



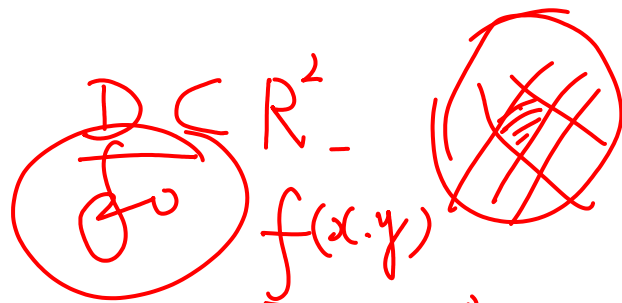
微信公众号【顶尖考研】

2022年研究生入学考试

高等数学(微积分)基础班

2021年1月

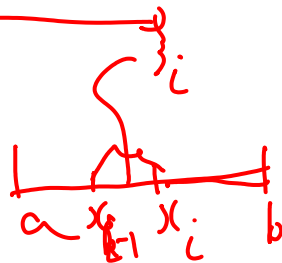
两个因素：
 $f(x, y)$ 和积分区域 $[a, b]$
 被积函数 $f(x)$



第九章 二重积分

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

1. 划分
2. 取点
3. 求和
4. 取极限



$$\iint_D \max\{f(x,y), g(x,y)\} d\sigma$$

考试要求

- 1、理解二重积分的概念，了解二重积分的基本性质
- 2、了解二重积分的中值定理
- 3、掌握二重积分（直角坐标、极坐标）的计算方法
- 4、会计算无界区域上的较简单的二重积分（数学三）

数学三

2009-2021 年二重积分分数分布

	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
一	4	4	11✓	0	0	<u>4</u>	<u>4</u>	10	0	0	0	0	(6)
二✓	14	14	15	14	24+✓	10	14	14	11	14	14	10	(17)
三✓	10	10	10-✓	14	14	14	14	8	10	10	0✓	10	12

考试内容概要

一、二重积分的概念

1、**定义** 设 $f(x, y)$ 是有界闭区域 D 上的有界函数, 将闭区域 D 任意分成 n 个小区间 $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$, 其中 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小闭区域, 也表示它的面积, 在每个 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i, η_i) ,

作乘积 $f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i, (i = 1, 2, \dots, n),$

且作和式 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i,$

如果当每个小闭区域的直径中的最大值 λ 趋于零时, 这和式的极限总存在, 则称此极限为函数 $f(x, y)$

在闭区域 D 上的二重积分, 记为 $\iint_D f(x, y) d\sigma,$



微信公众号【顶公考研】
(ID: topkybbs)

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

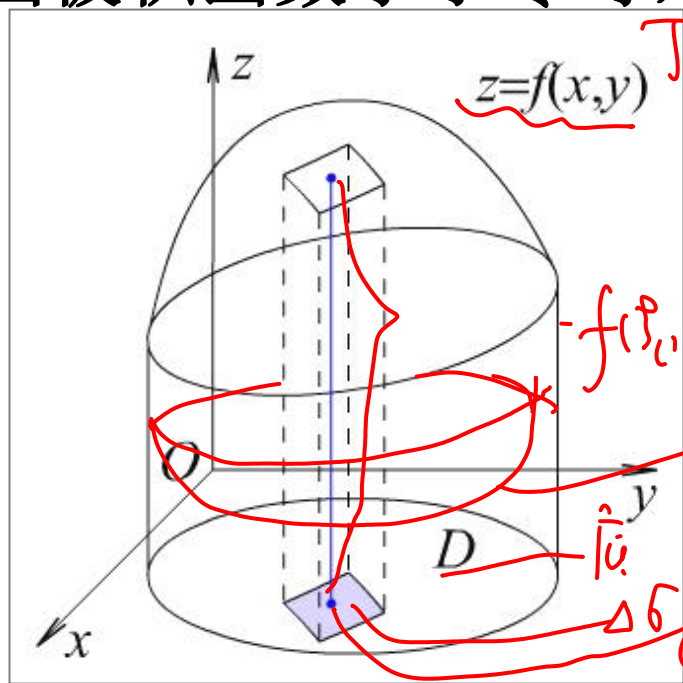
积分区域
 被积函数
 积分变量
 被积表达式
 面积元素
 积分和

注:

- (1) 在二重积的定义中, 闭区域 D 的划分是任意的
- (2) 当 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续时, 定义中和式的极限必存在, 即二重积分必存在. 分块连续

2. 二重积分的几何意义

当被积函数大于零时，二重积分是柱体的体积。
当被积函数小于零时，二重积分是柱体的体积的负值。



$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i.$$

$f(\xi_i, \eta_i)$

$z = g(x, y)$

(ξ_i, η_i)

在直角坐标系下用平行于坐标轴的直线网来划分区域 D ,

$d\sigma$

则面积元素为 $d\sigma = dxdy$

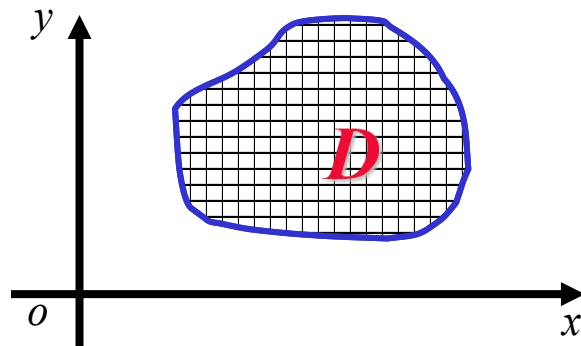
故二重积分可写为

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(x, y) dxdy$$

注: 物理意义

二重积分

二重积分



3、二重积分的性质

(二重积分与定积分有类似的性质)

性质1 当 k 为常数时, $\iint_D k f(x, y) d\sigma = k \iint_D f(x, y) d\sigma$.

性质2 $\iint_D [f(x, y) \pm g(x, y)] d\sigma$
 $= \iint_D f(x, y) d\sigma \pm \iint_D g(x, y) d\sigma$.

线性性质

性质3 对区域具有可加性 ($D = D_1 + D_2$)

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma.$$

性质4 若 σ 为区域 D 的面积, 则 $\iint_D 1 \cdot d\sigma = \iint_D d\sigma = \sigma$.

性质5 若在 D 上 $f(x, y) \leq g(x, y)$, 则有

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma.$$

特殊地

$$\left| \iint_D f(x, y) d\sigma \right| \leq \iint_D |f(x, y)| d\sigma.$$

性质6 设 M 、 m 分别是函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上的最大值和最小值, σ 是 D 的面积, 则有

$$m\sigma \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M\sigma$$

(二重积分估值不等式)

性质7 设函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, σ 是 D 的面积, 则在 D 上至少存在一点 (ξ, η) 使得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) \cdot \sigma$$

(二重积分中值定理)

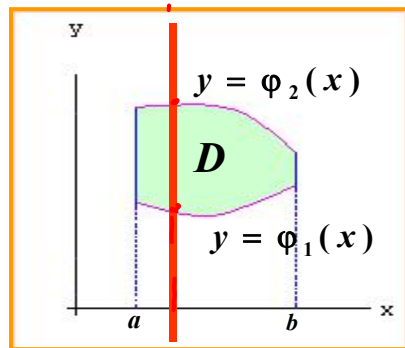
二、二重积分的计算

1、利用直角坐标系计算二重积分

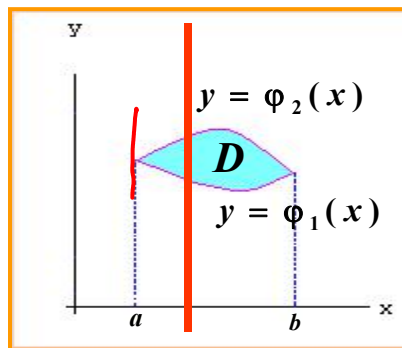
(1) 如果积分区域为:

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}.$$

[X-型]



定积分



其中函数 $\varphi_1(x)$ 、 $\varphi_2(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续.

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

先对y积分 后对x积分

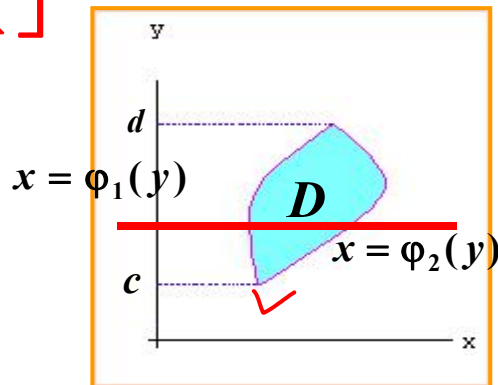
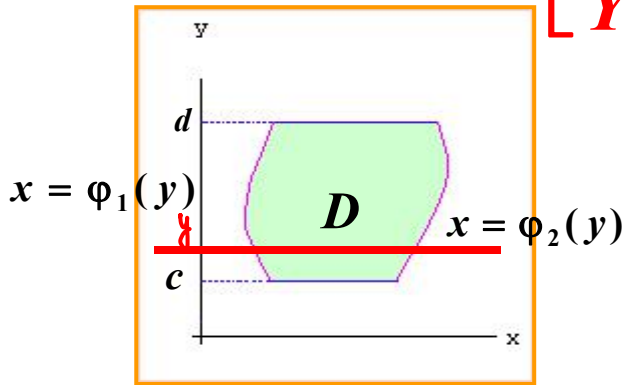
是f(x)

【微积分考研】
(ID: dky36)

(2)如果积分区域为:

$$D = \{(x, y) | c \leq y \leq d, \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y)\}.$$

[Y-型]



Y型区域的特点: 穿过区域且平行于x轴的直线与区域边界相交不多于两个交点.

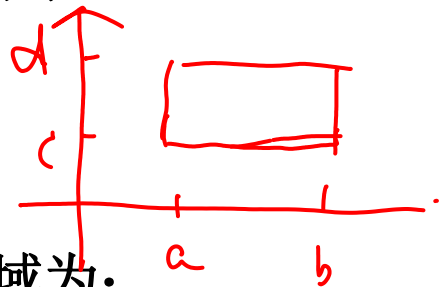
$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) dx.$$

正确

注1: 如果积分区域为:

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}, \quad \text{则}$$

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) d\sigma &= \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy \\ &= \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx \end{aligned}$$

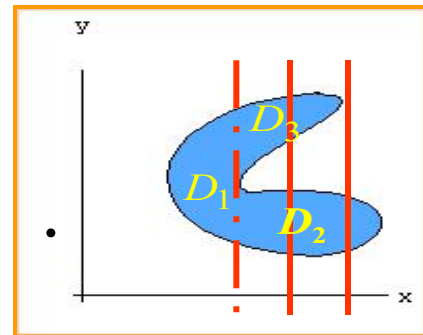


注2: 如果 $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ 可积, 且积分区域为:

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}, \quad \text{则}$$

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b \underline{f_1(x)} dx \int_c^d \underline{f_2(y)} dy$$

注3: 若区域如图, 则必须分割.
在分割后的三个区域上分别使用积分公式 $\iint_D = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} + \iint_{D_3}$



计算二重积分的步骤

(1) 画出积分区域 D 的草图.

(2) 用不等式组表示积分区域 D .

(3) 把二重积分表示为二次积分:

如果 D 是 X 型区域: $\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$, $a \leq x \leq b$, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

如果 $\overset{D}{D}$ 是 Y 型区域: $\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)$, $c \leq y \leq d$, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right] dy.$$

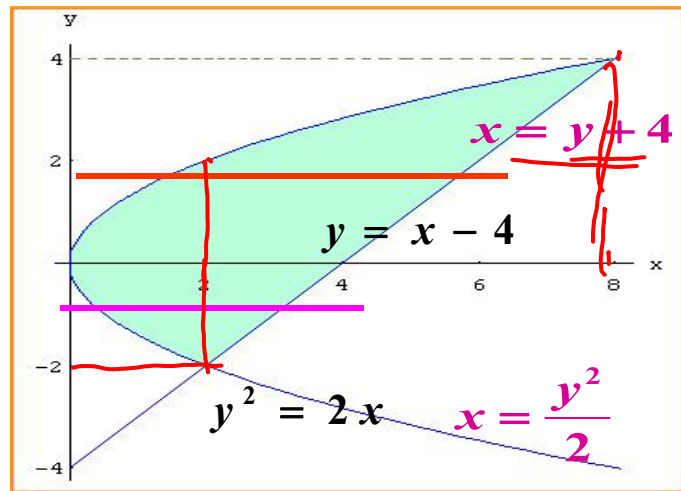
(4) 计算二次积分.

例 计算二重积分 $\iint_D y dx dy$, 其中区域 D 是由 $y^2 = 2x$ 及 $y = x - 4$ 所围成的闭区域

解 两曲线的交点 $\begin{cases} y^2 = 2x \\ y = x - 4 \end{cases} \Rightarrow (2, -2), (8, 4).$

$$D: -2 \leq y \leq 4, \frac{y^2}{2} \leq x \leq y + 4,$$

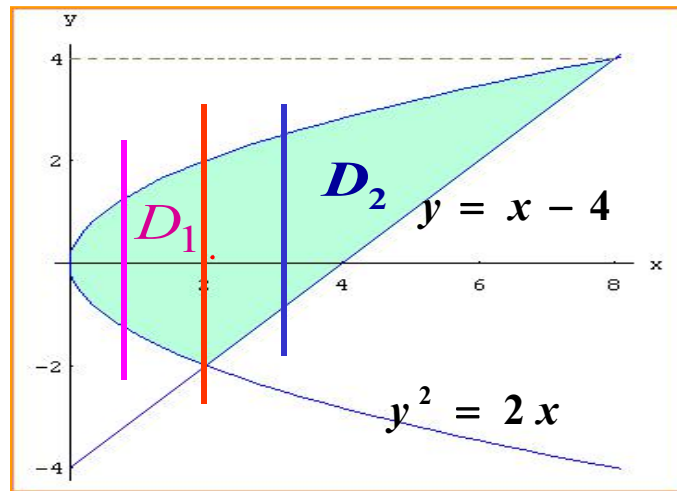
$$\begin{aligned} \iint_D y dx dy &= \int_{-2}^4 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{y+4} y dx \\ &= \int_{-2}^4 y \left(y + 4 - \frac{y^2}{2} \right) dy \\ &= \int_{-2}^4 \left(y^2 + 4y - \frac{y^3}{2} \right) dy \\ &= \left(\frac{1}{3} y^3 + 2y^2 - \frac{1}{8} y^4 \right) \Big|_{-2}^4 \\ &= 24 + 24 - 30 = 18. \end{aligned}$$



微信公号【顶少考研】
另解 若先对 x 积分, $D_1: 0 \leq x \leq 2, -\sqrt{2x} \leq y \leq \sqrt{2x}$,

$D_2: 2 \leq x \leq 8, x-4 \leq y \leq \sqrt{2x}$,

$$\begin{aligned}\iint_D y dx dy &= \int_0^2 dx \int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} y dy \\ &\quad + \int_2^8 dx \int_{x-4}^{\sqrt{2x}} y dy \\ &= \int_2^8 \left(\frac{y^2}{2} \Big|_{y=x-4}^{\sqrt{2x}} \right) dx \\ &= \int_2^8 \left(x - \frac{x^2 - 8x + 16}{2} \right) dx = \int_2^8 \left(5x - \frac{x^2}{2} - 8 \right) dx \\ &= \left(\frac{5}{2} x^2 - \frac{1}{6} x^3 \right) \Big|_2^8 - 8 \cdot 6 \\ &= 150 - 84 - 48 = 18.\end{aligned}$$

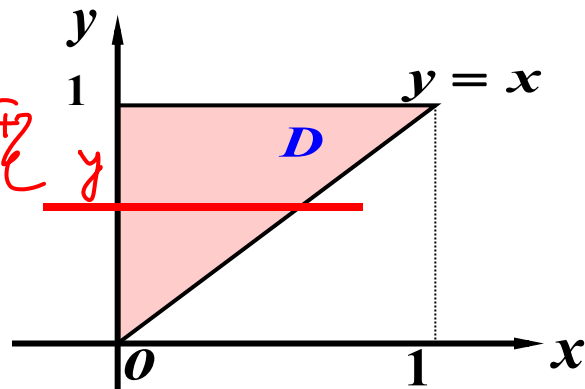


例 计算二重积分 $\iint_D x^2 e^{-y^2} dx dy$, 其中区域 D 是以 $(0,0), (1,1), (0,1)$ 为顶点的三角形

解 因 $\int e^{-y^2} dy$ 无法用初等函数表示, 所以积分时必须考虑次序,

$$D: 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y,$$

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 e^{-y^2} dx dy &= \int_0^1 e^{-y^2} dy \int_0^y x^2 dx \\ &= \int_0^1 e^{-y^2} \cdot \frac{y^3}{3} dy = \int_0^1 e^{-y^2} \cdot \frac{y^2}{6} dy^2 \\ &= \frac{1}{6} \int_0^1 u e^{-u} du = -\frac{1}{6} \int_0^1 u de^{-u} \\ &= -\frac{1}{6} [u e^{-u} \Big|_0^1 - \int_0^1 e^{-u} du] = -\frac{1}{6} (e^{-1} + e^{-u} \Big|_0^1) \\ &= \frac{1}{6} (1 - \frac{2}{e}). \end{aligned}$$



2、在极坐标系下的二重积分

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

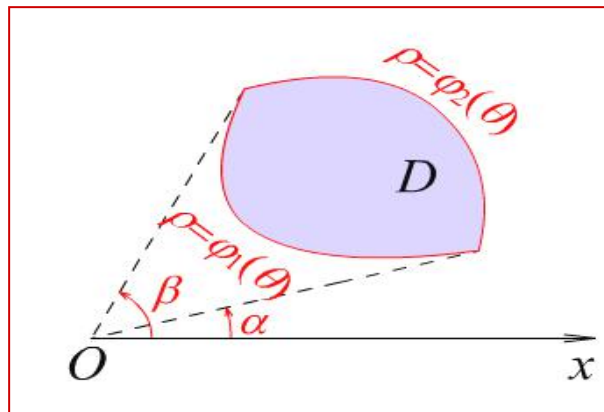
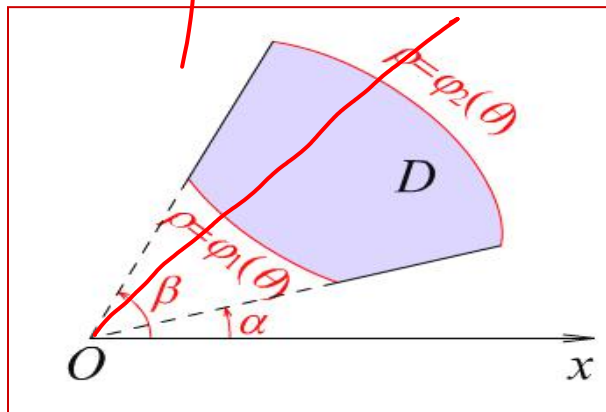
$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta.$$

$\rho \cdot r \cdot d\theta$

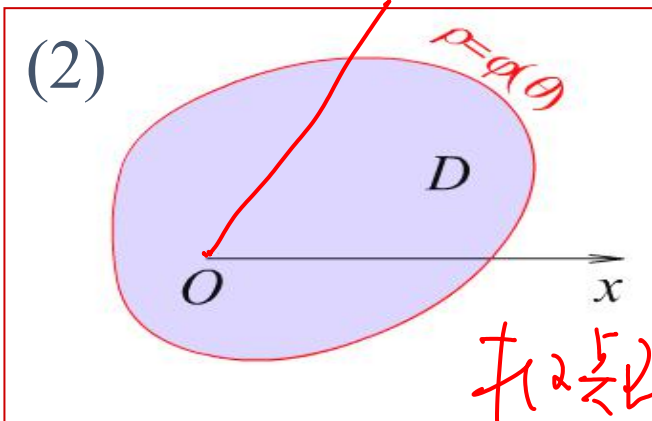
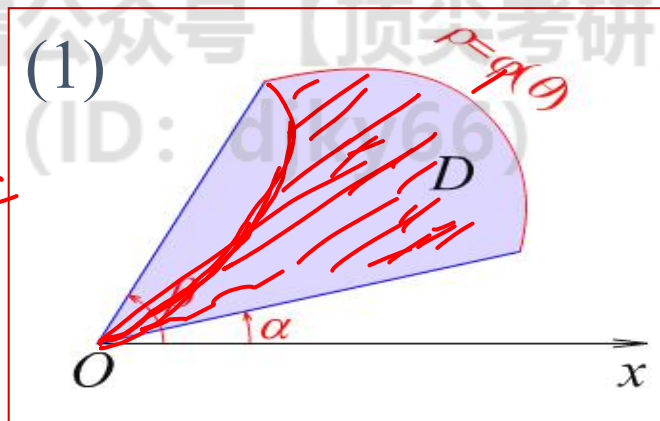
如果积分区域可表示为 $D: \varphi_1(\theta) \leq \rho \leq \varphi_2(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta$, 则

把区域 D 分作

$$\iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.$$



极坐标
ρ 为半径



极坐标 D 为扇形

$$(1) \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_0^{\phi(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.$$

$$(2) \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\phi(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.$$

1° $f(x^2+y^2)$ 或 $f(\frac{y}{x})$ 或 $f(\frac{x}{y})$
2° D 为区域 (部分)

注: 何种情况用极坐标

例、计算 $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, D 为由不等式

$\sqrt{2x - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}$ 所确定的在第一象限内区域.

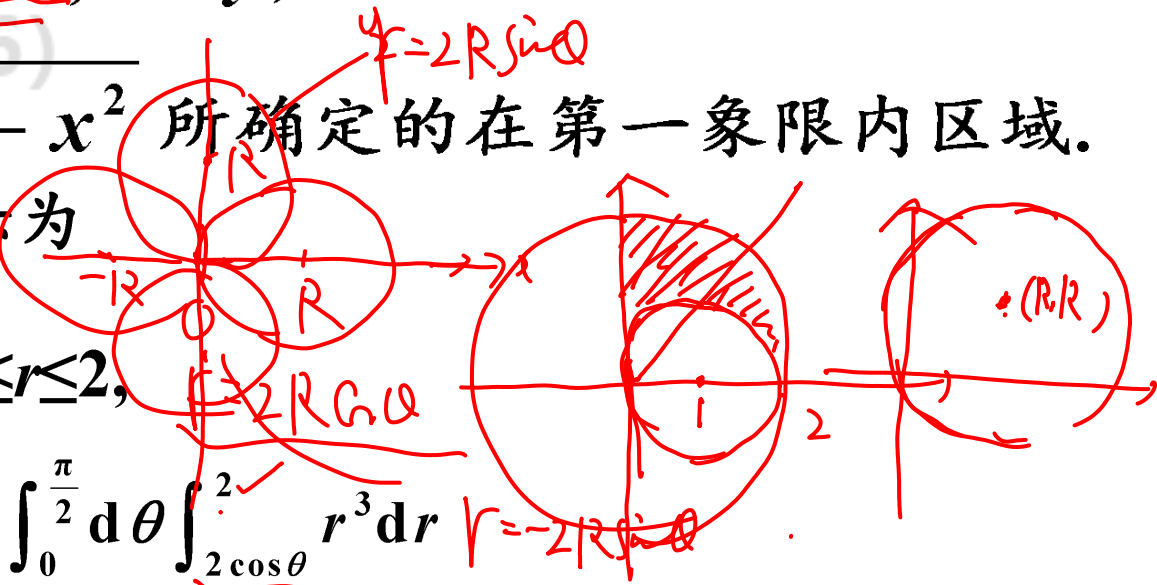
【解】积分区域可表示为

$$D: 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 2 \cos \theta \leq r \leq 2,$$

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2 \cos \theta}^2 r^3 dr$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^4 \theta) d\theta = \frac{5}{4} \pi.$$

$$= 4 \left(\frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta \right) \quad \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}$$

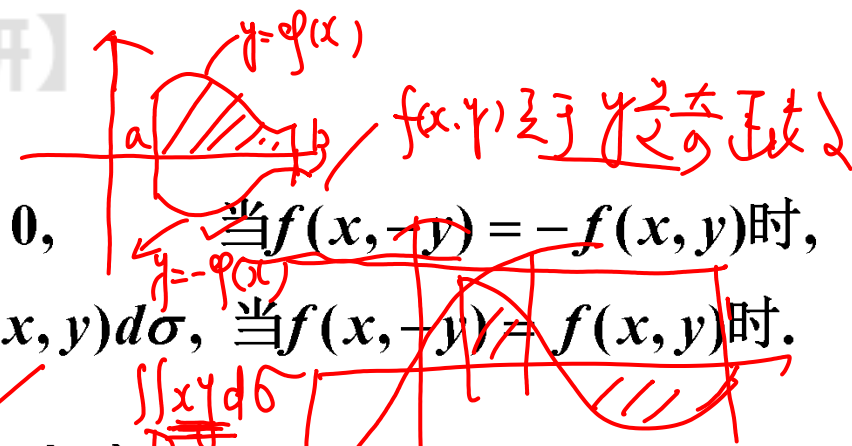


三、重要结论

1. 若 D 关于 x 轴对称, 则

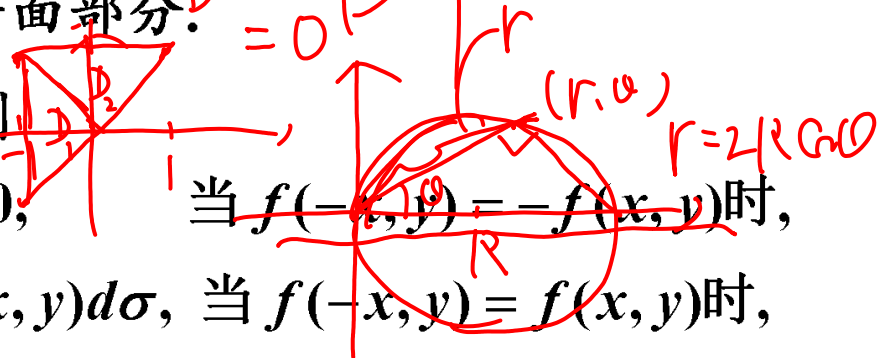
$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} 0, & \text{当 } f(x, -y) = -f(x, y) \text{ 时,} \\ 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma, & \text{当 } f(x, -y) = f(x, y) \text{ 时.} \end{cases}$$

其中 D_1 为 D 的上 (或下) 半平面部分.



2. 若 D 关于 y 轴对称, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} 0, & \text{当 } f(-x, y) = -f(x, y) \text{ 时,} \\ 2 \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma, & \text{当 } f(-x, y) = f(x, y) \text{ 时,} \end{cases}$$



其中 D_2 为 D 的右 (或左) 半平面部分.

3. 轮换对称性

D 关于直线 $y=x$ 对称.

$$(x, y) \in D \Rightarrow (y, x) \in D$$

若 x, y 互换后, 积分区域 D 不变, 则

$$\iint_D \underbrace{f(x, y)}_{\text{轮换}} dx dy = \iint_D \underbrace{f(y, x)}_{\text{轮换}} dx dy$$

$$= \frac{1}{2} \iint_D \underbrace{[f(x, y) + f(y, x)]}_{\text{轮换}} dx dy$$

❖ 计算二重积分的步骤

(1) 画出积分区域 D 的草图.

(2) 确定积分坐标系 (用不等式组表示积分区域 D).

(3) 确定积分次序 (把二重积分表示为二次积分):

后积分先定限——常数限

先积分后定限——函数限 (穿针法)

(4) 计算二次积分.

注: 对称性的利用.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

常考题型与典型例题

微信公众号【顶尖考研】

(ID: djky66)

主要考点

1. 二重积分的概念及性质
 2. 交换积分次序或坐标系
 3. 二重积分的计算
- 一 大题

一、交换积分次序

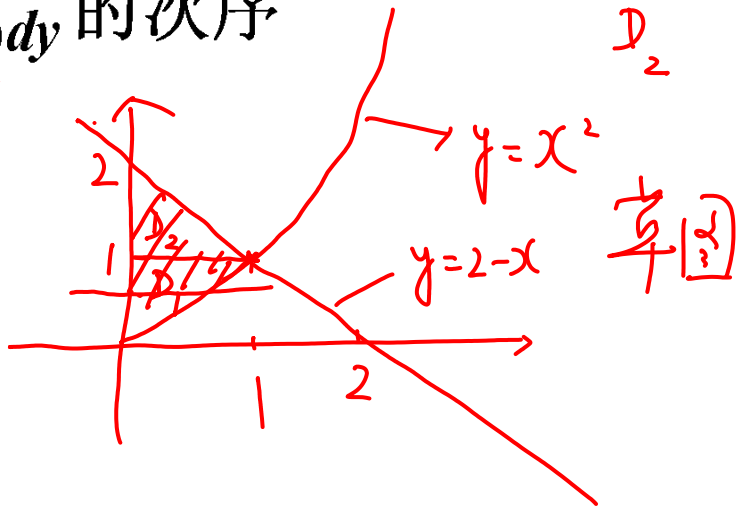
1° 求交换 2° 求交换 3° 求交换

例 1 交换累次积分

$$D: \int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x} f(x, y) dy + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x, y) dx$$

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x} f(x, y) dy \text{ 的次序}$$

先对 x 积分 $\Rightarrow$ 先对 y 积分



例 2(2009-2) 设函数 $z = f(x, y)$ 连续, 则

$$\int_1^2 dx \int_x^2 f(x, y) dy + \int_1^2 dy \int_y^{4-y} f(x, y) dx = \text{答案: C}$$

$\begin{matrix} 1 \leq x \leq 2 \\ x \leq y \leq 2 \end{matrix}$

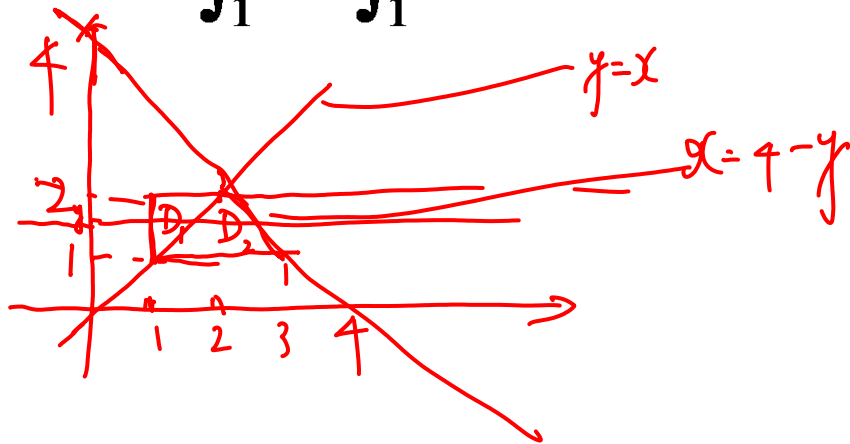
(A) $\int_1^2 dx \int_1^{4-x} f(x, y) dy.$

$\begin{matrix} D_2 \\ 1 \leq y \leq 2 \\ y \leq x \leq 4-y \end{matrix}$

(B) $\int_1^2 dx \int_x^{4-x} f(x, y) dy.$

(C) $\int_1^2 dy \int_1^{4-y} f(x, y) dx.$

(D) $\int_1^2 dy \int_y^2 f(x, y) dx.$



例 3(1996-3) 累次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$

又可表示成 () .

答案: D_1 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

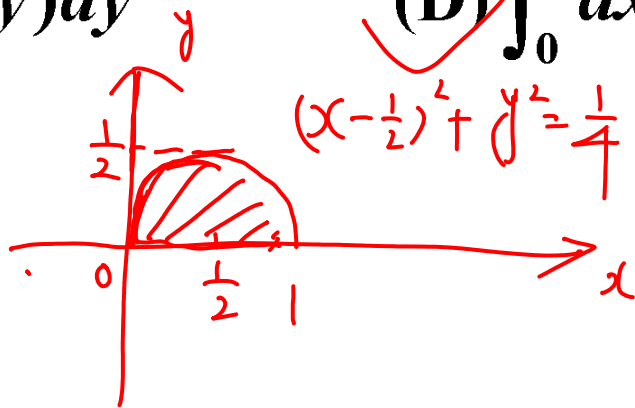
答案: D_1 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

(A) $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y-y^2}} f(x, y) dx$

(B) $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$

(C) $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy$

(D) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x, y) dy$



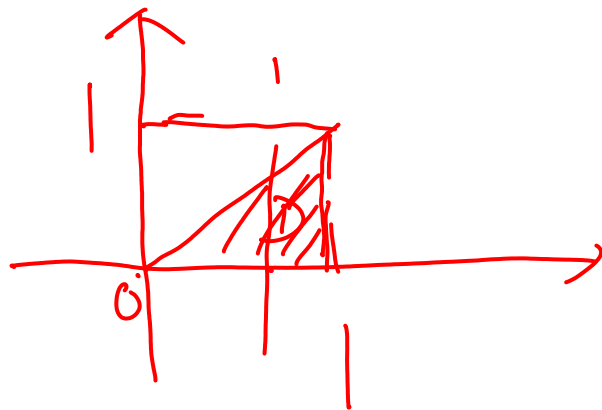
例 4(2017-2) $\int_0^1 dy \int_y^1 \frac{\tan x}{x} dx = \underline{-\ln \cos 1}.$

交换积分次序

D: $0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1$

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x \frac{\tan x}{x} dy$$

$$= \int_0^1 \tan x dx = -\ln |\cos x| \Big|_0^1$$



例 5、积分 $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

解: $I = \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} dy$

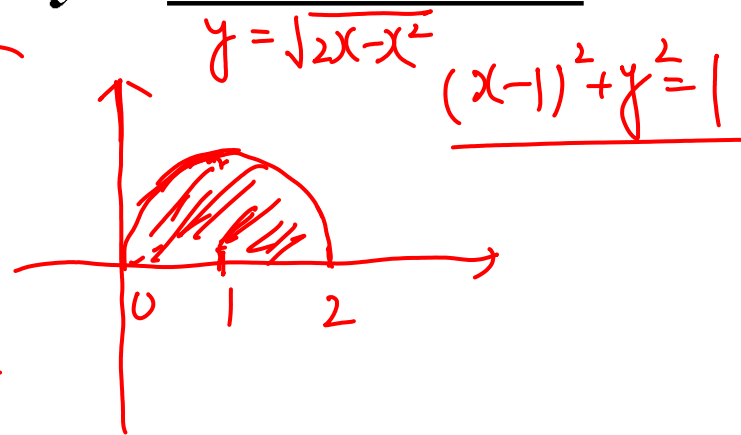
① $0 \leq x \leq 2$ $0 \leq y \leq \sqrt{2x-x^2}$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r \cdot r dr$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r^2 dr = \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta$

$= \frac{8}{3} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta \right)$

$= \frac{16}{9} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \theta) d\sin \theta$



二、二重积分的计算

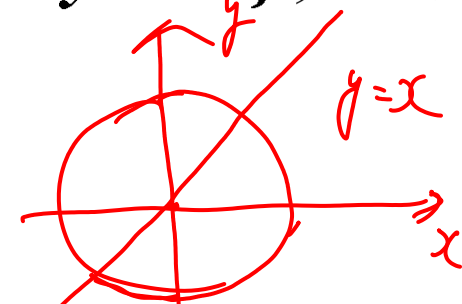
例 6(2008-3) 设 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, 则

$$\iint_D (x^2 - y^2) dx dy = \frac{\pi}{4}$$

$f(x, y) = x^2$
 $f(y, x) = y^2$

$$= \iint_D x^2 dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2 \cos^2 \theta \cdot r dr$$

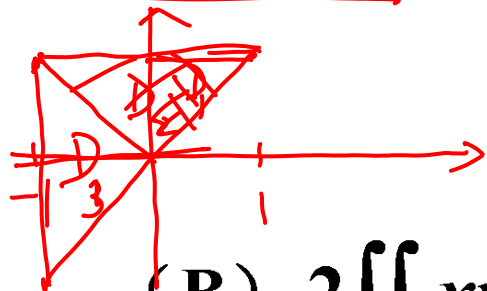
$$= \frac{1}{2} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^1 r^3 dr = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{4}$$


例 7(1991-12) 设 D 是 xOy 平面上以 $(1,1)$, $(-1,1)$ 和 $(-1,-1)$ 为顶点的三角形区域, D_1 是 D 的第一象限的部分, 则

$$\iint_D (\underbrace{xy}_{\text{red circle}} + \cos x \sin y) dx dy \text{ 等于}$$

$$= \iint_D \cos x \sin y dx dy$$



(A) $2 \iint_{D_1} \cos x \sin y dx dy .$

$$= \iint_{D_2} \cos x \sin y dx dy$$

(B) $2 \iint_{D_1} xy dx dy .$

(C) $4 \iint_{D_1} (xy + \cos x \sin y) dx dy .$

(D) 0. **答案: A**

例8(2006-3) 计算二重积分 $\iint_D \sqrt{y^2 - xy} dx dy$, 其中 D 是由直线 $y = x, y = 1, x = 0$ 所围成的平面区域.

解: 因为根号下的函数为关于 x 的一次函数, “先 x 后 y ”积分较容易

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{y^2 - xy} dx dy &= \int_0^1 dy \int_0^y \sqrt{y^2 - xy} dx \\ &= -\frac{2}{3} \int_0^1 \frac{1}{y} (y^2 - xy)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^y dy = \frac{2}{3} \int_0^1 y^2 dy = \frac{2}{9}. \end{aligned}$$



例 9(2017-2) 已知平面区域

$\frac{5}{4}\pi$.

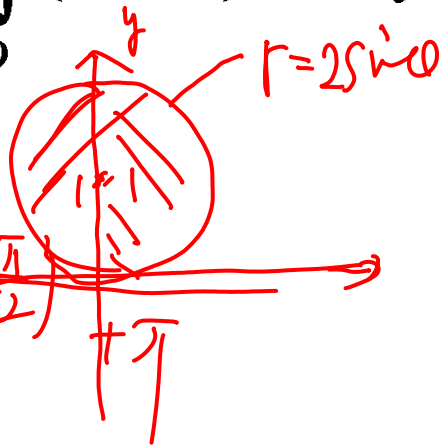
$D = \{(x, y) | \underline{x^2 + y^2 \leq 2y}\}$, 计算二重积分 $\iint_D \underline{(x+1)^2} dx dy$.

$$I = \iint_D (x^2 + \underline{2x} + 1) dx dy = \iint_D (x^2 + 1) dx dy$$

$$\stackrel{\text{拆}}{=} \iint_D x^2 dx dy + \pi \quad \left[8 \left(\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} - \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{5}{4}\pi \right]$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\alpha \int_0^{2\sin\alpha} r^2 \cos^2\alpha \cdot r dr + \pi$$

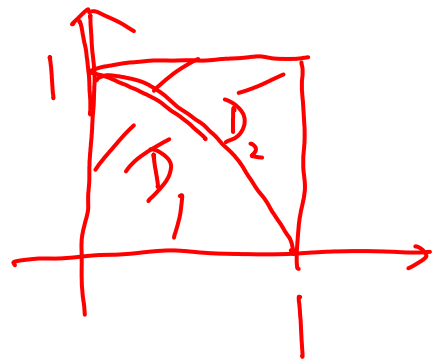
$$= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin^4\alpha}_{1^2 2^2 4^2} \underbrace{\cos^2\alpha}_{1^2 2^2 4^2} d\alpha = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4\alpha - \sin^6\alpha) d\alpha$$



例 10(2005-23) 计算二重积分 $\iint_D |x^2 + y^2 - 1| d\sigma$, 其
(ID: djky66)

中 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

$$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}.$$



$$I = \iint_{D_1} (1 - x^2 - y^2) d\sigma + \iint_{D_2} (x^2 + y^2 - 1) d\sigma$$

$$= \iint_{D_1} (1 - x^2 - y^2) d\sigma + \iint_D (x^2 + y^2 - 1) d\sigma - \iint_{D_2} (x^2 + y^2 - 1) d\sigma$$

$$= 2 \iint_{D_1} (1 - x^2 - y^2) d\sigma - \frac{1}{3}$$

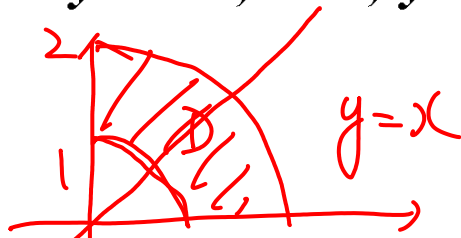
$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 (1 - r^2) r dr - \frac{1}{3}$$

例 11(2014-23). 设平面内区域 $D=\{(x, y) \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, 计算

$$\iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2+y^2})}{x+y} dx dy.$$

【解】 利用极坐标,

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2+y^2})}{x+y} dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^2 \frac{r \cos \theta \sin(\pi r)}{r(\cos \theta + \sin \theta)} r dr \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta} d\theta \int_1^2 r \sin \pi r dr = -\frac{3}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta} d\theta \\ &= -\frac{3}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta} d\theta = -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$



Handwritten notes in red ink:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin \theta, \cos \theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(\sin \theta, \cos \theta) + f(\cos \theta, \sin \theta)] d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + f(a+b-x)] dx = \int_a^b f(x) dx$$

where $x = a+b-t$.

例 11(2014-23). 设平面内区域 $D=\{(x, y) \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, 计算

$$\iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2+y^2})}{x+y} dx dy.$$

【另解】 可利用轮换对称性

$$\text{原式} = \frac{1}{2} \left[\iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2+y^2})}{x+y} dx dy + \iint_D \frac{y \sin(\pi \sqrt{y^2+x^2})}{y+x} dx dy \right]$$

$$= \frac{1}{2} \iint_D \sin(\pi \sqrt{x^2+y^2}) dx dy = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^2 r \sin \pi r dr$$

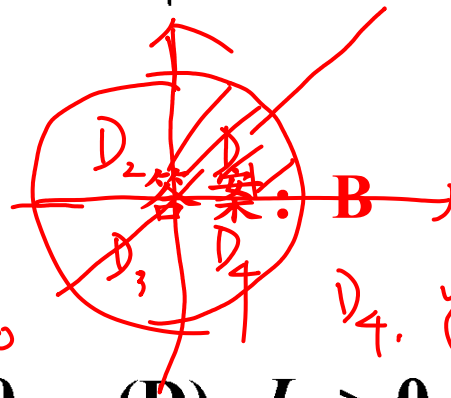
$$= \frac{\pi}{4} \cdot \left(-\frac{3}{\pi}\right) = -\frac{3}{4}.$$

例 12(2013-23) 设 D_k 是圆域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$

位于第 k 象限部分, 记

$D_2: y-x \geq 0$

$I_k = \iint_{D_k} (y-x) dx dy \quad (k=1, 2, 3, 4)$, 则



$D_4: y-x < 0$

- (A) $I_1 > 0$. (B) $I_2 > 0$. (C) $I_3 > 0$. (D) $I_4 > 0$.

$D_1: y-x \geq 0$

$I_1 = \frac{1}{2} \iint_{D_1} [(y-x) + (x-y)] d\sigma = 0$

