

微信公众号【顶尖考研】

2022年研究生入学考试

高等数学(微积分)基础班

2021年1月

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

第七章 微分方程(差分方程)

2009-2021年微分方程(差分方程)分数分布

(ID: djky66)

	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
一	10	4	14-	14+	14+	4	14-	4	10	14+	14-	5
二	8	18-	14-	4	10-	14	18	14+	10+	14+	15+	17+
三	4	10+	10-	4	10-	4	10	14-	8	14+	10+	17+

注：1、小题；2、大题(与其他知识点结合：变限积分、多元函数微分学、级数)；3、应用题(主要几何应用)

微分方程(差分方程)考试内容

共有

独有

数

一

二

三

1. 变量可分离微分方程、
一阶线性微分方程、齐
次微分方程 一阶

2. 理解线性微分方程解
的性质及解的结构

3. 二阶常系数线性微分
方程 ✓

4. 某些高于二阶的常系数
齐次线性微分方程

5. 会用微分方程解决一
些简单的应用问题

数
一

数
一
二

数
三

1. 伯努利方程、全微分方程、欧拉方
程

2. 会用简单变量代换解某些微分方程

可降阶的微分方程

$y^{(n)} = f(x)$, $y'' = f(x, y')$, $y'' = f(y, y')$
决 y 决 x

一阶常系数线性差分方程

数学一(13) 欧拉方程 $x^2 y'' + xy' - 4y = 0$ 的满足条件

(ID: djky66)

$y(1) = 1, y'(1) = 2$ 的解为_____.

$$y = x^2$$

数学三(14) 差分方程 $\Delta y_t = t$ 的通解 $y_t =$ _____.

$$y_t = C + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t$$

考题形式

- 掌握几类微分方程的求解
- 与一元、多元函数微分学及级数的结合
- 积分方程 (积分)
- 实际问题 (几何、物理、经济)

内容概述

1、微分方程——联系自变量、未知函数及其导数(或微分)之间关系、含有未知函数的导数或微分的方程。

例 $y' = xy$, $y'' + 2y' - 3y = e^x$, $(t^2 + x)dt + xdx = 0$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x + y.$$

常微分方程: $\dots$; $(y'')^{100} + 2(y')^{200} = e^x$
偏微分方程: $\dots$

2、微分方程的阶——微分方程中出现的未知函数的导数的最高阶数。

隐式形式: $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$,

显式形式: $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$.

3、微分方程的解——代入微分方程能使之成为恒等式的函数.

n 阶微分方程常用的解的形式:

(1) **特解**: 确定的函数;

(2) **通解**: 含有 **n 个独立的**任意常数.

例 $y' = y$, e^x 、 $-e^x$ 是(特)解, Ce^x 是(通)解.

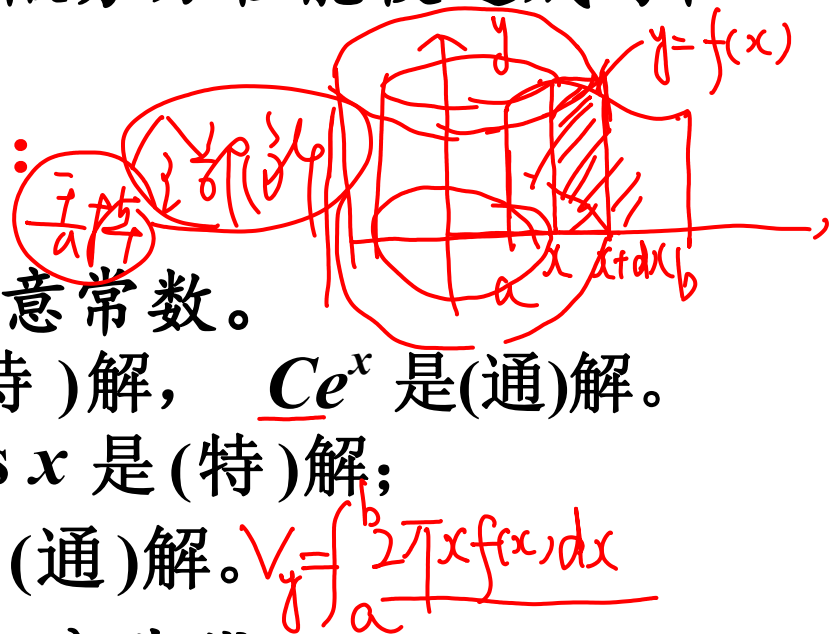
$y'' + y = 0$, $\sin x$ 、 $\cos x$ 是(特)解;

$C_1 \sin x + C_2 \cos x$ 是(通)解. $V_y = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$

特解的图象: 微分方程的积分曲线.

通解的图象: 积分曲线族.

问: 通解是全部解?



4、初始条件（用来确定任意常数的条件）：

$$\underline{y|_{x=x_0} = y_0}, \quad \underline{y'|_{x=x_0} = y'_0}, \quad \cdots, \quad y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}.$$

5、初值问题：求微分方程满足初始条件的解的问题。

一阶：
$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y|_{x=x_0} = \underline{y_0} \end{cases} \quad \text{过定点的积分曲线；}$$

二阶：
$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ \underline{y|_{x=x_0} = y_0}, \quad \underline{y'|_{x=x_0} = y'_0} \end{cases}$$

过定点且在定点的切线的斜率为定值的积分曲线。

二、一阶微分方程

1、若一阶微分方程可写成 变量分离的形式 $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)g(y)}{f(x)g(y)}$

$$\underline{g(y)dy = f(x)dx}$$

——可分离变量的微分方程。

例 $\frac{dy}{dx} = 2x^2 y^{\frac{4}{5}} \Rightarrow y^{-\frac{4}{5}} dy = 2x^2 dx.$

解法 1、分离变量；

2、两边积分

$$\underline{\int g(y)dy = \int f(x)dx}$$

若 $G(y)$ 和 $F(x)$ 分别为 $g(y)$ 和 $f(x)$ 的原函数，则

$$\underline{G(y) = F(x) + C}$$

为微分方程的（隐式）通解。

分离变量法

例 求 $\frac{dy}{dx} = 2xy$ 的通解。

解 可分离变量为 $\frac{dy}{y} = 2x dx$,

两端积分 $\int \frac{dy}{y} = \int 2x dx$, 得

$$\ln |y| = x^2 + C_1,$$

$$\text{即 } |y| = e^{x^2 + C_1},$$

$$\text{即 } y = \pm e^{C_1} e^{x^2}.$$

又 $y = 0$ 也是解

$\therefore y = Ce^{x^2}$ 为所求通解。

$$1^\circ \frac{2}{x} dx = 2x dx$$

$$2^\circ \text{ 求通解 (可分离变量)}$$

$$3^\circ \text{ 求特解}$$

通解, 非全部解

通解, 全部解

例 1(2006-12) 微分方程 $y' = \frac{y(1-x)}{x}$ 的通解是 $y = Cxe^{-x}$

分析:

$$y' = y\left(\frac{1}{x} - 1\right)$$

$$\frac{1}{y} dy = \left(\frac{1}{x} - 1\right) dx$$

$$\ln y = \ln x - x + \ln C_1$$

$$y = C_1 x e^{-x}$$

积分

$$\ln|y| = \ln|x| - x + \boxed{\ln C_1}$$

$$|y| = C_1 e^{-x} |x|$$

$$y = \pm C_1 x e^{-x} \Rightarrow y = C x e^{-x}$$

2、齐次方程

可写成 $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{令 } x+y=u$$

解法:

令 $u = \frac{y}{x}$, 即 $y = xu$, 则 $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$,

代入原式 $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ 化为 $u + x \frac{du}{dx} = f(u)$ (1)

即 $\frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u}{x}$

可分离变量

分离变量, 积分, 得 (1) 的通解

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \ln|x| + C$$

还原, 得原方程的通解

$$\int \frac{du}{f(u) - u} \Big|_{u=\frac{y}{x}} = \ln|x| + C.$$

例 2(1993-12) 求微分方程 $x^2 y' + xy = y^2$ 满足初始条件 $y|_{x=1} = 1$ 的特解.

$$y' = \frac{y^2 - xy}{x^2} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x} \quad u = \frac{y}{x}$$

$$\frac{u-2}{u} = cx^2 \quad u + x \frac{du}{dx} = u^2 - u \quad \int \frac{du}{u(u-2)} = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\frac{y-2x}{y} = cx^2 \quad \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u-2}{u} \right| = \ln |x| + \frac{1}{2} \ln C_1$$

$$y|_{x=1} = 1 \quad C = -1 \quad \left| \frac{u-2}{u} \right| = C_1 x^2 \quad \frac{u-2}{u} = (\pm C_1) x^2$$

3、一阶线性微分方程

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x).$$

通解（公式）：

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right]$$

$$= \underline{Ce^{-\int P(x)dx}}$$

对应齐次方程通解

$$+ \underline{e^{-\int P(x)dx} \cdot \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx}$$

非齐次方程特解

(ID: π djky66)

$$p(x) = -\frac{1}{x} \quad y' \equiv x(C - e^{-x}).$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + x^2 e^{-x}}{x} = \frac{1}{x} y + x e^{-x}$$

$$y' - \frac{1}{x}y = xe^{-x}$$

$$y = e^{\int -\frac{1}{x} dx} \left(C + \int x e^{-x} e^{\int -\frac{1}{x} dx} dx \right)$$

$$= x \left(C + \int x e^{-x} \cdot \frac{1}{x} dx \right) = x (C - e^{-x})$$

例、方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + y^3}$ 的通解是_____.

$$\frac{dx}{dy} + p(y)x = q(y)$$

$$x(-\frac{1}{y})' = y^2$$

【解】方程变为如下形式 $\frac{dx}{dy} = \frac{x + y^3}{y} = \frac{x}{y} + y^2$ ，为一阶线性微分方程

$$\text{所以原方程通解为 } x = e^{-\int -\frac{1}{y} dy} (C + \int y^2 e^{\int -\frac{1}{y} dy} dy) = \frac{y^3}{2} + Cy$$

$$x = e^{-\int p(y) dy} (C + \int q(y) e^{\int p(y) dy} dy)$$

4、伯努利(Bernoulli)方程(数学一)

标准形式 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$ ($n \neq 0, 1$)

解法：经过因变量代换化为线性微分方程。

两端除以 y^n ，成为 $\frac{1}{1-n} \frac{dy^{1-n}}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x)$ ，

令 $z = y^{1-n}$ ，则 $\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx}$ ，
—— 两边同时除以 y^n ——

原方程化为 $\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$ ，

解此一阶线性微分方程；

还原，即得 Bernoulli 方程的通解。

例 求 $\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}y = x^2\sqrt{y}$ 的通解. 2d(√y)

解 两端除以 $\sqrt{y}$, 得 $\frac{1}{\sqrt{y}} \frac{dy}{dx} - \frac{4}{x} \sqrt{y} = x^2$,

令 $z = \sqrt{y}$, 由 $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{dy}{dx}$,

原方程化为 $\frac{dz}{dx} - \frac{2}{x}z = \frac{x^2}{2}$

解得 $z = \underline{x^2} \left(\frac{x}{2} + C \right)$,

还原, 得原方程的通解 $y = x^4 \left(\frac{x}{2} + C \right)^2$.

5、全微分方程(数学一)

$d u(x, y)$

若 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ 有原函数,

则称 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ 为 全微分方程。

例如 $ydx + xdy = 0$, $\because d(xy) = ydx + xdy$,
所以是全微分方程。

$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ 是全微分方程

$$\Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

全微分方程的判定方法

例如 $ydx - xdy = 0$, $\because \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$,

所以不是全微分方程。

解法: 公众号【顶尖考研】

若 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ 是全微分方程,
则 $\exists u(x, y)$, 使 $\underline{du(x, y)} = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, $\underline{=}$
则原方程可表为 $du(x, y) = 0 \iff u(x, y) = C$.

原函数 $u(x, y)$ 的求法:

隐式通解

1、曲线积分法:

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

2、全微分的运算。

3、偏积分法:

例 求解 $(x^2 + x^3 + y)dx + (1 + x)dy = 0$.

用全微分运算: (秒杀)

$$Q \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

$$(x^2 + x^3 + y)dx + (1 + x)dy$$
$$= \underline{x^2 dx} + \underline{x^3 dx} + \underline{(ydx + xdy)} + dy$$

$$= d\left(\frac{x^3}{3}\right) + d\left(\frac{x^4}{4}\right) + d(xy) + dy$$

$$= d\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + xy + y\right)$$

$$\therefore \text{通解为} \quad \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + xy + y = C.$$

例 求解 $(x^2 + x^3 + y)dx + (1 + x)dy = 0$.

用偏积分法: 设 $\frac{\partial u}{\partial x} = p$ $\frac{\partial u}{\partial y} = q$ $f'u = d(u)$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x} = x^2 + x^3 + \underline{y},$$

$$\therefore u = \int (x^2 + x^3 + y)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + xy + \boxed{C(y)},$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial y} = x + C'(y), \quad \text{又} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1 + x,$$

$$\therefore \cancel{x} + C'(y) = 1 + \cancel{x},$$

$$\therefore C(y) = y + \underline{c},$$

$$\therefore \text{原方程的通解为} \quad \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + xy + y = C.$$

三、可降阶的微分方程(数学一、二)

1、 $y^{(n)} = f(x)$ 型 (缺 y)

特点：不显含 y 及 $y', \dots, y^{(n-1)}$.

解法：连续积分 n 次。

$$\because y^{(n)} = (y^{(n-1)})' = f(x)$$

$$\therefore y^{(n-1)} = \int f(x) dx + C_1$$

$$\therefore y^{(n-2)} = \int (\int f(x) dx + C_1) dx + C_2$$

$$\therefore y' = \int (\dots (\int (\int f(x) dx + C_1) dx + C_2) dx \dots) dx + C_n$$

$$\begin{aligned} y'' &= f(x, y) - \text{缺 } y \\ y'' &= f(y, y') - \text{缺 } x \end{aligned}$$

$$\int p = y'$$

2、 $y'' = f(x, y')$ 型

特点：不显含因变量 y .

解法：因变量换元： $p = y'$ ，降阶为 $p' = f(x, p)$ 。

若得解 $p = \varphi(x; C_1)$ ，则 $y' = \varphi(x; C_1)$ ，

则 $y(x; C_1, C_2) = \int \varphi(x; C_1) dx + C_2$

例 4(2000-1) 微分方程 $xy'' + 3y' = 0$ 的通解为.

$$y = C_2 x^{-2} + C_1$$

3、 $y'' = f(y, y')$ 型

特点：不显含自变量 x .

解法：做因变量及自变量换元

新因变量 $p = \frac{dy}{dx}$, 新自变量 y ,

$$\text{则 } y'' = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy},$$

原方程降阶为 $p \frac{dp}{dy} = f(y, p)$

若得其解为 $p = \varphi(y; C_1)$, 则 $\frac{dy}{dx} = \varphi(y; C_1)$,

原方程通解为 $\int \frac{dy}{\varphi(y; C_1)} = x + C_2.$

例 5(2002-12) 微分方程 $yy'' + y'^2 = 0$ 满足初始
条件 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = \frac{1}{2}$ 的特解 $y = \sqrt{x+1}$

四、高阶线性微分方程

1、 n 阶非齐次线性微分方程的标准形式

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \quad (1)$$

n 阶齐次线性微分方程的标准形式

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \quad (2)$$

注： n 阶线性微分方程解的性质和结构

解的性质与结构

(1)如果 y_1 与 y_2 是 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的任意两个解,

则 $y = c_1y_1 + c_2y_2$ (c_1, c_2 为任意常数)仍是 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的解.

(2)如果 y_1 与 y_2 是 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的两个特解,

则 $y_1 - y_2$ 为 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的解.

(3)如果 y_1 与 y_2 分别是 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 及 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的解,

则 $y_1 + y_2$ 为 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的解.

(4)如果 y_1 与 y_2 分别是 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)$ 及 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$ 的解,

则 $y_1 + y_2$ 为 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$ 的解.

(5)如果 $\tilde{y}$ 是 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的一个特解,而 y^*

是对应的齐次方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的通解.则 $y = \tilde{y} + y^*$

是 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的通解.

2、二阶常系数齐次线性方程

$$y'' + py' + qy = 0$$

$$r^2 + pr + q = 0$$

特征根的情况	通解的表达式
实根 $r_1 \neq r_2$	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
实根 $r_1 = r_2$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_2 x}$
复根 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

例 6(2013-3) 微分方程 $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0$ 的通解为

(ID: djky66)

$$(C_1 + C_2 x)e^{\frac{1}{2}x}$$

$y =$ _____

例 7(1996-3) 微分方程 $y'' + 2y' + 5y = 0$ 的通解

为 $y = \underline{\hspace{2cm}} e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$

例 8(2010-2) 3 阶常系数线性齐次微分方程

$y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$ 的通解为 $y =$ _____
 $C_1 e^{2x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x$

3、常系数非齐次线性微分方程

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x)$$

通解=对应齐次线性微分方程的通解
+该非齐次线性微分方程的特解

由非齐次线性微分方程

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x)$$

的结构特点 $\Rightarrow$

$f(x) = e^{\lambda x} [P_{m_1}(x) \cos \omega x + P_{m_2}(x) \sin \omega x]$ 时,

可用代数方法 (待定系数法) 求得一个特解 y^* 。

(特殊情况: $P_m(x), P_m(x)e^{\lambda x}, P_m(x) \cos \omega x,$

$P_m(x) \sin \omega x, \cdots)$

(1) $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$ 型

可设 $y^*(x) = x^k Q_m(x) e^{\lambda x}$

(k 是 λ 作为特征根的重数)

待定

$$k = \begin{cases} 0 & \lambda \text{ 不是根} \\ 1 & \lambda \text{ 是单根} \\ 2 & \lambda \text{ 是重根} \end{cases},$$

(2) $f(x) = e^{\lambda x} [P_{m_1}(x) \cos \omega x + P_{m_2}(x) \sin \omega x]$ 型

可设 $y^*(x) = x^k e^{\lambda x} (R_m^{(1)}(x) \cos \omega x + R_m^{(2)}(x) \sin \omega x)$

($m = \max\{m_1, m_2\}$,

待定

k 是 $\lambda + i\omega$ 作为特征根的重数)

$$k = \begin{cases} 0, & \lambda + i\omega \text{ 不是根;} \\ 1, & \lambda + i\omega \text{ 是单根.} \end{cases}$$

例 9(1995-3) 微分方程 $y'' + y = -2x$ 的通解为 $y =$
 $-2x + C_1 \cos x + C_2 \sin x$

例 10(2007-12) 二阶常系数非齐次微分方程

$y'' - 4y' + 3y = 2e^{2x}$ 的通解为 $y = C_1e^x + C_2e^{3x} - 2e^{2x}$

4、欧拉方程(数学一)

形式: $x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x) .$

解法: 令 $x=e^t$, 有 $xy' = \frac{dy}{dt}$, $x^2 y'' = \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$, $\cdots$,

特别地, 二阶欧拉方程 $x^2 y'' + pxy' + qy = f(x)$

可化为二阶常系数线性方程

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + (p-1) \frac{dy}{dt} + qy = f(e^t) .$$

例 11(2004-1) 欧拉方程

$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} + 2y = 0 \ (x > 0)$ 的通解为

$$y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2}$$

2021-1 欧拉方程 $x^2 y'' + xy' - 4y = 0$ 的满足条件

$y(1) = 1, y'(1) = 2$ 的解为 $y = x^2$.

5、差分方程(数学三)

(1) 差分的概念

y_t 的一阶差分定义为 $\Delta y_t = y_{t+1} - y_t$,

一阶差分 Δy_t 的差分称为 y_t 的二阶差分, 记为 $\Delta^2 y_t$,

即 $\Delta^2 y_t = \Delta y_{t+1} - \Delta y_t = y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t$

(2) 一阶常系数线性差分方程

形如 $y_{t+1} - py_t = f(t)$ ($t=0,1,2,\cdots$) 的方程, 称为一阶常系数线性差分方程, 其中 p 为非零常数, $f(t)$ 为已知函数.

$y_{t+1} - py_t = 0$ 称为它对应的常系数一阶线性齐次差分方程.

一阶常系数线性差分方程的通解为：

$$y_t = cp^t + y_t^*, \text{ 其中 } y_t^* \text{ 为特解.}$$

若 $f(t) = (A_0t^n + A_1t^{n-1} + \cdots + A_n)b^t$, 则待定特解 y_t^* 具有下列形式：

$$y_t^* = t^s (B_0t^n + B_1t^{n-1} + \cdots + B_n)b^t,$$

其中，当 $p \neq b$ 时， $s=0$ ；当 $p=b$ 时， $s=1$ 。

例 12(1997-3) 差分方程 $y_{t+1} - y_t = t \cdot 2^t$ 的通解为_____.

【解】对应的齐次差分方程为 $y_{t+1} - y_t = 0$, 则其通解为 $\tilde{y}_t = c \times 1^t = c$,

设原差分方程的特解为 $y_t^* = 2^t(At+B)$,

代入到原差分方程中, 得

$$2^{t+1} [A(t+1)+B] - 2^t(At+B) = t \cdot 2^t,$$

即 $At+2A+B=t$. 比较系数知 $A=1$, $B=-2$, 故 $y_t^* = 2^t(t-2)$.

原差分方程的通解为 $y_t = \tilde{y}_t + y_t^* = c + 2^t(t-2)$.

例 13(1998-3) 差分方程 $2y_{t+1} + 10y_t - 5t = 0$ 的通解为__.

$$y_t = C(-5)^t + \frac{5}{12}\left(t - \frac{1}{6}\right)$$

例 14(2001-3) 某公司每年的工资总额在比上一年增加 20% 的基础上再追加 2 百万元.若以 W_t 表示第 t 年的工资总额(单位:百万元), 则 W_t 满足的差分方程是____. $W_t = 1.2W_{t-1} + 2$

例 15(2017-3) 差分方程 $y_{t+1} - 2y_t = 2^t$ 的通解为 $y_t = \underline{\hspace{2cm}}$.

(ID: djky66)

$$C2^t + t2^{t-1}$$

(2021-3) 差分方程 $\Delta y_t = t$ 的通解 $y_t =$ _____.

$$y_t = C + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t$$

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

常考题型与典型例题

一、方程求解

例 16(2014-1) 微分方程 $xy' + y(\ln x - \ln y) = 0$ 满足条件 $y(1) = e^3$ 的解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$. $y = xe^{2x+1} (x > 0)$

例 17(2012-2) 微分方程 $y \, dx + (x-3y^2) \, dy = 0$ 满足条件 $y|_{x=1}=1$ 的解为 $y = \underline{\hspace{1cm}}$.

$$y = \sqrt{x}$$

例 18(2017-1) 微分方程 $y'' + 2y' + 3y = 0$ 的通解为___.

$$y = e^{-x} (C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \sin \sqrt{2}x)$$

例 19(2017-2) 微分方程 $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}(1 + \cos 2x)$

的特解可设为 $y^* =$

答案：C

- (A) $Ae^{2x} + e^{2x}(B \cos 2x + C \sin 2x)$.
- (B) $Axe^{2x} + e^{2x}(B \cos 2x + C \sin 2x)$.
- (C) $Ae^{2x} + xe^{2x}(B \cos 2x + C \sin 2x)$.
- (D) $Axe^{2x} + xe^{2x}(B \cos 2x + C \sin 2x)$.

例 20(2015-23) 设函数 $y = y(x)$ 是微分方程 $y'' + y' - 2y = 0$ 的解, 且在 $x = 0$ 处 $y(x)$ 取得极值 3, 则 $y(x) =$ _____.

$$y(x) = 2e^x + e^{-2x}$$

例 21(2015-1) 设 $y = \frac{1}{2}e^{2x} + (x - \frac{1}{3})e^x$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的一个特解, 则

(A) $a = -3, b = 2, c = -1$. (B) $a = 3, b = 2, c = -1$.

(C) $a = -3, b = 2, c = 1$. (D) $a = 3, b = 2, c = 1$.

答案: A

例

22(2009-1)

若二阶常系数线性齐次微分方程

$y'' + ay' + by = 0$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2x)e^x$, 则非齐次方程

$y'' + ay' + by = x$ 满足条件 $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$ 的解为 $y =$

_____.

$$y = -xe^x + x + 2$$

【例 23(2013-12) 已知

$y_1 = e^{3x} - xe^{2x}$, $y_2 = e^x - xe^{2x}$, $y_3 = -xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的三个解, 则该方程的通解为 $y =$ _____.

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^x - xe^{2x}$$

二、综合题 【顶尖考研】

例 24(1994-3) 设 $y = f(x)$ 是微分方程 $y'' - y' - e^{\sin x} = 0$ 的解, 且 $f'(x_0) = 0$, 则 $f(x)$ 在 $y = xe^{2x+1} (x > 0)$

(A) x_0 的某个邻域内单调增加;

(B) x_0 的某个邻域内单调减少;

(C) x_0 处取得极小值; (D) x_0 处取得极大值.

答案: C

例 25(2002-2) 设 $y = y(x)$ 是二阶常系数微分方程

$y'' + py' + qy = e^{3x}$ 满足初始条件 $y(0) = y'(0) = 0$ 的特解, 则

当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$ 的极限

答案: C

(A) 不存在; (B) 等于 1; (C) 等于 2; (D) 等于 3.

例 26(2018-3) 函数 $f(x)$ 满足

$$f(x+\Delta x) - f(x) = 2xf(x)\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \rightarrow 0),$$

且 $f(0) = 2$, 则 $f'(0) =$ _____.

例 27(1995-4) 已知连续函数 $f(x)$ 满足条件

$$f(x) = \int_0^{3x} f\left(\frac{t}{3}\right) dt + e^{2x}, \text{ 求 } f(x).$$

$$f(x) = 3e^{3x} - 2e^{2x}$$

例 28(2016-3) 设函数 $f(x)$ 连续, 且满足

$$\int_0^x f(x-t)dt = \int_0^x (x-t)f(t)dt + e^{-x} - 1, \text{ 求 } f(x).$$
$$f(x) = -\frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

二、应用题 【顶尖考研】

例 29(2015-13) 设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零，若对任意的 $x_0 \in I$ ，曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 的切线与直线 $x = x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4，且 $f(0) = 2$ ，求 $f(x)$ 的表达式.

$$f(x) = \frac{8}{4-x}.$$

例 30(2006-3) 在 xOy 坐标平面上, 连续曲线 L 过点 $M(1,0)$, 其上任意点 $P(x,y)$ ($x \neq 0$) 处的切线斜率与直线 OP 的斜率之差等于 ax (常数 $a > 0$) .

$$y = ax^2 - ax, a = 2.$$

(I) 求 L 的方程;

(II) 当 L 与直线 $y = ax$ 所围成平面图形的面积为 $\frac{8}{3}$ 时, 确定 a 的值.

例 31(2009-2) 设非负函数 $y = y(x)$ ($x \geq 0$) 满足微分方程 $xy'' - y' + 2 = 0$, 当曲线 $y = y(x)$ 过原点时, 其与直线 $x = 1$ 及 $y = 0$ 围成平面区域 D 的面积为 2, 求 D 绕 y 轴旋转所得旋转体的体积.

$$\frac{17\pi}{6}.$$