

微信公众号【顶尖考研】

2022年研究生入学考试

高等数学(微积分)基础班

2021年1月

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

第十二章 多元积分学及其应用

2009-2021 年三重、线、面积分分数分布

	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
三重	4	4			10		4				10		
一线	4									4			
<u>二线</u>		4	4	10	4	4	10	10	4		4	10	6
一面		10		4					10				
<u>二面</u>	10					10		10		10	4	10	5
合计	18	18	4	14	14	14	14	20	14	14	18	20	11

微信公众号【顶尖考研】
(ID: 273119316)

西研李

1. ~~积分区域~~ $\left(\frac{A}{1}\right)$ 定义. 1. ~~积分~~

2. 积分区域 $\left(\frac{A}{1}\right)$ 2. $\frac{A}{1}$ ✓

3. $\frac{A}{1}$

4. $\frac{A}{1}$

第一节 三重积分

考试要求

1、理解三重积分的概念，了解三重积分的性质

2、会计算三重积分（直角坐标、柱面坐标、球面坐标）。

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} dz dy dx \\ & \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} dz dy dx \end{aligned}$$

考试内容概要

一、定义.

设函数 $f(x, y, z)$ 在有界区域 Ω 上有界, 若对 Ω 作任意分割

$\Delta v_k (k=1, 2, \dots, n)$, 任意取点 $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in \Delta v_k$, 下列“乘积和式”的极限

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta v_k \quad \text{记作} \quad \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV$$

$= \iiint f dx dy dz$

存在, 则称此极限为函数 $f(x, y, z)$ 在 Ω 上的三重积分.

dv 称为体积元素, 在直角坐标系下常写作 $dx dy dz$.

二、性质：

三重积分的性质与二重积分相似.

例如 中值定理.

设 $f(x, y, z)$ 在有界闭域 Ω 上连续, V 为 Ω 的体积, 则存在 $(\xi, \eta, \zeta) \in \Omega$, 使得

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = f(\xi, \eta, \zeta) V$$

三、计算

1、利用直角坐标

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$$

若 $\Omega: z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y),$
 $(x, y) \in D$

$$\iint_D \left(\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy = \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

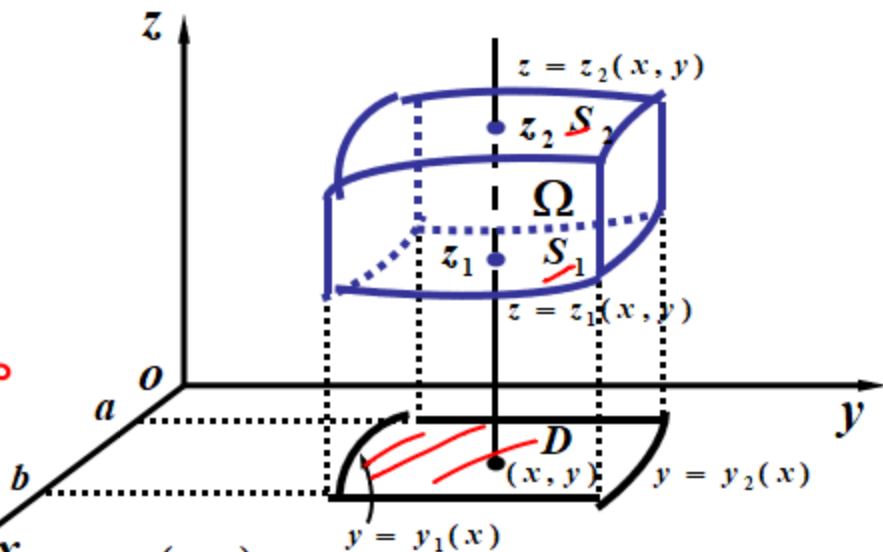
Handwritten notes: 3.1 = 6.6, 积分次序, 先对z积分

又若 $D: y_1(x) \leq y \leq y_2(x),$
 $a \leq x \leq b$

$$\int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left(\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

Handwritten notes: 先对y积分, 最后再对x积分

$$= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$



$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$$

若 $\Omega: (x, y, z) \in D_z, z \in [c_1, c_2]$

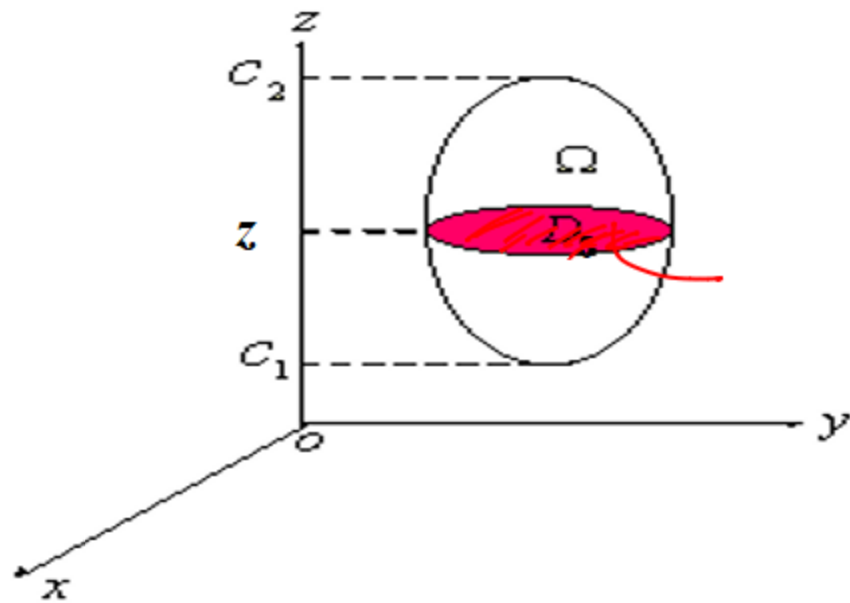
$$D_z = \{ (x, y) \mid (x, y, z) \in \Omega \}$$

$$= \int_{c_1}^{c_2} \left(\iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz$$

$$= \int_{c_1}^{c_2} dz \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy$$

先二后一

1253713



2、利用柱面坐标计算

点 M 的柱（面）坐标 (ρ, θ, z) .

三族柱坐标面: (x, y, z)

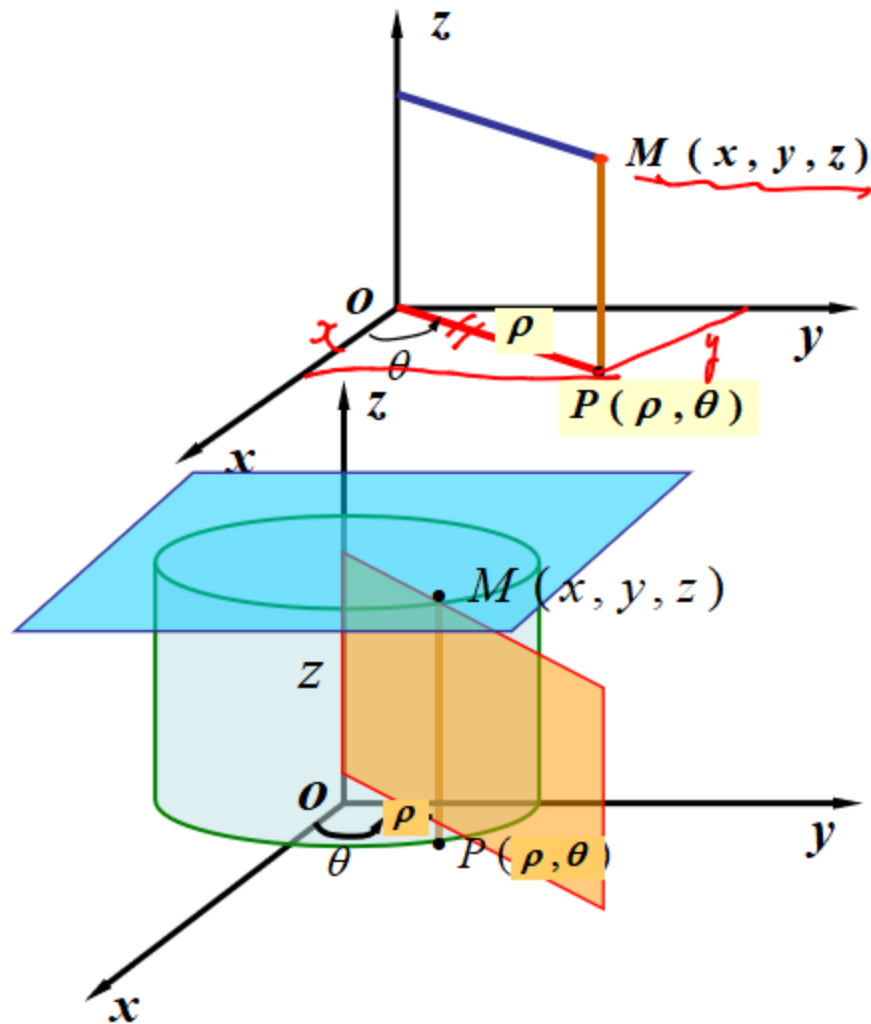
ρ 为常数 $\implies$ 圆柱面;

θ 为常数 $\implies$ 半平面;

z 为常数 $\implies$ 平面.

柱坐标与直角坐标的关系

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta, \\ z = z. \end{cases} \quad f(x^2+y^2)$$



微信公众号【顶尖考研】

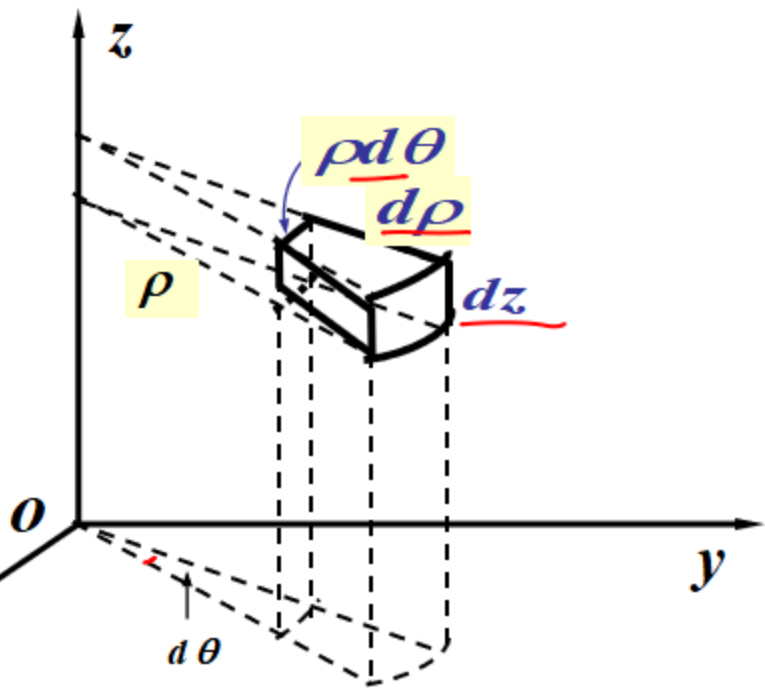
柱坐标系中的体积元素：

$$dv = \rho d\rho d\theta dz,$$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV$$

是子. 面 ρ, θ, z

$$= \iiint_{\Omega} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \cdot \rho d\rho d\theta dz.$$



3、利用球面坐标计算

(ρ, φ, θ)

点 M 的球（面）坐标 (r, φ, θ) .

三族球坐标面：

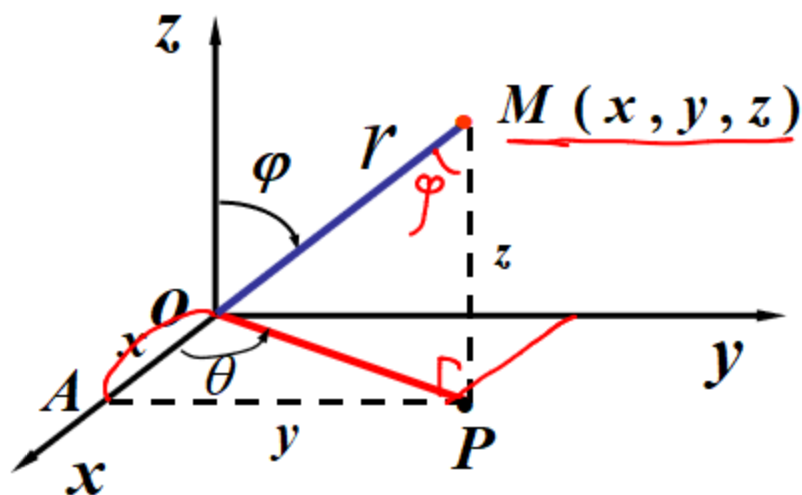
r 为常数 $\implies$ 球 面；

φ 为常数 $\implies$ 圆锥面；

θ 为常数 $\implies$ 半平面.

球坐标与直角坐标的关系

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta, \\ y = r \sin \varphi \sin \theta, \\ z = r \cos \varphi. \end{cases}$$



微信公众号【顶尖考研】

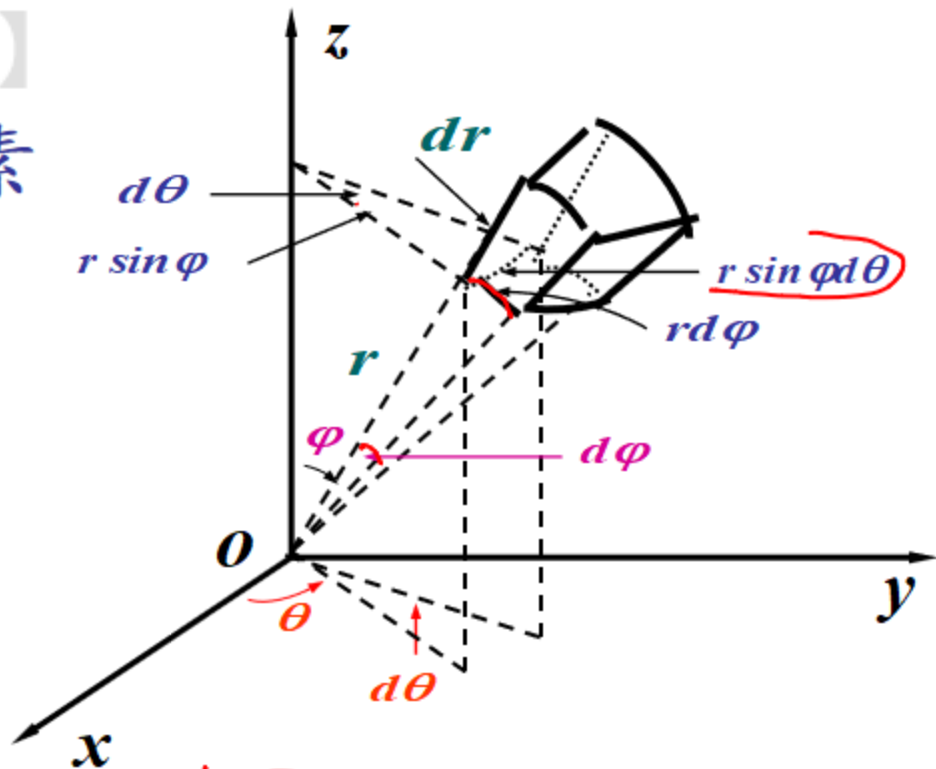
球坐标系中的体积元素

$$dV = r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta,$$

$$f(x^2 + y^2 + z^2) = f(r^2)$$

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_{\Omega} f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta. \end{aligned}$$

球坐标变换公式



四、三重积分的对称性

1、 Ω 关于 xOy 面对称, 则

0,

当 $f(x, y, -z) = -f(x, y, z)$ 时,

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \begin{cases} 0, & \text{当 } f(x, y, -z) = -f(x, y, z) \text{ 时,} \\ 2 \iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dV, & \text{当 } f(x, y, -z) = f(x, y, z) \text{ 时.} \end{cases}$$

其中 Ω_1 为 Ω 在 xOy 面上方的部分.

类似地, 可得到 Ω 关于 yOz 平面、 zOx 平面对称的情形.

2、轮换对称性

(1) 若 x, y 互换后区域 Ω 不变, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iiint_{\Omega} f(y, x, z) dV.$$

(2) 若 $x \rightarrow y, y \rightarrow z, z \rightarrow x$ 区域 Ω 不变, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iiint_{\Omega} f(y, z, x) dV = \iiint_{\Omega} f(z, x, y) dV.$$

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

常考题型与典型例题



1 **三种坐标系**-直角坐标下 $dV=dx dy dz$, 柱坐标下 $dV=r dr d\theta dz$, 球坐标下 $dV=r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$.

2 **基本方法**—化为累次积分(化为三次积分、二次积分(一次定积分和一次二重积分-先二后一)).

积分顺序与定限顺序相反——先积分者后定限.

3 **关键**—选择适宜坐标系和累次积分顺序.

1) **积分域**的形状(分块少, 表达简便)

边界主要为直角坐标面(柱坐标面、球坐标面)——直角坐标(柱坐标、球坐标);

2) **被积函数**的形式

含 x^2+y^2 —柱坐标, 含 $x^2+y^2+z^2$ —球坐标.

4 利用对称性、轮换对等性等等化简计算.

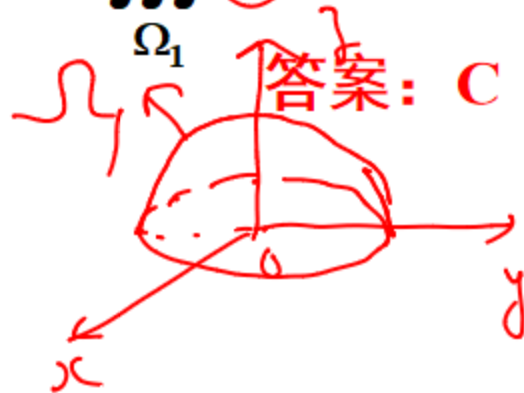
例 1(1988) 设有空间区域 $\Omega_1 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0$;

及 $\Omega_2 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$, 则

(A) $\iiint_{\Omega_1} x dV = 4 \iiint_{\Omega_2} x dV$. (B) $\iiint_{\Omega_1} y dV = 4 \iiint_{\Omega_2} y dV$.

(C) $\iiint_{\Omega_1} z dV = 4 \iiint_{\Omega_2} z dV$. (D) $\iiint_{\Omega_1} xyz dV = 4 \iiint_{\Omega_2} xyz dV$.

分析 Ω_1 关于 z 轴对称, Ω_2 关于 z 轴对称, Ω_1 关于 x, y 轴对称, Ω_2 关于 x, y 轴对称



例 2(2009) 设 $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$, 则

$$\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz = \underline{\underline{\frac{4}{15}\pi}}.$$



$$\begin{aligned} 1^\circ \text{ 柱坐标} - I &= \int_{-1}^1 \iint_{D_z} z^2 dx dy \\ &= \int_{-1}^1 z^2 \cdot \pi(z^2 - 1) dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^\circ \quad \iiint_{\Omega} z^2 dV &= \iiint_{\Omega} x^2 dV = \iiint_{\Omega} y^2 dV \\ &= \frac{1}{3} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dV = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 r^2 \cdot r^2 \sin\varphi dr \end{aligned}$$

例3(2015) 设 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标平面

所围成的空间区域, 则 $\iiint_{\Omega} \underline{(x+2y+3z)} dx dy dz = \underline{\frac{1}{4}}$.

分析: $\iiint_{\Omega} x dV = \iiint_{\Omega} y dV = \iiint_{\Omega} z dV$

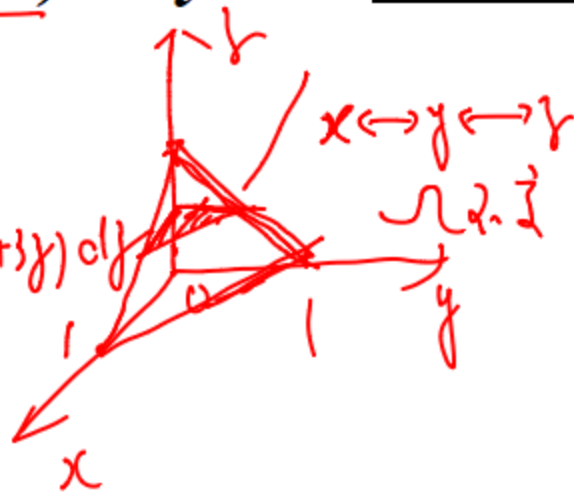
~~对称性~~

$I = 6 \iiint_{\Omega} z dV$

$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (x+2y+3z) dz$

$= 6 \int_0^1 z dz \left[\int_{D_z} dx dy \right]$

$= 6 \int_0^1 z \cdot \frac{1}{2} (1-z)^2 dz = \frac{1}{4}$



例 4(1989) 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} (x+z)dV$, 其中 Ω 是由曲

(ID: diky66)

面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 所围成的区域. $\frac{\pi}{8}$

分析 $\iiint_{\Omega} x dV = 0$ $\iiint_{\Omega} z dV$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$ $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \cos \varphi \cdot r \sin \varphi \cdot r dr$

$\frac{1}{16} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} =$

$\frac{1}{16} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} =$

16. 极坐标

$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dr \int_r^{\sqrt{1-r^2}} z \cdot r dz$

