

2022年研究生入学考试

高等数学(微积分)基础班

2020年11月

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

第五章 定积分与反常积分

考试要点

一、定积分

数

(积分)

求导

11/12/13 数二

- 1、概念及性质（包括定积分定义求极限等）
- 2、变限积分（与其他知识点结合，几乎每年有）
- 3、各种计算
牛-莱公式、奇偶性、周期性、几何意义等
- 4、证明题
相关的等式及不等式

二、反常积分

1、求反常积分

原考查较简单

2、收敛性判定

新增 “比较判别法”

考试要求

1. 理解(了解)定积分的概念.
2. 掌握(了解)定积分的性质及定积分中值定理, 掌握换元积分法与分部积分法.
3. 会求有理函数、三角函数有理式和简单无理函数的积分 (数一、二).
4. 理解积分上限的函数, 会求它的导数, 掌握牛顿-莱布尼茨公式.
5. 理解反常积分的概念, 了解反常积分收敛的比较判别法, 会计算反常积分.
6. 掌握用定积分表达和计算一些几何量与物理量 (平面图形的面积、平面曲线的弧长、旋转体的体积及侧面积、平行截面面积为已知的立体体积、功、引力、压力、质心、形心等) 及函数的平均值. (会用定积分求解简单的经济应用问题)

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

第一节 定积分

考试内容概要

1° 划分
2° 取点
3° 作和
4° 求极限

一、定积分的概念

和 sum

1、定义 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 且 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} (i = 1, 2, \cdots, n)$, $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$. 任取一点 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], (i = 1, 2, \cdots, n)$, 如果 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ 存在 (且与 $[a, b]$ 的分法及 ξ_i 的取法无关), 则称此极限为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的定积分, 记为 $\int_a^b f(x) dx$, 并称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

积分上限

积分和

$$\int_a^b f(x) dx = I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

积分下限

被积
函数

被积表
达式

积分变
量

$[a, b]$ 积分区间

注：微信公众号【顶尖考研】

(1) 定积分是和式的极限，因此它是一个数。

(2) 定积分值仅与被积函数及积分区间有关，而与积分变量用什么字母表示无关。

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du$$

(3) 定义中区间的分法和 ξ_i 的取法是任意的。

(4) 利用定积分的定义可求一些和式数列的极限。

Handwritten diagram illustrating the Riemann sum approximation of a definite integral. It shows a function $f(x)$ on the interval $[a, b]$. The interval is divided into n subintervals, with the i -th subinterval having width $\frac{b-a}{n}$ and a sample point $\xi_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$. The area of the i -th rectangle is $f(\xi_i) \cdot \frac{b-a}{n}$. The total area is the sum of these rectangles, which approximates the integral $\int_a^b f(x) dx$. The diagram also shows the limit process $n \rightarrow \infty$.

Handwritten derivation showing how to evaluate a limit of a sum using the definition of the definite integral:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 f(x) dx$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left[a + \frac{i}{n}(b-a)\right] \cdot \frac{(b-a)}{n} = \int_a^b f(x) dx$$

2. 定积分存在的条件

定理1 当函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续时,
则 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积.

即 有限区间上的连续函数是可积的.

定理2 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有界,
且只有有限个间断点, 则 $f(x)$ 在 区间 $[a, b]$ 上可积.

即 有限区间上只有有限个间断点的有界函数
是可积的.

定理3 可积函数必定有界.

可积

必要

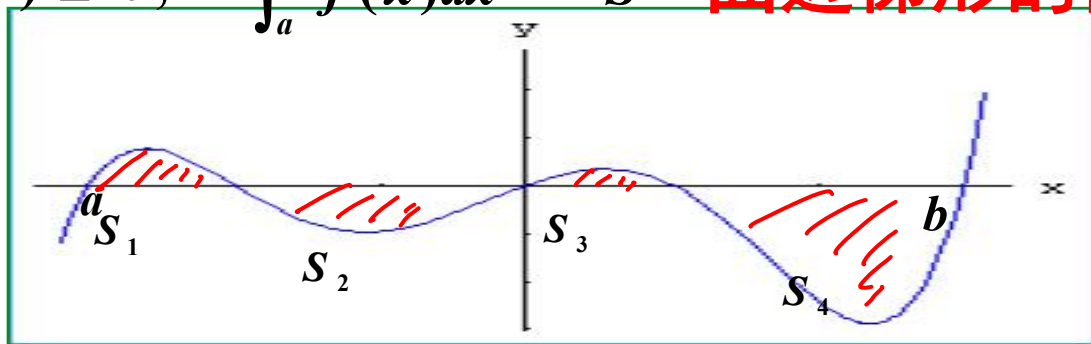
3、定积分的几何意义

$$f(x) \geq 0, \quad \int_a^b f(x) dx = S$$

曲边梯形的面积

$$f(x) \leq 0, \quad \int_a^b f(x) dx = -S$$

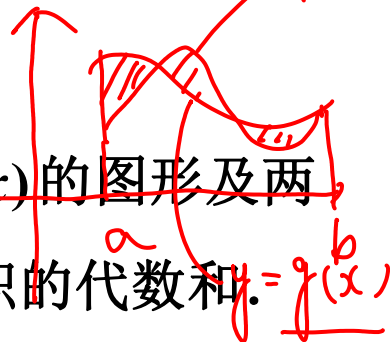
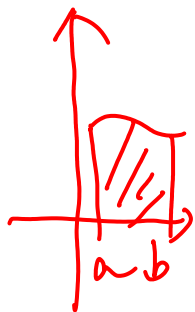
曲边梯形的面积的负值



$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = S_1 - S_2 + S_3 - S_4$$

$\int_a^b f(x) dx$ 是介于 x 轴、函数 $f(x)$ 的图形及两条直线 $x = a, x = b$ 之间的各部分面积的代数和。



一、定积分的性质：

1. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$;

2. $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$ ($k \neq 0$ 为常数) ;

3. $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$;

4. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

5. 若在 $[a, b]$ 上, $f(x) \leq g(x)$, 则 $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx, (a < b)$

6. $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

性质1 函数和、差的定积分等于定积分的和、差, 即

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

证:

$$\begin{aligned} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)] \Delta x_i \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \pm \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x_i \\ &= \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx . \end{aligned}$$

(此性质可以推广到有限多个函数作和的情况)

注1: 若 $f(x) + g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则 $f(x)$ 、 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上不一定可积.

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \begin{cases} b-a \\ 0 \end{cases}$$

ξ_i 为任意点
 Δx_i 为小区间长度

如: ξ_i 为有理数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ 为有理数} \\ 1, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

则 $f(x) + g(x) = 1$,

显然 $f(x) + g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可积,

但 $f(x)$ 、 $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上都不可积,

如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上最大值和最小值分别为 $\underline{M}, \underline{m}$

1A005 则 $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

8. 积分中值定理:

如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

1B005 (1分)

如果 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $g(x)$ 不变号, 则至少存在一点 $\xi \in [a, b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$$

三、积分上限的函数

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $\int_a^x f(t) dt$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且

$$\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x)$$

注: 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则 $\int_a^x f(t) dt$ 在 $[a, b]$ 上连续。

若 $f(x)$ 连续, $g(x), h(x)$ 可导, 则 ~~熟记~~

$$\left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt \right)' = f[h(x)]h'(x) - f[g(x)]g'(x)$$

需要注意的是, 如果被积函数中有变量 x , 一定要将其分离出来, 或变到积分限上。

证

$$G(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt$$

$$\Delta G = G(x + \Delta x) - G(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt$$

$$= \int_a^x \cancel{f(t) dt} + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x \cancel{f(t) dt}$$

$$= \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = f(\xi) \Delta x \quad \xi \in [x, x + \Delta x],$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta G}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = f(x)$$

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt$$

被积
 $\Delta x > 0$

1. 牛顿—莱布尼茨公式

如果 $f(x)$ 连续且 $\int f(x)dx = \textcircled{F(x)} + c$,

则 $\int_a^b f(x)dx = \underline{F(b) - F(a)}$

2. 换元积分法 $x = \varphi(t)$ 换元积分法

$$\int_a^b \underline{f(x)}dx = \int_{\underline{\alpha}}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

(注意上下限)

其中 $\alpha = \varphi^{-1}(a)$, $\beta = \varphi^{-1}(b)$, $\varphi^{-1}(t)$ 为 $\varphi(t)$ 的反函数

3. 分部积分公式 $u(x), v'(x)$ 选择

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)] \Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$$

4. 利用奇偶性、周期性及几何意义

1) 奇偶函数在对称区间上的定积分

若 $f(x)$ 为 $[-a, a]$ 上奇函数, 则 $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

若 $f(x)$ 为 $[-a, a]$ 上偶函数, 则 $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

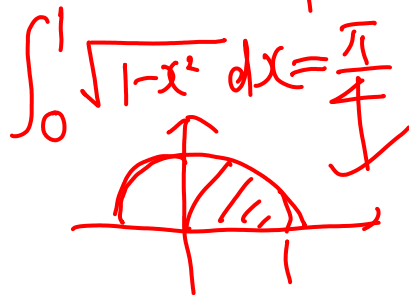
2) 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的函数

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx = \int_{-T/2}^{T/2} f(x) dx$$

$$\int_0^{nT} f(x) dx = n \int_0^T f(x) dx$$

3) 几何意义

$$y = \sqrt{1-x^2}$$



拆: $f = f_1 + f_2$
 $\int_{-a}^b = \int_{-a}^a + \int_a^b$
 $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ (if odd)
 $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ (if even)

拆: $\int_0^T f(x) dx = \int_0^{T/2} f(x) dx + \int_{T/2}^T f(x) dx$
 $\int_{T/2}^T f(x) dx = \int_{-T/2}^0 f(x) dx$ (if periodic)

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}$$

5. 利用重要公式

微信号: djky66

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^3 dx$$

$$1) I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$$

$\int_a^b f(x) dx$
 $x=a+b-t$
 $x=\pi-t$
 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi-t) f(\sin t) dt$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$$

$$\begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1, \end{cases}$$

n 为正偶数,

n 为大于1的正奇数.

$$2) \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t) dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} t f(\sin t) dt$$

(微积分基本公式)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上 连续，且 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的任意一个原函数，则

Xibolin@163.com

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

证 $G(x) = \int_a^x f(t) dt$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数，

$$\therefore F(x) - G(x) = C \quad x \in [a, b]$$

$$\text{令 } x = a \Rightarrow F(a) - G(a) = C,$$

$$G(a) = \int_a^a f(t) dt = 0 \Rightarrow F(a) = C,$$

$$\therefore F(x) - \int_a^x f(t) dt = C, \quad x = b \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

常考题型与典型例题



一、概念及性质

例1 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right]$

解: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+(n-1)} + \frac{1}{2n} \right]$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{n(1+\frac{1}{n})} + \frac{1}{n(1+\frac{2}{n})} + \dots + \frac{1}{n(1+\frac{n-1}{n})} + \frac{1}{n(1+\frac{n}{n})} \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+\frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2$$

n次f0

n+n | 1+1/n | 2
0 1/n

f(x)

和式可理解为: $\frac{1}{1+x}$ 在区

间 $[0,1]$ 上的一个积分和,

分割是将 $[0,1]$ n 等分,

因 $\frac{1}{1+x}$ 在 $[0,1]$ 上连续,

所以在 $[0,1]$ 是可积 .

= \int_1^2 \frac{1}{x} dx

例 2(2012-2) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{1+n^2} + \frac{1}{\underline{2^2+n^2}} + \cdots + \frac{1}{\underline{n^2+n^2}} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【解】 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{1+n^2} + \frac{1}{2^2+n^2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n^2} \right)$ |-----|
0 Δx_i

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + 1} + \frac{1}{\left(\frac{2}{n}\right)^2 + 1} + \cdots + \frac{1}{\left(\frac{n}{n}\right)^2 + 1} \right] \cdot \frac{1}{n}$

$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$

例 3(2016-23) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left(\sin \frac{1}{n} + \frac{2}{n} \sin \frac{2}{n} + L + \frac{n}{n} \sin \frac{n}{n} \right) = \underline{\hspace{2cm}} .$

【解】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left(\sin \frac{1}{n} + 2 \sin \frac{2}{n} + L + n \sin \frac{n}{n} \right)$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} \sin \frac{1}{n} + \frac{2}{n} \sin \frac{2}{n} + L + \frac{n}{n} \sin \frac{n}{n} \right)$$

$f(x) = x \sin x$

$$= \int_0^1 x \sin x dx = - \int_0^1 x d \cos x$$

$$= -x \cos x \Big|_0^1 + \int_0^1 \cos x dx = \sin 1 - \cos 1.$$

例 4(2017-123) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \ln(1 + \frac{k}{n})$. (10分)

【解】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \ln(1 + \frac{k}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \ln(1 + \frac{k}{n}) \cdot \frac{1}{n}$ $\Delta x = \frac{1}{n}$

$$\begin{array}{r} x-1 \\ x+1 \overline{) x^2} \\ \underline{x^2+x} \\ -x \\ \underline{-x-1} \end{array}$$

$$\frac{x^2}{1+x} = x-1 + \frac{1}{x+1}$$

$$= \int_0^1 x \ln(1+x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \ln(1+x) dx^2$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \ln(1+x) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2-1+1}{1+x} dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \int_0^1 (x-1 + \frac{1}{1+x}) dx = \frac{1}{4}.$$

2022年研究生入学考试

高等数学(微积分)基础班

2021年1月

考试内容及试题类型(新大纲预计)

类型	内容	选择题		填空题		解答题		百分比	合计	总分
		个数	分数	个数	分数	个数	分数			
数学一	高数	6	30	4	20	4	40	60%	90	150
	线代	2	10	1	5	1	15	20%	30	
	概统	2	10	1	5	1	15	20%	30	
数学二	高数	8	40	5	25	5	55	80%	120	150
	线代	2	10	1	5	1	15	20%	30	
数学三	高数	6	30	4	20	4	40	60%	90	150
	线代	2	10	1	5	2	15	20%	30	
	概统	2	10	1	5	2	15	20%	30	

考试内容及试题类型(新大纲实际)

类型	内容	选择题		填空题		解答题		百分比	合计	总分
		个数	分数	个数	分数	个数	分数			
数学一	高数	4 ⁶	20	4	20	4 ^{10+3×1}	46	57.33%	86 ⁹⁰	150
	线代	3 ²	15	1	5	1	12	21.33%	32 ³⁰	
	概统	3 ²	15	1	5	1	12	21.33%	32 ³⁰	
数学二	高数	7	35	5	25	5	58	78.66%	118	150
	线代	3	15	1	5	1	12	21.33%	32	
数学三	高数	4	20	4	20	4	46	57.33%	86	150
	线代	3	15	1	5	2	12	21.33%	32	
	概统	3	15	1	5	2	12	21.33%	32	

数 1、2

求极限

$\lim_{x \rightarrow 0}$

$$\left[\frac{1 + \int_0^x e^{t^2} dt}{e^x - 1} - \frac{1}{\sin x} \right].$$

(10')

"非0/0"

" $\infty - \infty$ "

答案：1/2

数3

已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[a \arctan \frac{1}{x} + (1 + |x|)^{\frac{1}{x}} \right]$ 存在, 求 a 的值

解法1 取 $x \rightarrow 0^+$

2 (1) 3

(10分)
?

答案: $\frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{e} - e \right)$

2021 年高等数学（微积分）试题分布

	函数极限 连续	一元 微分	一元 积分	多元 微分	二重 积分	微分 方程	级数	解析几 何	线面积 分
数一	10	15	10	17	6	5	12 <i>含变子</i>	0	5+6
数二	20	37+6	17	10	17	5+6	—	—	—
数三	15	15	10	17	12	5+6	6	—	—

2021 年高等数学（微积分）相同试题

	数学一	数学二	数学三
数一		选填解答 $\underline{15+5+10}$	$\underline{10+0+12}$
数二	$15+5+10$		$\underline{20+0+0}$
数三	$10+0+12$	$20+0+0$	

几个特征（延续了以往的考查）

- 1、注重基础（基础知识、基本理论、基本方法和技巧）
- 2、考查能力（特别是计算能力）
- 3、综合性
- 4、没有偏题、怪题（有个别难题）

2021试题特点

- 1、关注低频考点
- 2、新增内容体现不充分
- 3、客观题难度加大
- 4、解答题综合性加强

2021年
1° $\frac{1}{2} \ln \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ — 小题 (求导求值/求极限)
2° $\frac{1}{2} \ln \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ — 大题

(2021 数学 1、2) 函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 则 $\int_0^1 f(x) dx =$

(ID: djky66)

答案: B

(A) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \frac{1}{2n}$

X

(B) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \frac{1}{n}$

(C) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k-1}{2n}\right) \frac{1}{n}$

X

$\frac{\frac{k-1}{2n} + \frac{k}{2n}}{2} = \frac{k-1}{2n} + \frac{k}{2n}$

(D) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{2n}\right) \frac{2}{n}$

X

$\frac{n+1}{2}$

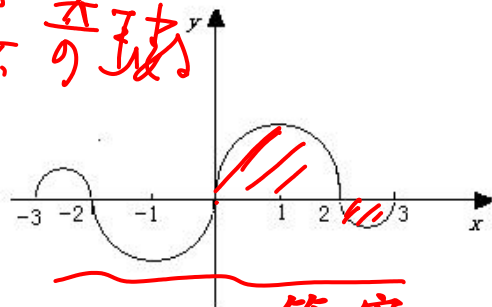
$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}$



例 5(2007-123) 如图, 连续函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-3, -2]$, $[2, 3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周, 在区间 $[-2, 0]$, $[0, 2]$ 的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周, 设 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, 则下列结论正确的是:

(A) $F(3) = -\frac{3}{4}F(-2)$ (B) $F(3) = \frac{5}{4}F(2)$

(C) $F(3) = \frac{3}{4}F(2)$ (D) $F(3) = -\frac{5}{4}F(-2)$



答案: C

【解】利用定积分的几何意义, 可得

$$F(3) = \frac{1}{2}\pi 1^2 - \frac{1}{2}\pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}\pi, \quad F(2) = \frac{1}{2}\pi 1^2 = \frac{1}{2}\pi,$$

$$F(-2) = \int_0^{-2} f(x)dx = -\int_{-2}^0 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx = \frac{1}{2}\pi 1^2 = \frac{1}{2}\pi.$$

所以 $F(3) = \frac{3}{4}F(2) = \frac{3}{4}F(-2)$, 故选 (C).

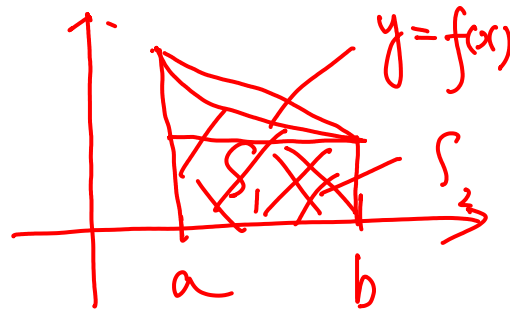
例 6(1997-12) 设在区间 $[a, b]$ 上,

(ID: diky66)

$$\underline{f(x) > 0, f'(x) < 0, f''(x) > 0}$$

令 $S_1 = \int_a^b \underline{f(x)} dx, S_2 = f(b)(b - a),$

$S_3 = \frac{1}{2}[f(a) + f(b)](b - a),$ 则



(A) $S_1 < S_2 < S_3$

(B) $S_2 < S_1 < S_3$

(C) $S_3 < S_1 < S_2$

(D) $S_2 < S_3 < S_1$

分析: 利用几何意义 答案: B

例 7(2011-123) 设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cot x dx$, $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx$,

则 I, J, K 的大小关系是

(A) $I < J < K$.

(C) $J < I < K$.

(B) $I < K < J$.

(D) $K < J < I$.

【解】 在 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 上, $\sin x \leq \cos x \leq \cot x$, 且 $\ln x$ 是增函数, 则在 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 上,

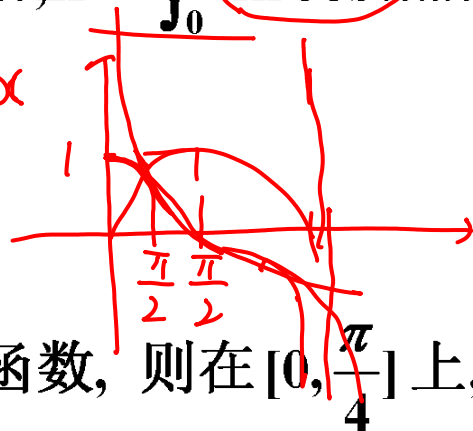
$\ln \sin x \leq \ln \cos x \leq \ln \cot x$, 且它们不恒等. 由定积分的保号性

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x dx < K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx < J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cot x dx.$$

【答案】 (B).

$[0, \frac{\pi}{4}]$

$\sin x \leq \cos x \leq \cot x$





例 8(2017-2) 设二阶可导函数 $f(x)$ 满足 $f(1) = f(-1) = 1, f(0) = -1$,

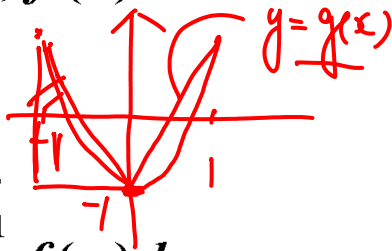
且 $f''(x) > 0$, 则 $f(x) = 2x^2 - 1$

(A) $\int_{-1}^1 f(x) dx > 0.$

(C) $\int_{-1}^0 f(x) dx > \int_0^1 f(x) dx.$

(B) $\int_{-1}^1 f(x) dx < 0.$

(D) $\int_{-1}^0 f(x) dx < \int_0^1 f(x) dx.$



【解】 曲线 $y = f(x)$ 是凹的，其上任意两点间的弧均在过这两点的割线下方。

当 $x \in (-1, 0)$ 时, $f(x) < f(0) + \frac{f(-1) - f(0)}{-1} x = -2x - 1;$

当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) < f(0) + \frac{f(1) - f(0)}{1} x = 2x - 1.$

故

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx$$

【答案】 (B).

$$< \int_{-1}^0 (-2x - 1) dx + \int_0^1 (2x - 1) dx = 0.$$

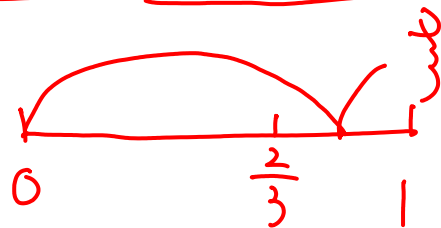
例 9(1991-12) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, $(0,1)$ 内可导, 且 $3 \int_{\frac{2}{3}}^1 f(x) dx = f(0)$,

证明在在 $(0,1)$ 内存在一点 c , 使得则 $f'(c) = 0$. 罗尔定理

【证明】

积分中值定理

$\xi \in (\frac{2}{3}, 1)$ 上



$$3 \times f(\xi) \times \frac{1}{3} = f(0)$$

$f(x)$ 在 $[0, \frac{2}{3}]$ 上(用)罗尔定理

$\exists c \in (0, \frac{2}{3}) \subset (0, 1)$ 上
 $f'(c) = 0$

补例、

设 $f(x) = 4x - \int_0^1 f(x) dx$ 求 $f(x)$ B

分析：令 $A = \int_0^1 f(x) dx$

则 $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 4x dx - \int_0^1 A dx$

有 $A = 2 - A, A = 1,$

从而 $f(x) = 4x - 1$

$+ \int_0^2 f(x) dx$
 $\int_0^1 A$
 $\int_0^1 \frac{1}{x} \cdot 2 \cdot \frac{1}{x} dx$

二、定积分的计算

(ID: diky66)

太 简单 一 秒 分

例 10(2001-2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3 + \sin^2 x) \cos^2 x dx = \underline{\hspace{2cm}}$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{x^3 \cos^2 x}_{\text{奇}} dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin^2 x \cos^2 x}_{\text{偶}} dx \\
 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x - \cos^4 x) dx = 2 \left(\frac{1}{2} x \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4} x \frac{1}{2} x \frac{\pi}{2} \right) \\
 &\stackrel{2^0}{=} \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2x) dx = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4x) dx \\
 &= \frac{\pi}{8}
 \end{aligned}$$

1 分 2 秒

例 11(2017-3) $\int_{-\pi}^{\pi} (\sin^3 x + \sqrt{\pi^2 - x^2}) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

【解】 $\int_{-\pi}^{\pi} (\sin^3 x + \sqrt{\pi^2 - x^2}) dx$ (奇函数) 偶函数

$y = \sqrt{\pi^2 - x^2}$



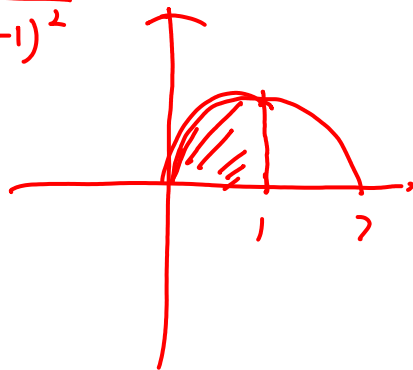
$= \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\pi^2 - x^2} dx = \frac{\pi^3}{2}.$

$x = \pi \sin t$

例 12(2000-1) $\int_0^1 \sqrt{2x - x^2} dx = \frac{\int_0^1 \sqrt{1 - (x-1)^2} dx}{\quad}$.

几何意义 $\frac{\pi}{4}$

$y = \sqrt{1 - (x-1)^2}$



例 13 $\int_0^{\pi} x \sin^2 x dx =$ 1° 分部积分 $\frac{1}{2}$

法一、降幂+分部

$$I = \int_0^{\pi} x \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} x dx - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} x \cos 2x dx$$

$$I = \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx \quad \underline{x = \pi - x}$$

法二、用结论

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$$

$$\int_0^{\pi} x \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi^2}{4}$$

例 14(2005-2) $\int_0^1 \frac{xdx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} =$.

【解】 令 $x = \sin t$, 则

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{xdx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t \cancel{\cos t}}{(2-\sin^2 t) \cancel{\cos t}} dt \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d \cos t}{1 + \cos^2 t} = -\arctan(\cos t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

例 15(2010-1) $\int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \cos \sqrt{x} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

【解】 令 $\sqrt{x} = t$ ，则 $x = t^2$ ， $dx = 2t dt$ 。因而

$$\int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \cos \sqrt{x} dx = \int_0^{\pi} \underbrace{2t^2}_{\substack{\downarrow \\ x \equiv}} \cos t dt = 2 \int_0^{\pi} t^2 d \sin t$$

$$= 2 \left[t^2 \sin t \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2t \sin t dt \right] = 4 \left[\int_0^{\pi} t d \cos t \right]$$

$$= 4 \left[t \cos t \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos t dt \right] = -4\pi.$$

例 16、计算 $\int_0^1 x \arcsin x dx$ _____.

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \arcsin x dx^2$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \arcsin x \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2-1+1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

(x = \sin t)

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arcsin x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{8}$$

例 17(1995-3) 设 $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t} dt$, 求 $\int_0^\pi f(x) dx$ (分部积分) $f'(x) = \frac{\sin x}{\pi - x}$

解:
$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(x) dx &= \int_0^\pi f(x) d(x - \pi) \\ &= \underbrace{(x - \pi)}_0 \underbrace{f(x)}_0 \Big|_0^\pi - \int_0^\pi (x - \pi) f'(x) dx \\ &= 0 - \int_0^\pi (x - \pi) \frac{\sin x}{\pi - x} dx \end{aligned}$$

分析
$$\begin{aligned} I &= x f(x) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi x f'(x) dx = 2 \\ &= \pi f(\pi) - \int_0^\pi x \cdot \frac{\sin x}{\pi - x} dx \end{aligned}$$

三、变上限定积分 (微分学) 1° 求导 2° 求值

例 18、设 $f(x)$ 连续, 计算下列函数的导数

$$(1) \left(\int_{e^x}^{x^2} f(t) dt \right)'$$

$$= 2x f(x^2) - e^x f(e^x)$$

$$(2) \int_0^x (x-t) f(t) dt$$

$$= \left[x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt \right]'$$

$$= \underbrace{\int_0^x f(t) dt}_{\text{求导}} + x f(x) - x f(x)$$

$f(x) \in [a, b] \Rightarrow \left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x)$

$\int_a^x f(t) dt \xrightarrow{\text{求导}} f(x)$

$$\left[\int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt \right]' \neq$$

微信公众账号【顶尖考研】
(ID: djky66)

$$(3) \left(\int_0^x \cos(\underline{x-t})^2 dt \right)'$$

$$\stackrel{u=x-t}{=} \left(\int_x^0 \cos u^2 du \right)'$$

$$= \left(\int_0^x \cos u^2 du \right)'$$

$$= \cos x^2$$

$$(4) \left(\int_1^2 f(\underline{x+t}) dt \right)' \neq 0$$

$$\stackrel{u=x+t}{=} \left(\int_{x+1}^{x+2} f(u) du \right)'$$

$$= \underset{\checkmark}{f(x+2)} - f(x+1)$$

例 19(2015-23) 设 $f(x)$ 连续, $\varphi(x) = \int_0^{x^2} x f(t) dt$, 若 $\varphi(1) = 1, \varphi'(1) = 5$,

则 $f(1) = \underline{\hspace{2cm}}$.

$$\varphi(1) = \int_0^1 f(t) dt = 1 \quad \varphi'(1) = ?$$

【解】由已知 $\varphi(x) = x \int_0^{x^2} f(t) dt$, 方程两边对 x 求导得

$$\varphi'(x) = \int_0^{x^2} f(t) dt + 2x^2 f(x^2),$$

故有

$$\varphi(1) = \int_0^1 f(t) dt = 1, \quad \varphi'(1) = \underline{1} + \underline{2} f(1) = 5,$$

进而

$$f(1) = \underline{2}.$$

例 20(1998-1) 设 $f(x)$ 连续, 则 $\frac{d}{dx} \int_0^x t f(\underline{x^2 - t^2}) dt =$

$u = x^2 - t^2$ $\int_0^x t f(x^2 - t^2) dt = \int_{x^2}^0 \frac{1}{2} f(u) (-2t) du = \frac{1}{2} \int_{x^2}^0 f(u) du$ 答案: A

(A) $xf(x^2)$

(B) $-xf(x^2)$

(C) $2xf(x^2)$

(D) $-2xf(x^2)$

$\frac{d}{dx} \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt = \frac{1}{2} f(x^2) \cdot 2x$

例 21(1993-3) $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$, $F(x) = \int_1^x f(t)dt (0 \leq x \leq 2)$

则 $F(x)$ 为

$0 \leq x < 1$

$1 \leq x \leq 2$

$F(x) = \int_1^x t^2 dt$

$F(x) = \int_1^x 1 dx = x - 1$

答案: $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}$

(A) $\begin{cases} \frac{1}{3}x^3, & 0 \leq x < 1 \\ x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

(B) $\begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}, & 0 \leq x < 1 \\ x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

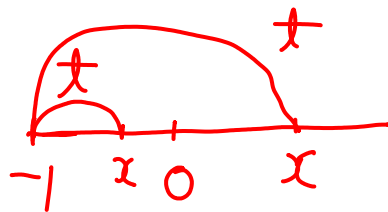
(C) $\begin{cases} \frac{1}{3}x^3, & 0 \leq x < 1 \\ x - 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

(D) $\begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}, & 0 \leq x < 1 \\ x - 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

例 22(1988-2) 设 $x \geq -1$, 求 $\int_{-1}^x (1 - |t|) dt$

分析 $-1 \leq x < 0$ 时 $\int_{-1}^x (1+t) dt$

$0 \leq x$ 时 $\int_{-1}^x (1 - |t|) dt = \int_{-1}^0 (1+t) dt + \int_0^x (1-t) dt$



例 23(2013-2) 设 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [0, \pi), \\ 2, & x \in [\pi, 2\pi]. \end{cases}$, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, 则

(A) $x = \pi$ 为 $F(x)$ 的跳跃间断点.

(B) $x = \pi$ 为 $F(x)$ 的可去间断点.

(C) $F(x)$ 在 $x = \pi$ 处连续不可导.

(D) $F(x)$ 在 $x = \pi$ 处可导.

【解】由于 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上只有第一类间断点 $x = \pi$, 其在 $[0, 2\pi]$ 上一定可积, 所以 $F(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上一定连续, 且 $F(x)$ 在 $x = \pi$ 处不可导. 故选(C).

$$\begin{aligned} 1^\circ 0 \leq x < \pi & \quad F(x) = \int_0^x \sin t dt = -\cos x + 1 \\ 2^\circ \pi \leq x \leq 2\pi & \quad F(x) = \int_0^\pi \sin t dt + \int_\pi^x 2 dt \\ & \quad F_-(\pi) = 0 \\ & \quad F_+(\pi) = 2 \end{aligned}$$

【注】实际上, 可计算 $F(x) = \int_0^x f(t) dt = \begin{cases} -\cos x + 1, & x \in [0, \pi), \\ 2x - 2\pi + 2, & x \in [\pi, 2\pi]. \end{cases}$

例 24(1998-2) 确定常数 a, b, c 的值, 使 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt} = c \quad (c \neq 0)$.

解 由 $\lim_{x \rightarrow 0} (ax - \sin x) = 0$, $c \neq 0$, 可知 $\Rightarrow$ 分子 $\rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt = \int_b^0 \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt = 0. \quad \text{于是 } b = 0.$$

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{\int_0^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - \cos x}{\ln(1+x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - \cos x}{x^2} = c,$$

故 $a = 1, c = \frac{1}{2}$. 即 $a = 1, b = 0, c = \frac{1}{2}$

例 25(2017-23) 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{x-t} e^t dt}{\sqrt{x^3}}$.

"0" = $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x-t} e^t x}{\sqrt{x^3}}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x-t} e^t}{\sqrt{x}}$ $\frac{0}{0}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x-t} e^t}{\sqrt{x}} \neq 1$

【解】 令 $\sqrt{x-t} = u$, 则

$t = (u^2 - x) = x - u^2$

$\int_0^x \sqrt{x-t} e^t dt = - \int_{\sqrt{x}}^0 2u^2 e^{x-u^2} du = e^x \int_0^{\sqrt{x}} 2u^2 e^{-u^2} du$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{x-t} e^t dt}{\sqrt{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x \int_0^{\sqrt{x}} 2u^2 e^{-u^2} du}{\sqrt{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{\sqrt{x}} 2u^2 e^{-u^2} du}{x^{\frac{3}{2}}}$

□ $f(x), g(x) \in [a, b]$ 且 $f(x) \neq g(x)$
 $g(x) \neq 0$

$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2xe^{-x} \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{3}{2}\sqrt{x}} = \frac{2}{3}$

2. $f, g \in (a, b)$ $\int_a^b f(x)g(x)dx$ $\frac{f(b) \int_a^b g(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}$

例 26(2010-3) 设可导函数 $y=y(x)$ 由方程 $\int_0^{x+y} e^{-t^2} dt = \int_0^x x \sin^2 t dt$ 确定,

则 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解】 由 $\int_0^{x+y} e^{-t^2} dt = \int_0^x x \sin^2 t dt$, 令 $x=0$, 得 $y=0$,

等式两端对 x 求导得 $e^{-(x+y)^2} \left(1 + \frac{dy}{dx}\right) = \int_0^x \sin^2 t dt + x \sin^2 x$,

将 $x=0, y=0$ 代入上式, 得 $1 + \frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = 0$, 所以 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = -1$.

微信公众号【V研客】
(ID: djky68)

(不定积分)

一、不定积分

$$\int f(x) dx$$

$$= F(x) + C$$

(定积分)

$$\int_a^b f(x) dx$$

数

(广义)

第二节 反常积分

$$[a, b] - \int_a^b f(x) dx$$

$$f(x) - \int_a^b f(x) dx$$

1° 判断收敛性

2° 计算

意义
(比较判别法)

公式

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

数

考试内容概要

一、无穷限的反常积分

积分 + 极限 有数

设 $f(x)$ 在 $[a, \infty)$ 上连续, 且 $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$ 存在, 则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 且 $\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$

设 $f(x)$ 在 $(-\infty, b]$ 上连续, $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$ 存在, 则称反常积分 $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ 收敛, 且 $\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$

设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ 与 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 则称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

一、无界函数的反常积分

$[a+\varepsilon, b]$ 分 1. 无穷型

设 $f(x)$ 在 $(a, b]$ 上连续, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$ 存在, 则

称反常积分 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛, 且 $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$

设 $f(x)$ 在 $[a, b)$ 上连续, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$, 且 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$ 存在, 则

称反常积分 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛, 且 $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$.

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 除点 $c \in (a, b)$ 上连续, 而在点 c 的邻域内无界,

且反常积分 $\int_a^c f(x) dx$ 和 $\int_c^b f(x) dx$ 收敛, 则反常积分 $\int_a^b f(x) dx$

收敛, 且 $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

二、反常积分的比较判别法

1、无穷限反常积分的比较判别法

(不等式形式) 设两个非负函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 且

$f(x) \leq g(x)$, 若反常积分 $\int_a^{+\infty} \underline{g(x)} dx$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 一定收敛

(极限形式) 设两个非负函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c$, 则

1) 当 $0 < c < +\infty$ 时, 反常积分 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 与 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 同敛散;

2) 当 $c = 0$ 时, 若反常积分 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 一定收敛

3) 当 $c = +\infty$ 时, 若反常积分 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 发散, 则 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 发散;

注: 考虑 $g(x) = \frac{1}{x^p}$ $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$

2、无界函数反常积分的比较判别法

(不等式形式) 设两个非负函数 $f(x), g(x)$ 在 $(a, b]$ 上连续, 且

$\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = \infty$, $f(x) \leq g(x)$, 若反常积分 $\int_a^b g(x) dx$ 收敛, 则 $\int_a^b f(x) dx$ 一定收敛

(极限形式) 设两个非负函数 $f(x), g(x)$ 在 $(a, b]$ 上连续,

且 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = c$, 则

$$g(x) = \frac{1}{(x-a)^p} \quad \int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx$$

1) 当 $0 < c < +\infty$ 时, 反常积分 $\int_a^b g(x) dx$ 与 $\int_a^b f(x) dx$ 同敛散;

2) 当 $c = 0$ 时, 若反常积分 $\int_a^b g(x) dx$ 收敛, 则 $\int_a^b f(x) dx$ 一定收敛

3) 当 $c = +\infty$ 时, 若反常积分 $\int_a^b g(x) dx$ 发散, 则 $\int_a^b f(x) dx$ 发散;

注: 考虑 $g(x) = \frac{1}{(x-a)^p}$

例、讨论 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} dx$ 的敛散性

非负
绝对值
拆成
 $\int_0^1 + \int_1^{+\infty}$

$$\leq \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ 收敛}$$

例、讨论 $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^7}} dx$ 的敛散性

比较法

$$\frac{x^2}{\sqrt{1+x^7}} \leq \frac{x^2}{x^{\frac{7}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$$

例、讨论 $\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{\ln x} dx$ 的敛散性

$$\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^p} dx$$

$$\ln x = \ln(1+(x-1)) \sim x-1$$

1/2折

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) \cdot \frac{\sqrt{x}}{\ln x} = 1$$

四、常用的反常积分

$$(1) \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\tan x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad (1)(\frac{1}{2})$$

$$(3) \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} +\infty, & p \leq 1 \\ \frac{1}{(p-1)a^{p-1}}, & p > 1 \end{cases} \quad (a > 0)$$

$$(4) \int_0^a \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{a^{1-p}}{1-p}, & p < 1 \\ +\infty, & p \geq 1 \end{cases} \quad (a > 0)$$

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

常考题型与典型例题

一、反常积分的敛散性

例 1(2015-2) 下列反常积分收敛的是 【 】

(A) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$. (B) $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$. (C) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$. (D) $\int_2^{+\infty} \frac{x}{e^x} dx$.

Handwritten notes: (A) $\frac{1}{2} < 1$, $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$; (B) $\frac{1}{2} \ln x$; (C) $\frac{1}{x \ln x}$; (D) $\frac{x}{e^x}$.

【解】 $\int_2^{+\infty} \frac{x}{e^x} dx = -\underline{(x+1)e^{-x}} \Big|_2^{+\infty} = 3e^{-2} - \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)e^{-x} = 3e^{-2}$.

答案：D

例 2(2013-2) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1 < x < e, \\ \frac{1}{x \ln^{\alpha+1} x}, & x \geq e. \end{cases}$,若反常积分

答案: D

$\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 则 $\int_1^e \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}} dx + \int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^{\alpha+1} x} dx$

$\alpha < 2$ $\alpha - 1 < 1$

(A) $\alpha < -2$. (B) $\alpha > 2$. (C) $-2 < \alpha < 0$. (D) $0 < \alpha < 2$.

【分析】

$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^{\alpha+1} x} dx = \frac{1}{-\alpha} \ln^{-\alpha} x \Big|_e^{+\infty} = \frac{1}{-\alpha} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln^{-\alpha} x + \frac{1}{\alpha}$, 有 $\alpha > 0$;

例 3(2016-2) 反常积分① $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$, ② $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$ 的敛散性为

(A) ①收敛, ②收敛.

(C) ①发散, ②收敛.

(B) ①收敛, ②发散.

(D) ①发散, ②发散.

分析

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx = \int_{-\infty}^0 e^{\frac{1}{x}} d\frac{1}{x}$$

$$= -e^{\frac{1}{x}} \Big|_{-\infty}^0 = 1$$

$$-e^{\frac{1}{x}} \Big|_0^{+\infty} = +\infty$$

答案: B

例 4(2016-1) 若反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)^b} dx$ 收敛, 则

- (A) $a < 1$ 且 $b > 1$. (B) $a > 1$ 且 $b > 1$.
(C) $a < 1$ 且 $a + b > 1$. (D) $a > 1$ 且 $a + b > 1$.

1° $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \cdot \frac{1}{x^a(1+x)^b} = 1$ $\int_0^1 \frac{1}{x^a} dx \Rightarrow a < 1$ $\frac{a+b > 1}{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{a+b}} dx}$

2° $\int_1^{+\infty} ?$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{a+b} \cdot \frac{1}{x^a(1+x)^b} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{x})^b} = 1$

答案: C



二、反常积分的计算

例 5(2000-2)

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x+7)\sqrt{x-2}} = \frac{\pi}{3} + \int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x+7)\sqrt{x-2}}$$

(Note: The handwritten text above the integral indicates a substitution $\sqrt{x-2} = t$.)

分析: $\sqrt{x-2} = t \Rightarrow x = 2 + t^2$

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{2t dt}{(9+t^2) \cdot t} = \frac{2}{3} \arctan \frac{t}{3} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{3}$$

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

例 6(2000-4) 计算 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{2-x}}$.

$$= \frac{\pi}{4e} \int_1^{+\infty} \frac{e^x}{e^2 + (e^x)^2} dx$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{de^x}{e^2 + (e^x)^2}$$

$$= \frac{1}{e} \arctan \frac{e^x}{e} \Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{e} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \frac{\pi}{4e}$$

例 7(2013-13) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx = \frac{\ln 2}{\ln 2}$. (方法 2.1?) 正确

$$= \int_1^{+\infty} \ln x d \frac{1}{1+x}$$

$$= - \frac{\ln x}{1+x} \Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x)} dx$$

$$= \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} \right) dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx - \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x} dx$$

$$= \ln \frac{x}{1+x} \Big|_1^{+\infty} = \ln 2$$