h(x)$. (D) $g(x) < f(x) < h(x)$.

【详解】因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{x}{10}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x}{10}} \cdot \frac{1}{x} = +\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^{10} x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 10 \frac{\ln^9 x \cdot \frac{1}{x}}{1} = 10 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^9 x}{x}$$

$$= 10 \cdot 9 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^8 x \cdot \frac{1}{x}}{1} = \dots = 10 \cdot 9 \dots 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 10! \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

所以当 x 充分大, $f(x) < g(x) < h(x)$.

答案: C

3、无穷大量与无界变量

无穷大量一定是无界变量，但是无界变量 不一定是无穷大量。

如 $y = x \sin x$ 是无界函数，但不是无穷大量。
因为对 $\forall k \in \mathbb{Z}$ ，有

$$\begin{aligned} f(2k\pi + \frac{\pi}{2}) &= (2k\pi + \frac{\pi}{2}) \sin(2k\pi + \frac{\pi}{2}) \\ &= 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow \infty \quad (\text{当 } k \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

$$f(2k\pi) = 2k\pi \sin(2k\pi) = 0$$

所以 $x \rightarrow \infty$ 时， $f(x)$ 不是无穷大量！

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$
 $f(x) \in \mathcal{O}(x_0)$
 $\uparrow$

例 13 数列 $x_n = \begin{cases} n, & n \text{ 为奇数} \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$ ，是无界变量但不是无穷大量

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} (2k+1) = \infty \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = 0$$

例 14(1991-5) 数列 $x_n = \begin{cases} \frac{n^2 + \sqrt{n}}{n}, & n \text{ 为奇数} \\ \frac{1}{n}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$ ，则当 $n \rightarrow \infty$ 时， x_n 是

(A) 无穷大量. (B) 无~~穷~~小量. (C) ~~有~~界变量. (D) 无界变量.

答案: D

4、无穷大量的性质

两个无穷大量的乘积无穷大量

无穷大量与有界变量之和为无穷大量

$$\begin{aligned} \infty \times \frac{1}{x} &= \infty \\ \infty + \infty &= \infty \\ \infty \cdot \infty &= \infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \infty + (-\infty) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \infty + \frac{1}{x} &= \infty \\ +\infty + (+\infty) &= +\infty \end{aligned}$$

5、无穷小与无穷大量的关系.

在某极限过程中, 若 $f(x)$ 为无穷大量, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小量.

反之, 若 $f(x)$ 为无穷小量

($f(x) \neq 0$), 则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大量.

常规题型及典型例题

一、极限的概念、性质

例 15 (1999-2) 对 $\forall \varepsilon \in (0, 1)$, 总存在正整数 N , 当 $n \geq N$ 时, 恒有 $|x_n - a| \leq 2\varepsilon$ 是数列 x_n 收敛于 a 的

(A) 充分条件但非必要条件. (B) 必要条件但非充分条件.

(C) 充分必要条件. (D) 既非充分也非必要条件.

$$\text{取 } \varepsilon = \frac{1}{3} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N, \text{ 当 } n > N \text{ 时 } |x_n - a| < \varepsilon \leq 2\varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |x_n - a| \leq \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon$$

答案! 选 C

例 16 (2015-3-1) 设 $\{x_n\}$ 是数列, 下列命题中不正确的是

(A) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a$ 通分

(B) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

(C) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+1} = a$

(D) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+1} = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+2} = a$

答案: D

例 17、当 $x \rightarrow 0$ 时， $\frac{1}{x^3} \cos \frac{1}{x}$ 是

(A) ~~无穷小~~ (B) 无穷大 (C) ~~有界的但不是无穷小~~

(D) 无界的但不是无穷大 $\frac{1}{x_n^3} \sim \frac{1}{x_n} = (2n\pi)^3 \rightarrow \infty$

分析：考虑特殊序列

$$\frac{1}{y_n^3} \sim \frac{1}{y_n} = 0 \rightarrow 0$$

$$x_n = \frac{1}{2n\pi},$$

$$y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$$

答案：D

例 18、(0334) 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为非负数列,

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = +\infty$ 则必有

(A) $a_n < b_n, \forall n$ (B) $b_n < c_n, \forall n$ $= \infty$

(C) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 不存在 (D) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在

分析: 直接法或用排除法

对 (C) 取 $a_n = \frac{1}{n}, c_n = n$

答案: D

二、求极限 (记)

1、先化简

(1) 约掉零因子 (无穷因子)

(2) 提出极限不为零的因子 (非零因子)

(3) 无穷小替换 (等价)

(4) 根式有理化

" $\infty - \infty$ "

(5) 变量替换 (尤其是倒代换)

2、次定型

3、再选法

(洛必达法则或其它求极限的方法)

上述步骤可重复进行

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x) f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

求极限的求方法

- 四则运算法则
- 函数的连续性
- 两个重要极限
- 等价无穷小替换
- 变量替换
- 洛必达法则
- 左右极限
- 数列极限转化为函数极限
- 夹逼定理
- 单调有界原理
- 定积分的定义
- 导数的定义
- 泰勒公式
- 收敛级数的性质
- 微分中值定理

方法一、利用基本极限

1、两个重要极限

2、几个常用结论

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\ln[1 + f(x)] \sim f(x) \quad (f(x) \rightarrow 0)$$

$$g(x) \ln f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m} = \begin{cases} 0, & n < m, \\ \frac{a_0}{b_0}, & n = m, \\ \infty, & n > m. \end{cases}$$

= $\ln e$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x)^{\frac{1}{x}} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (x)^x = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, a > 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

$$3. \quad \lim f(x) = A > 0, \quad \lim g(x) = B \Rightarrow \lim f(x)^{g(x)} = A^B.$$

$$4. \quad 1^\infty \text{ 型: } \lim f(x)^{g(x)} = e^{\lim g(x) [f(x) - 1]}.$$

例 19、求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{n+1}}{(n+1)^n} \sin \frac{1}{n}$. $\left(\frac{1}{e} \right)$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$$

例 20、求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x e^{a-b}$ "∞"

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-a} \right)^x \cdot \left(\frac{x}{x+b} \right)^x \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left(\frac{x}{x-a} - 1 \right)} \cdot e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left(\frac{x}{x+b} - 1 \right)} \\ &= e^a \cdot e^{-b} = e^{a-b} \end{aligned}$$

例 21、

求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}}{3} \right)^n$$

$(a, b, c > 0).$

$f(x) \rightarrow 0$

$e^x - 1 \sim x$ "∞"

$$\begin{aligned} &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}}{3} - 1 \right)} \\ &= e^{\frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{a} - 1 + \sqrt[n]{b} - 1 + \sqrt[n]{c} - 1 \right)} \\ &= e^{\frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \ln a + \frac{1}{n} \ln b + \frac{1}{n} \ln c \right)} \\ &= e^{\frac{1}{3} \ln(abc)} \\ &= e^{\ln \sqrt[3]{abc}} = \sqrt[3]{abc} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sqrt[n]{a} - 1 \sim \frac{1}{n} \ln a \\ &= e^{\frac{1}{n} \ln a} - 1 \\ &\sim \frac{1}{n} \ln a \end{aligned}$$

方法二、利用等价无穷小代换

1、常用等价无穷小代换 $(+\infty \text{ 和 } 0)$

当 $x \rightarrow 0$ 时, 有 $\boxed{x} \sim \sin \boxed{x} \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x$

$\alpha(x) \rightarrow 0$

$$\sim e^x - 1 \sim \ln(1+x)$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \quad (1+x)^m - 1 \sim mx.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{1}{6}$$

2、拓展等价无穷小代换

$$x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3, \quad x - \arcsin x \sim -\frac{1}{6}x^3, \quad x - \ln(1+x) \sim \frac{1}{2}x^2.$$

$$x - \tan x \sim -\frac{1}{3}x^3, \quad x - \arctan x \sim \frac{1}{3}x^3$$

注: $\alpha \rightarrow 0$
1、 $\underbrace{a^\alpha - 1 = e^{\alpha \ln a} - 1}_{\sim \alpha \ln a}$, $\sqrt{1+\alpha} - 1 \sim \frac{1}{2}\alpha$

2、设 $\alpha(x) \rightarrow 0$, $\beta(x) \rightarrow 0$ 且 $\alpha \sim \alpha'$, $\beta \sim \beta'$

(1) $\lim \alpha(x)f(x) = \lim \alpha'(x)f(x)$ 乘

(2) $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} f(x) = \lim \frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)} f(x)$ (高) $(\frac{0}{0}) \sim x$

(3) $\alpha + o(\alpha) \sim \alpha$ $x \rightarrow 0$ $\underline{x} + \underbrace{1-0.2x}_{\sim \frac{1}{2}x^2} + \underbrace{\tan x^3}_{\sim x^3} \rightarrow 0$

(4) 若 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = A \neq 1$, 则 $\lim(\alpha - \beta) = \lim(\alpha' - \beta')$

(5) 若 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = A \neq -1$, 则 $\lim(\alpha + \beta) = \lim(\alpha' + \beta')$

例 22 (2016-3) 已知函数 $f(x)$ 满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + f(x) \sin 2x} - 1}{e^{3x} - 1} = 2$,

则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \underline{\quad \frac{4}{3} \quad}$.
 (ID: dky66) $\int \frac{1}{x} \rightarrow \ln x$ $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ $\sqrt{1 + \square}^{\frac{1}{2}} - 1 \sim \frac{1}{2} \square$

【详解】因为 $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{3x} - 1) = 0$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1 + f(x) \sin 2x} - 1) = 0$,

即 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \sin 2x = 0$,

有 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} f(x) \sin 2x}{3x} = 2$, 亦是 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \sin 2x}{6x} = 2$,
 $= \frac{\sqrt{f(x)} \cdot \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{6} \text{ (4)}$

从而 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 6$.

例 23 (2015-1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} = \frac{0}{0} = \frac{f(b)-f(a)}{\int_a^b f'(x) dx}$

【详解一】用洛必达法则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\tan x}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

【详解二】用无穷小量等价代换

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \cos x - 1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

【详解三】用拉格朗日中值定理

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x) - \ln 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\xi} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

例 24 (2009-3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1} = \underline{\hspace{2cm}}$

(ID: diky05)

$\frac{f(x) - a}{g(x)}$

【详解 1】无穷小替换

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x} (e^{1-\cos x} - 1)}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1} = e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{1}{3}x^2} = \frac{3}{2}e$$

【详解 2】洛必达法则+无穷小代换

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x}}{\frac{1}{3}x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x e^{\cos x}}{\frac{2}{3}x} = \frac{3}{2}e$$

【详解 3】中值定理+无穷小代换

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\xi} \frac{1 - \cos x}{\frac{1}{3}x^2} = \frac{3}{2}e$$

例 25、(062) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left[\left(\frac{2 + \cos x}{3} \right)^x - 1 \right]$

"0"
0

分析:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2 + \cos x}{3} \right)^x - 1 &= e^{x \ln \frac{2 + \cos x}{3}} - 1 \\ &\sim x \ln \frac{2 + \cos x}{3} \\ &= x \ln \left(1 + \frac{\cos x - 1}{3} \right) \\ &\sim x \frac{\cos x - 1}{3} \sim -\frac{x^3}{6} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left[\left(\frac{2 + \cos x}{3} \right)^x - 1 \right] = -\frac{1}{6}$$

例 26 (2009-2) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)[x - \ln(1 + \tan x)]}{\sin^4 x}$. $\frac{0}{0}$

【详解】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)[x - \ln(1 + \tan x)]}{\sin^4 x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} x^2 [x - \ln(1 + \tan x)]}{x^4}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1 + \tan x)}{x^2} \cdot \frac{0}{0}$$

$$\stackrel{1^\circ}{=} \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \tan x - \sec^2 x}{x(1 + \tan x)} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \tan^2 x}{x} = \frac{1}{4}$$

$$1 - \frac{\sec^2 x}{1 + \tan x} = \frac{0}{0}$$

例 27 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - \sin x}{\arctan x - \tan x}$.

"0"
0

$$24 \overline{) 136} \begin{array}{r} 5 \\ 120 \\ \hline \end{array}$$

5 ~ 6

【详解】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - \sin x}{\arctan x - \tan x}$

$\sim \frac{1}{6}x^3$

$\sim \frac{1}{6}x^3$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - x + x - \sin x}{\arctan x - x + x - \tan x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^3}{-\frac{1}{3}x^3 + (-\frac{1}{3}x^3)} = -\frac{1}{2}$$

方法三、利用有理运算法则

设 $\lim f(x)=A$, $\lim g(x)=B$, 则

$$(1) \quad \lim[f(x) \pm g(x)] = A \pm B ;$$

$$(2) \quad \lim[f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B;$$

$$(3) \quad \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, \quad \text{其中 } \underline{B \neq 0}.$$

注: 结论可以推广到 **有限个** 函数情形.

即: **有限个** 函数的和、差、积、商(分母极限不为零)的极限等于极限的和、差、积、商.

常用的结论:

1、若 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = A$, 则

(i) $\lim g(x) = 0 \Rightarrow \lim f(x) = 0$

(ii) $\lim f(x) = 0, A \neq 0 \Rightarrow \lim g(x) = 0$

2、若 $\lim f(x)g(x) = A$, 则

(i) $\lim f(x) = \infty \Rightarrow \lim g(x) = 0$

(ii) $\lim f(x) = 0, A \neq 0 \Rightarrow \lim g(x) = \infty$

$$= A \cdot 0 = 0$$

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x)$$

$$\lim (f(x) \cdot g(x)) \cdot \frac{1}{g(x)} = A \cdot 0 = 0$$

例 28 (2010-3-1) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x} - a \right) e^x \right] = 1$, 则 a 等于

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

【详解】 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x} - a \right) e^x \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - ax)e^x}{x} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - e^x}{x} + ae^x \right) = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} + a = -1 + a = 1,$$

所以 $a = 2$. 因此应选(C).

例 29(2018-3) 已知实数 a, b 满足 $\lim_{x \rightarrow 0} |(ax + b)e^x - x| = 2$, 求 a, b

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(ax + b)e^{\frac{1}{x}} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} be^{\frac{1}{x}} + \lim_{x \rightarrow +\infty} x(ae^{\frac{1}{x}} - 1)$$

$$= b + \lim_{x \rightarrow +\infty} x(ae^{\frac{1}{x}} - 1) = 2 \Rightarrow a = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow b+1=2 \Rightarrow b=1$$

$$\lambda \cdot 0 \rightarrow 0 \Rightarrow \lambda x \rightarrow 0 \Rightarrow a-1=0$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(ax + b)e^{\frac{1}{x}} - x \right] = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(a + bt)e^t - 1}{t} = 2$$

例 30 (2004-3) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - a} (\cos x - b) = 5$, 则 $a = \underline{\quad}$, $b = \underline{\quad}$.

$5 \neq 0$ $\text{分母} \rightarrow 0$

【详解】因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot (\cos x - b) = 0$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - a) = 0$, 得 $a = 1$.

极限化为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - 1} (\cos x - b) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} (\cos x - b) = 1 - b = 5, \text{ 得 } b = -4.$$

因此, $a = 1$, $b = -4$.

例 31 (1997-2) 求极限 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1} + x + 1}{\sqrt{x^2 + \sin x}} \cdot \frac{\infty}{\infty}$

【详解 1】分子分母同除以 x ，再由极限的四则运算法则得

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1} + x + 1}{\sqrt{x^2 + \sin x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} + 1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{\sin x}{x^2}}}$$

$$= \frac{-2 + 1}{-1} = 1.$$

【详解 2】令 $x = -t$ ，则

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1} + x + 1}{\sqrt{x^2 + \sin x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4t^2 - t - 1} - t + 1}{\sqrt{t^2 - \sin t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4 - \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}} - 1 + \frac{1}{t}}{\sqrt{1 - \frac{\sin t}{t^2}}} = 1.$$

方法四、利用洛必达法则

$$\frac{0}{0}$$

设函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 满足条件:

(1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$;

(2) 在 a 点的某去心邻域内可导且 $g'(x) \neq 0$;

(3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ (或 ∞);

则必有 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

设函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 满足条件:

(1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$;

(2) 在 a 点的某去心邻域内可导且 $g'(x) \neq 0$;

(3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A(\text{或 } \infty)$;

则 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

当 $x \rightarrow \infty$ 时, 洛必达法则仍然成立.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

当 $x \rightarrow a+0, x \rightarrow a-0, x \rightarrow -\infty, x \rightarrow +\infty$ 时,

该法则仍然成立

Handwritten notes and examples:

- $\frac{\infty}{\infty}$ (circled)
- $\frac{0}{0}$ (circled)
- $\frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{\frac{1}{\infty}} = \frac{1}{0}$
- $\frac{\infty - \infty}{\infty - \infty}$ (circled)
- $\frac{0^0}{0^0} = \frac{1}{1} = 1$ (circled)
- $\frac{\infty^0}{\infty^0} = \frac{e^{\infty \cdot 0}}{e^{\infty \cdot 0}} = \frac{e^{\infty}}{e^{\infty}} = 1$ (circled)
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{\sin x}{x}}{-\frac{\sin x}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x} = \frac{\infty}{\infty}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} = \frac{\infty}{\infty}$ (circled)
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + \sin x}{e^x - \sin x} = \frac{\infty}{\infty}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + \cos x}{e^x - \cos x} = \frac{\infty}{\infty}$

微信公众账号: V研客

$1' = 1$

$\infty' = \infty$

$0' = 0$

$1' = 1$

∞



例 32 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \cos(x-1)}{1 - \sin \frac{\pi}{2} x}$. $\frac{0}{0}$

【详解】 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \cos(x-1)}{1 - \sin \frac{\pi}{2} x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\tan(x-1)}{-\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} x}$ $\frac{0}{0}$

$\ln[1 + O(x-1)] \sim O(x-1) \sim \frac{1}{2}(x-1)^2$

$$= -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\frac{\pi}{2})^2 \sin \frac{\pi}{2} x} = -\frac{4}{\pi^2} \checkmark$$

例 33(1988-3) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x^2) \tan \frac{\pi}{2} x$.
 手标: $\frac{0 \cdot \infty}{\frac{0}{0}}$
 手标: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\cos \frac{\pi}{2} x} = \frac{0}{0}$

【详解】 $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x^2) \tan \frac{\pi}{2} x = \lim_{x \rightarrow 1} (1+x)(1-x) \frac{\sin \frac{\pi}{2} x}{\cos \frac{\pi}{2} x}$

$= 2 \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2} x} = 2 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{-\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} x} = \frac{4}{\pi}$ ✓

例 34 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$. “ $\infty \cdot 0$ ”

【详解】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x}}$ “ $\frac{\infty}{\infty}$ ”

$\frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)}{1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}} = 1$$

例 35、求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x^3 - x^2 + \frac{x}{2})e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6 + 1} \right]$

(ID: qjky56)

解: 令 $x = \frac{1}{t}$ (倒代换) $t \rightarrow 0^+$ " $\infty - \infty$ "

原式 = $\lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\left(\frac{1}{t^3} - \frac{1}{t^2} + \frac{1}{2t} \right) e^t - \frac{\sqrt{t^6 + 1}}{t^3} \right]$

↑
↓

= $\lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\frac{(2 - 2t + t^2)e^t - 2\sqrt{t^6 + 1}}{2t^3} \right]$

" $\frac{0}{0}$ "

洛
= $\lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\frac{t^2 e^t - \frac{6t^5}{\sqrt{t^6 + 1}}}{6t^2} \right] = \frac{1}{6}$ ✓

例 36 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - e^{x^{2021}})[\sin x - \ln(1 + \tan x)]}{\ln(1 - x^{2023})}$.

"0" "0" "43"

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - e^{x^{2021}})[\sin x - \ln(1 + \tan x)]}{\ln(1 - x^{2023})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^{2021}[\sin x - \ln(1 + \tan x)]}{-x^{2023}}$

$x - x \tan x$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \ln(1 + \tan x)}{x^2} = 0 \frac{0}{0}$

$x \cos^3 x - 1 = (\cos x - 1)(\cos^2 x + \cos x + 1)$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \frac{\sec^2 x}{1 + \tan x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^3 x(1 + \tan x) - 1}{2x(1 + \tan x)\cos^2 x}$

$\frac{0}{0}$

$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^3 x - 1 + \sin x \cos^2 x}{x} = \frac{1}{2}$

例 37 设 $f(x)$ 二阶可导, $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=2$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2}$

【详解】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - \overset{f'(0)}{1}}{2x}$ "0" $\frac{0}{0}$ $f'(x) = f'(0) = 1$ "0" $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{2x} = \frac{1}{2} f''(0) = 1$$

注: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\underline{f''(x)}}{2} \neq \frac{f''(0)}{2} = 1$? $\frac{f''(0)}{2}$ $\frac{f''(0)}{2}$

方法五、利用泰勒公式

泰勒中值定理

$$x_0 = 0$$

如果函数 $f(x)$ 在含有 x_0 的某个开区间 (a, b) 内具有直到 n 阶导数, 则当 x 在 (a, b) 内时, $f(x)$ 可以表示为 $x - x_0$ 的一个 n 次多项式与一个余项之和, 即

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

(注: 图中有红色标注 "n阶" 和 "余项", 以及 "f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)" 中的 "f(x)" 被圈出)

常用的泰勒公式

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3),$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^5),$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4),$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + o(x^3)$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2 + \dots$$

例 38 设 $f(x)$ 二阶可导, $f(0)=0, f'(0)=1, f''(0)=2$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-x}{x^2}$

【详解】 $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + o(x^2)$

$$= x + x^2 + o(x^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{x^2} = 1$$

例 39 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$. $\frac{0}{0}$

【详解】 $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$

$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12}$

例 40 (1994-3)、设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - (ax + bx^2)}{x^2} = 2$, 求 a, b

【详解 1】用泰勒公式

$$\text{分子} = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - ax - bx^2 = (1-a)x - \left(\frac{1}{2} + b\right)x^2 + o(x^2)$$

$$\text{有 } 1-a=0, -\left(\frac{1}{2} + b\right) = 2 \Rightarrow a=1, b=-\frac{5}{2}$$

【详解 2】用洛必达法则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - a - 2bx}{2x} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-a - (a+2b)x - 2bx^2}{2x(1+x)} = 2$$

$$\text{因而 } 1-a=0, -\frac{a+2b}{2} = 2 \Rightarrow a=1, b=-\frac{5}{2}$$

例 40 (1994-3)、设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - (ax + bx^2)}{x^2} = 2$, 求 a, b

【详解3】 原题为选择题可代入

【详解4】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - (ax + bx^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - (ax + bx^2)}{x} = 2$

有 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - (ax + bx^2)}{x} = 0 \Rightarrow a = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - (ax + bx^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x - bx^2}{x^2} = -\frac{1}{2} - b = 2 \Rightarrow b = -\frac{5}{2}$

例 41 (2000-2) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2}$.

【详解 1】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - \frac{(6x)^3}{3!} + o(x^3) + xf(x)}{x^3}$

$$= -36 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2} = 36,$$

【详解 2】 因为 $\frac{6 + f(x)}{x^2} = \frac{6x + xf(x)}{x^3} = \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} + \frac{6x - \sin 6x}{x^3},$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - \sin 6x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 - 6 \cos 6x}{\frac{1}{2} 3x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{x^2}$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^2} = 36 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2} = 36,$$

例 41 (2000-2) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2}$.

【详解 3】

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x - 6x + 6x + xf(x)}{x^3} = 0,$$

$y = A$

$\Leftrightarrow y = A + \alpha$
($\alpha \rightarrow 0$)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - \sin 6x}{x^3} = 36, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2} = 36$$

【详解 4】

$$\frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = \alpha(x) (\alpha(x) \rightarrow 0) \Rightarrow f(x) = x^2 \alpha(x) - \frac{\sin 6x}{x},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + x^2 \alpha(x) - \frac{\sin 6x}{x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - \sin 6x}{x^3} = 36$$

注: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x + xf(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2} = 0$

方法六、利用夹逼准则 — 求 n 项和 n 项极限

例42(1995-3) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + n} \right)$.

分析: $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n} \leq \frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n} \leq \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}$$

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n} = \frac{n(n+1)}{2(n^2+n+n)} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1} = \frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)} \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n} \right) = \frac{1}{2}$$

例 43、求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + 2^n + 3^n}$

分析 1: 用夹逼准则 $3^n \leq 1 + 2^n + 3^n \leq 3 \times 3^n = 3^{n+1} \rightarrow 3$

$$3 \leq \sqrt[n]{1 + 2^n + 3^n} \leq \sqrt[n]{3 \times 3^n} = 3 \sqrt[n]{3} \rightarrow 3$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + 2^n + 3^n} = 3$$

$$\left(\left(\frac{1}{3} \right)^n + \left(\frac{2}{3} \right)^n + 1 \right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$$

分析 2: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + 2^n + 3^n} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{3} \right)^n + \left(\frac{2}{3} \right)^n + 1} = 3$

例 44、设 $a_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, a = \max\{a_1, \dots, a_k\}$,

证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + \dots + a_k^n} = a$

分析：用夹逼准则

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0$$

$$a = \sqrt[n]{a^n} \leq \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n} \leq \sqrt[n]{ka^n} = a \sqrt[n]{k} \rightarrow a$$

因而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + \dots + a_k^n} = a$

注：记住此结论

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

例 45(2008-4) 设 $0 < a < b$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a^{-n} + b^{-n})^{\frac{1}{n}} = \underline{\hspace{2cm}}$

- (A) a (B) a^{-1} (C) b (D) b^{-1}

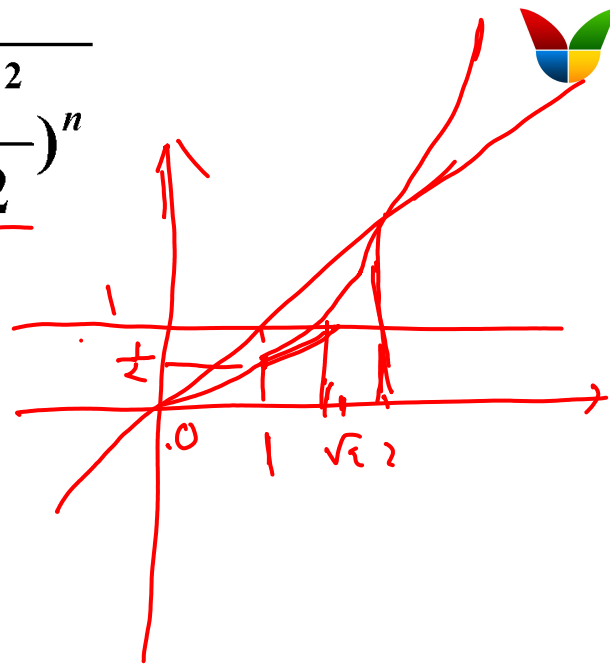
$$\sqrt[n]{\left(\frac{1}{a}\right)^n + \left(\frac{1}{b}\right)^n} \rightarrow \max\left\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right\} \\ = \frac{1}{a} = a^{-1}$$

答案: B

例 46 设 $x > 0$ ，求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n + (\frac{x^2}{2})^n}$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n + (\frac{x^2}{2})^n} = \max\{1, x, \frac{x^2}{2}\},$

$$= \begin{cases} 1, & 0 < x < 1; \\ x, & 1 \leq x < 2; \\ \frac{x^2}{2}, & 2 \leq x. \end{cases}$$



微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

例 47 设 $x \geq 0$, 求极限 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\underline{x^n} + \underline{x^{2n}} + \frac{1}{\underline{2^n}} x^{3n}}$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x^n + x^{2n} + \frac{1}{2^n} x^{3n}} = \max\{\underline{x}, \underline{x^2}, \frac{\underline{x^3}}{\underline{2}}\},$

$$= \begin{cases} \underline{x}, & 0 \leq x < 1; \\ \underline{x^2}, & 1 \leq x < 2; \\ \frac{\underline{x^3}}{\underline{2}}, & 2 \leq x. \end{cases}$$

$y=x \quad y=x^2 \quad y=\frac{x^3}{2} \quad (\frac{x^3}{2})^n$

方法七、利用单调有界原理

例 48、设 $x_1 > 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{1}{x_n})$ ($n = 1, 2, \dots$) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

(Handwritten notes: 证明, 递推公式, $x_{n+1} = f(x_n)$, $a = \frac{1}{2}(a + \frac{1}{a})$, $a = 1$)

分析: $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{1}{x_n}) \geq \sqrt{x_n \cdot \frac{1}{x_n}} = 1$

(Handwritten notes: $\{x_n\} \downarrow$, $x_{n+1} \leq x_n$)

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}(\frac{1 - x_n^2}{x_n}) \leq 0 \text{ or } \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{x_n^2}) \leq 1$$

(Handwritten notes: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$)

数列 x_n 单调递减有下界, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

两边取极限 $a = \frac{1}{2}(a + \frac{1}{a}) \Rightarrow \underline{a = 1}$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.

例 49、设 $x_1 = 10, x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n} \ (n = 1, 2, \dots)$ 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \exists$ ，并求其解

分析：若极限存在，设其为 a ，则 $a = \sqrt{6 + a} \Rightarrow a = 3$
 $x_2 < x_1$ ，可能递减

(1) 数学归纳法证 $x_n > 3$ ，(2) 再证 $x_{n+1} < x_n$

方法八、利用定积分的定义(第五章)

无穷小量的阶

设 α, β 是同一过程中的两个无穷小量, 且 $\alpha \neq 0$

(1) 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 就说 β 是比 α 高阶的无穷小量;

(2) 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$, 就说 β 是比 α 低阶的无穷小量;
 记作 $\beta = o(\alpha)$.

(3) 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = C (C \neq 0)$, 就说 β 与 α 是同阶无穷小量;

特别, 当 $C=1$ 时, 称 β 与 α 是等价无穷小量,

记作 $\alpha \sim \beta$.

(4) 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = C (C \neq 0, k > 0)$

就说 β 是关于 α 的 k 阶无穷小.

1、常用等价无穷小代换

当 $x \rightarrow 0$ 时, 有 $x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \quad (1+x)^m - 1 \sim mx.$$

2、拓展等价无穷小代换

$$x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3, \quad x - \arcsin x \sim -\frac{1}{6}x^3, \quad x - \ln(1+x) \sim \frac{1}{2}x^2.$$

$$x - \tan x \sim -\frac{1}{3}x^3, \quad x - \arctan x \sim \frac{1}{3}x^3$$

三、无穷小量阶的比较

例 50(2005-2) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\alpha(x) = kx^2$ 与 $\beta(x) = \sqrt{1+x \arcsin x} - \sqrt{\cos x}$

是等价无穷小, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

【详解 1】 由题设, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \arcsin x} - \sqrt{\cos x}}{kx^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arcsin x + 1 - \cos x}{kx^2 (\sqrt{1+x \arcsin x} + \sqrt{\cos x})}$$

$$= \frac{1}{2k} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arcsin x + 1 - \cos x}{x^2}$$

$$= \frac{1}{2k} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arcsin x}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{3}{4k} = 1, \text{ 得 } k = \frac{3}{4}.$$

例 50(2005-2) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\alpha(x) = kx^2$ 与 $\beta(x) = \sqrt{1+x \arcsin x} - \sqrt{\cos x}$

是等价无穷小, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

【详解 2】 由题设,
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \arcsin x} - \sqrt{\cos x}}{kx^2}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arcsin x + 1 - \cos x}{2\sqrt{x} kx^2} = \frac{1}{2k} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arcsin x}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \right) = \frac{3}{4k}$$

【详解 3】
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \arcsin x} - \sqrt{\cos x}}{kx^2}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \arcsin x} - 1 - (\sqrt{1+\cos x} - 1)}{kx^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} x \arcsin x - \frac{1}{2} (\cos x - 1)}{kx^2}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4} x^2}{kx^2} = \frac{3}{4k}$$

例 51(2001-2) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1 - \cos x) \ln(1 + x^2)$ 是比 $x \sin x^n$ 高阶的无穷小, 而 $x \sin x^n$ 是比 $e^{x^2} - 1$ 高阶的无穷小, 则正整数 $n =$ _____

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4 .

【分析】 $(1 - \cos x) \ln(1 + x^2) \sim \frac{1}{2} x^4$

$$x \sin x^n \sim x^{n+1}, \quad e^{x^2} - 1 \sim x^2$$

$$4 > n + 1 > 2 \Rightarrow n = 2$$

答案: B

例 52(2014-2-1) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 若 $\ln^\alpha(1+2x), (1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 高阶的无穷小, 则 α 的取值范围是

- (A) $(2, +\infty)$. (B) $(1, 2)$. (C) $(\frac{1}{2}, 1)$. (D) $(0, \frac{1}{2})$.

【详解】 由 $\ln^\alpha(1+2x) \sim (2x)^\alpha, (1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}} \sim (\frac{1}{2}x^2)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{\alpha}}} x^{\frac{2}{\alpha}}$

$\alpha > 1$ 且 $\frac{2}{\alpha} > 1$, 即 $1 < \alpha < 2$. 选 (B).

例 53(2016-2-1) 设 $\alpha_1 = x(\cos \sqrt{x} - 1)$, $\alpha_2 = \sqrt{x} \ln(1 + \sqrt[3]{x})$, $\alpha_3 = \sqrt[3]{x+1} - 1$,

当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 以上 3 个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是

(A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

(B) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1$.

(C) $\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3$.

(D) $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1$.

【详解】

$$\alpha_1 = x(\cos \sqrt{x} - 1): \quad x\left(-\frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{2}x^2,$$

$$\alpha_2 = \sqrt{x} \ln(1 + \sqrt[3]{x}): \quad \sqrt{x} \sqrt[3]{x} = x^{\frac{5}{6}},$$

$$\alpha_3 = \sqrt[3]{x+1} - 1: \quad \frac{1}{3}x.$$

答案: B

例 54(2020-3) 已知 a, b 为常数, 若 $(1 + \frac{1}{n})^n - e$ 与 $\frac{b}{n^a}$ 在 $n \rightarrow \infty$ 时是等价无穷小, 求 a, b .

【详解 1】 $(1 + \frac{1}{n})^n - e = e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})} - e = e(e^{n \ln(1 + \frac{1}{n}) - 1} - 1)$

$$\sim e[n \ln(1 + \frac{1}{n}) - 1] = en[\ln(1 + \frac{1}{n}) - \frac{1}{n}]$$

$$\sim en(-\frac{1}{2} \frac{1}{n^2}) = -\frac{e}{2n}$$

所以 $a = 1, b = -\frac{e}{2}$.

例 54(2020-3) 已知 a, b 为常数, 若 $(1 + \frac{1}{n})^n - e$ 与 $\frac{b}{n^a}$ 在 $n \rightarrow \infty$ 时是等价无穷小, 求 a, b .

【详解 2】 $(1 + \frac{1}{n})^n - e = e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})} - e = e^\xi (n \ln(1 + \frac{1}{n}) - 1)$

$$\sim e[n \ln(1 + \frac{1}{n}) - 1] = en[\ln(1 + \frac{1}{n}) - \frac{1}{n}]$$

$$\sim en(-\frac{1}{2} \frac{1}{n^2}) = -\frac{e}{2n}$$

所以 $a = 1, b = -\frac{e}{2}$.

例 54(2020-3) 已知 a, b 为常数, 若 $(1 + \frac{1}{n})^n - e$ 与 $\frac{b}{n^a}$ 在 $n \rightarrow \infty$ 时是等价无穷小, 求 a, b .

【详解 3】由题意知, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})^n - e}{\frac{b}{n^a}} = 1$,

变形为 $e \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{n \ln(1 + \frac{1}{n}) - 1} - 1}{\frac{b}{n^a}} = 1$, 即 $\frac{e}{b} \lim_{n \rightarrow \infty} n^a [n \ln(1 + \frac{1}{n}) - 1] = 1$

从而 $\frac{e}{b} \lim_{n \rightarrow \infty} n^a [n(\frac{1}{n} - \frac{1}{2} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{n^3} + L) - 1] = 1$

亦是 $\frac{e}{b} \lim_{n \rightarrow \infty} n^a (-\frac{1}{2} \frac{1}{n} + \frac{1}{3} \frac{1}{n^2} + L) = 1$

所以 $a = 1, b = -\frac{e}{2}$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

第三节 函数的连续性

一、连续的概念

1、定义

(1) 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义, 如果

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

(2) 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 某个邻域内有定义, 如果

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

微信公众号【顶尖考研】
 (ID: djky66)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x).$$

- 连续函数, 极限符号和函数符号可以交换.

例1 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

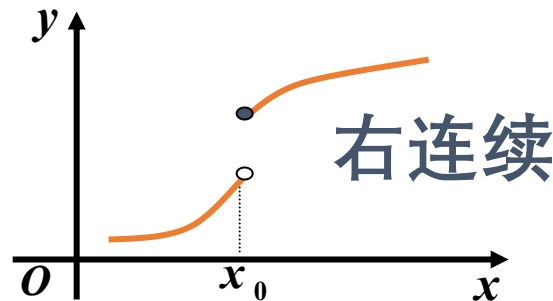
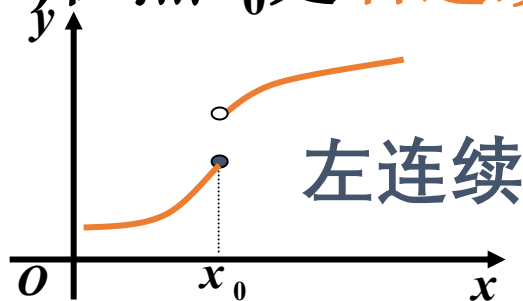
解

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} \\
 &= \ln \left[\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right] \\
 &= \ln e = 1.
 \end{aligned}$$

2. 左、右连续

若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ [即 $f(x_0-0) = f(x_0)$] ,
则称 $f(x)$ 在点 x_0 处 **左连续**;

若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ [即 $f(x_0+0) = f(x_0)$] ,
则称 $f(x)$ 在点 x_0 处 **右连续**;



函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处
既 **左连续** 又 **右连续** . 即 $f(x_0+0) = f(x_0-0) = f(x_0)$,

上述结论常用于判定分段函数在分界点处的连续性.

例2 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1, \\ x+1, & x > 1, \end{cases}$

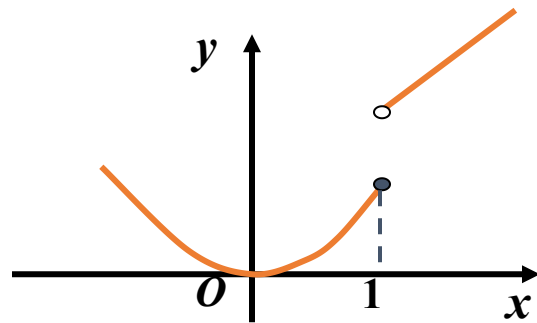
在点 $x=1$ 处的连续性.

解 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1 = f(1),$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2 \neq f(1),$

即 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处左连续, 但不右连续.

所以 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处不连续.



3.连续函数与连续区间

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内每一点都连续, 则称 $f(x)$ 为区间 (a, b) 上的连续函数.

(a, b) 称为 $f(x)$ 的连续区间.

如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a, b) 内连续, 并且在左端点 $x=a$ 处右连续, 在右端点 $x=b$ 处左连续, 则称 $f(x)$ 为闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数.

连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线.

例 3(2017-123-1) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{ax}, & x > 0, \\ b, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则

- (A) $ab = \frac{1}{2}$. (B) $ab = -\frac{1}{2}$. (C) $ab = 0$. (D) $ab = 2$.

【详解】可计算 $f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} b = b$, $f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{ax} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}x}{ax} = \frac{1}{2a}$.

利用函数在 $x = 0$ 处连续, 即 $f(0^-) = f(0^+)$, 则 $\frac{1}{2a} = b$, 亦是 $ab = \frac{1}{2}$.

答案: B

例 4(1994-3) 若 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x + e^{2ax} - 1}{x}, & x \neq 0; \\ a, & x = 0. \end{cases}$ 在

$(-\infty, +\infty)$ 内连续, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$

分析:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + e^{2ax} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2ax} - 1}{x} = 2 + 2a$$

答案: $a = -2$

微信公众号【顶尖考研】

例5(2008-3) 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & |x| \leq c, \\ \frac{2}{|x|}, & |x| > c. \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 则 $c = \underline{\hspace{2cm}}$.

解

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} (x^2 + 1) = c^2 + 1, \quad f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x}, & x < -c \\ x^2 + 1, & -c \leq x \leq c, \\ \frac{2}{x}, & x > c. \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{2}{x} = \frac{2}{c}$$

由函数 $f(x)$ 在 c 点连续, 有

$$c^2 + 1 = \frac{2}{c}$$

得 $c = 1$.

二、函数的间断点及其分类

$f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义

若 $f(x)$ 在点 x_0 处出现如下三种情况之一:

(1) $f(x)$ 在点 x_0 处无定义;

(2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在;

(3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续(或间断).

称 x_0 为函数 $f(x)$ 的不连续点或间断点.

间断点的分类:

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左右极限都存在的间断点, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的第一类间断点;

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左右极限至少一个不存在, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的第二类间断点.

第一类间断点: $f(x_0-0)$ 及 $f(x_0+0)$ 均存在,
若 $f(x_0-0)=f(x_0+0)$, 称 x_0 为可去间断点.
若 $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$, 称 x_0 为跳跃间断点.

第二类间断点: $f(x_0-0)$ 及 $f(x_0+0)$ 中至少一个不存在,
若其中至少有一个为 ∞ , 称 x_0 为无穷间断点.
若其中至少有一个振荡, 称 x_0 为振荡间断点.

例6 讨论函数 $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

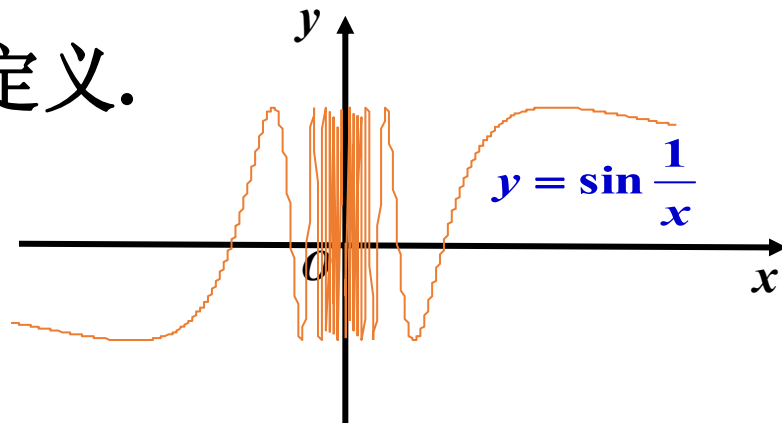
解 $\sin \frac{1}{x}$ 在点 $x=0$ 处没有定义.

因 $x = \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}$ 时, $\sin \frac{1}{x} = 1$,

$(k \rightarrow \infty, x \rightarrow 0)$
 $x = \frac{1}{k\pi}$ 时, $\sin \frac{1}{x} = 0, (k \neq 0),$

因此 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 不存在.

故 $x=0$ 为函数的**第二类**间断点.
且是振荡间断点.



微信公众号【顶尖考研】

例7 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \leq 1 \text{ 且 } x \neq 0, \\ \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x > 1 \text{ 且 } x \neq 2. \end{cases}$

求函数的间断点,

且判断其类型.

解 因为 $f(x)$ 是分段函数, 每段都是初等函数, 在其定义区间上都连续, 即除分界点外其余各点均连续.

$f(x)$ 在点 $x=0$ 和 $x=2$ 处没定义,
故 $x=0$ 和 $x=2$ 为函数 $f(x)$ 的间断点.

1°在 $x=0$ 处 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$,

所以 $x=0$ 为函数的第二类间断点, 且是无穷间断点.

2° 在 $x=2$ 处

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4,$$

所以 $x=2$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点,
且为可去间断点.

3° 在 $x=1$ 处

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x^2} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 2) = 3,$$

故 $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的第一类间断点,
且为跳跃间断点.

例 8(2008-2) 设函数 $f(x) = \frac{\ln|x|}{|x-1|} \sin x$, 则 $f(x)$ 有

- (A) 1 个可去间断点, 1 个跳跃间断点. (B) 1 个可去间断点, 1 个无穷间断点.
 (C) 2 个跳跃间断点. (D) 2 个无穷间断点.

【解】 $f(x)$ 的间断点为 $x=0$, $x=1$.

应选(A)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln|x|}{|x-1|} \sin x = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln|x|}{|x-1|} \sin x = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \ln(-x) = 0,$$

可见 $x=0$ 为可去间断点.

$$\text{又} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{x-1} \sin x = \sin 1 \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-1} = \sin 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln x}{1-x} \sin x = \sin 1 \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{1-x} = -\sin 1.$$

可见 $x=1$ 为跳跃间断点.

例 9 (2020-3). 函数 $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x-1}} \ln|1+x|}{(e^x - 1)(x-2)}$ 的第二类间断点的个数为

- (A) 1 (B) 2 (C) 3. (D) 4.

【详解】 $f(x)$ 的间断点为 -1, 0, 1, 2,

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty,$$

$$\text{而 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x-1}} \ln|1+x|}{(e^x - 1)(x-2)} = -\frac{e^{-1}}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{e^x - 1} = -\frac{e^{-1}}{2},$$

$f(x)$ 的第二类间断点的个数为 3 个, 应选 (C).

三、连续函数的运算法则

1、四则运算的连续性

如果函数 $f(x)$, $g(x)$ 在点 x_0 处连续, 则

$f(x) \pm g(x)$; $f(x) \cdot g(x)$; $\frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x_0) \neq 0$
在点 x_0 处也连续.

例: 函数 $\sin x$, $\cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续
 $\Rightarrow \tan x$, $\cot x$, $\sec x$, $\csc x$ 在其定义域内连续.
 即: 三角函数在其定义域内皆连续.

2、反函数的连续性

单调的连续函数必有单调的连续反函数.

例如, $y = \sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上单调增加且连续,

$\Rightarrow y = \arcsin x$ 在 $[-1, 1]$ 上也是单调增加且连续.

同理 $y = \arccos x$ 在 $[-1, 1]$ 上单调减少且连续.

$y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调且连续.

即: 反三角函数在其定义域内皆连续.

3、复合函数的连续性

设函数 $u = \varphi(x)$ 在点 $x = x_0$ 处连续, $\varphi(x_0) = u_0$, 而函数 $y = f(u)$ 在点 $u = u_0$ 连续, 则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在点 $x = x_0$ 处也连续.

例如, $u = \frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 内连续,

$y = \sin u$ 在 $(-\infty, \infty)$ 内连续,

$\Rightarrow y = \sin \frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 内连续.

4、初等函数的连续性

- (1) 三角函数及反三角函数在它们的定义域内是连续的.
- (2) 指数函数 $y=a^x$ ($a>0, a \neq 1$) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内上单调且连续.
- (3) 对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0, a \neq 1$) 在 $(0, +\infty)$ 内单调且连续.
- (4) 幂函数 $y=x^\mu = e^{\mu \ln x} \longrightarrow y=e^u, u=\mu \ln x$.

对于 μ 的不同取值, 均在其定义域内连续.

对任意的 μ 值, 均在 $(0, +\infty)$ 内连续.

基本初等函数在定义域内是连续的.

一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

四、闭区间上连续函数的性质

1、最大值和最小值定理

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 如果有 $x_0 \in I$, 使得对 $\forall x \in I$ 都有

$$f(x) \leq f(x_0) \quad [f(x) \geq f(x_0)]$$

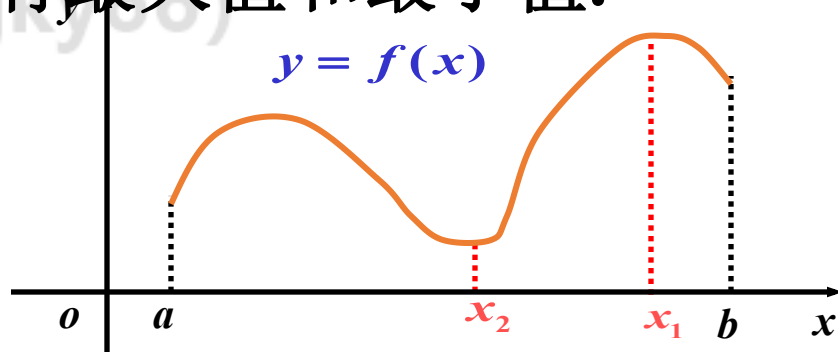
则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 在区间 I 上的最大(小)值.

例如, $y=1+\sin x$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上, $y_{\max}=2$, $y_{\min}=0$,

$y=\operatorname{sgn} x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上, $y_{\max}=1$, $y_{\min}=-1$,

在 $(0, +\infty)$ 上, $y_{\max}=1$, $y_{\min}=1$,

(最大值和最小值定理) 闭区间上的连续函数在该区间上一定有最大值和最小值.



即：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则必
 $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$, 使得对 $\forall x \in [a, b]$ 有
 $f(x) \leq f(x_1)$, $f(x) \geq f(x_2)$.

注1: 若区间是开区间, 定理不一定成立;

注2: 若区间内有间断点, 定理不一定成立.

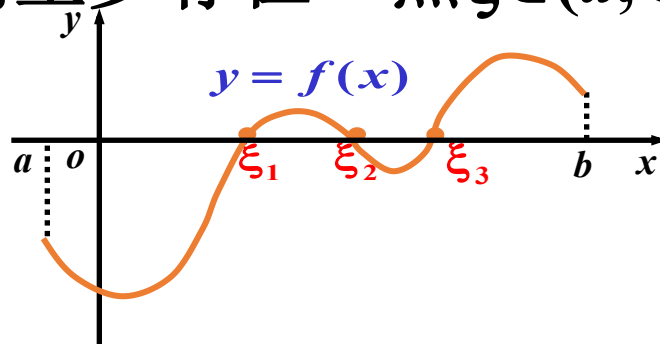
(有界性定理) 在闭区间上连续的函数一定在该区间上有界.

2、零点定理与介值定理

如果 $f(x_0)=0$, 则 x_0 称为函数 $f(x)$ 的零点.

(零点定理) 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 并且 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi)=0$.

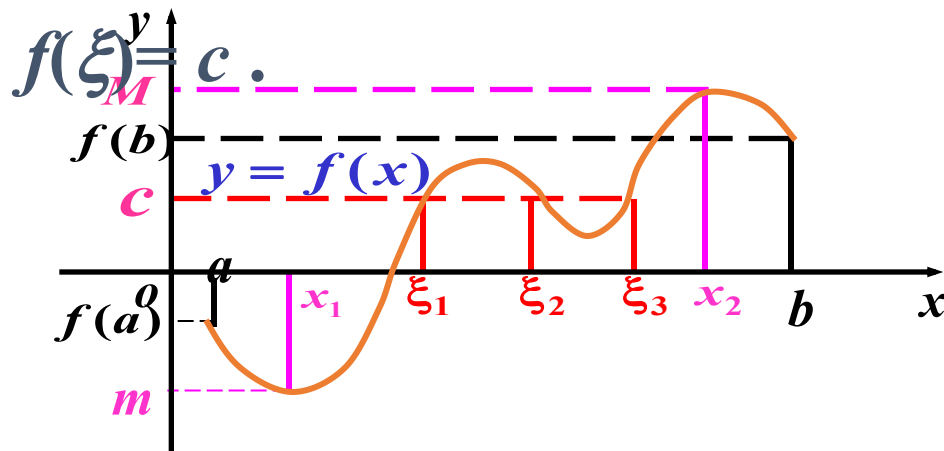
几何解释:



即: 方程 $f(x)=0$ 在 (a, b) 内至少有一个实根.

(介值定理) 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, m 和 M 分别为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值与最大值, 则对介于 m 与 M 之间的任意实数 c , 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得

几何解释:



推论: 在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.

常规题型及典型例题

一、讨论函数的连续性及间断点的类型

例 10 (1997-2) 已知 $f(x) = \begin{cases} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0; \\ a, & x = 0. \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续,

则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$

分析:
$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

例 11 讨论 $f(x) = \frac{x}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}}$ 的连续性并指出间断点的类型.

分析：函数为初等函数，除 $x=0,1$ 外有定义，间断点为 $x=0,1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{-\frac{x}{1-x}} = -1$$

$x=0$ 为可去间断点

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}} = 0, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}} = 1$$

$x=1$ 为跳跃间断点

例 12 函数 $f(x) = \frac{(x^2 + x)(\ln|x|) \sin \frac{1}{x}}{x^2 - 1}$ 的可去间断点的个数为

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3

答案：D

分析：函数为初等函数，间断点为 $x=0, -1, 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + x)(\ln|x|) \sin \frac{1}{x}}{x^2 - 1} = -\lim_{x \rightarrow 0} x(\ln|x|) \sin \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + x)(\ln|x|) \sin \frac{1}{x}}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x \sin \frac{1}{x}}{x - 1} = \sin 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 + x)(\ln|x|) \sin \frac{1}{x}}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} (\ln|x|) \sin \frac{1}{x} = 0$$

例 13(1998-3) 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$, 讨论函数的间断点, 其结论为

- (A) 不存在间断点. (B) 存在间断点 $x=1$.
(C) 存在间断点 $x=0$. (D) 存在间断点 $x=-1$.

分析:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}} = \begin{cases} 1+x, & |x| < 1; \\ 0, & |x| > 1; \\ 0, & x = -1; \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

答案: B

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0 = f(-1), x=-1 \text{ 为连续点}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0, x=1 \text{ 为跳跃间断点}$$

二、闭区间上连续函数的证明题

例 14 设函数 $f(x)$, 在 $[a, b]$ 上连续, $a < c < d < b$, 试证对任意的正数 p, q , 至少存在一个 $\xi \in [c, d]$ 使得 $pf(c) + qf(d) = (p + q)f(\xi)$.

分析： 用介值定理

例 15、 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b, c_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$, 证明
存在 $\xi \in [a, b]$, 使得

$$f(\xi) = \frac{c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \dots + c_n f(x_n)}{c_1 + c_2 + \dots + c_n}$$

【证明】 不妨设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值为 M 最小值为 m , 则

$$m \leq f(x_i) \leq M, \quad c_i m \leq c_i f(x_i) \leq c_i M, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

$$m \sum_{i=1}^n c_i \leq \sum_{i=1}^n c_i f(x_i) \leq M \sum_{i=1}^n c_i, \quad m \leq \frac{\sum_{i=1}^n c_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^n c_i} \leq M,$$

由介值定理知, 存在 $\xi \in [a, b]$, 使 $f(\xi) = \frac{c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \dots + c_n f(x_n)}{c_1 + c_2 + \dots + c_n}.$

例 16、 设 $b > a > 0$, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续、单调递增, 且 $f(x) > 0$, 证明存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$a^2 f(b) + b^2 f(a) = 2\xi^2 f(\xi)$$

分析: 令 $F(x) = 2x^2 f(x) - a^2 f(b) - b^2 f(a)$

$$F(a) < 0, \quad F(b) > 0$$